北京大学
2024–2025 学年第一学期高等代数 (I) 期中考

课程号: 00132331　班号: 2　教师: 李文威

简略解答版

- 考试时间为 2024 年 10 月 29 日 10:10 — 12:00.
- 总分为 100 分.
- 课程和作业中的结论可以直接使用.
- 符号 ${}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{A}$ 代表矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的转置, gcd 代表最大公因数.

---

1. (10 分) 设 p 为素数, 考虑有限域 $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ 上的多项式环 $\mathbb{F}_p[X]$.

(i) 设 $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ 有 p 进制展开 $n = \sum_{k\geq 0} a_k p^k$, 其中 $a_k \in \{0, \ldots, p-1\}$, 至多有限项非零; 回忆到这些 $a_0, a_1, \ldots$ 由 n 唯一确定. 证明 $\mathbb{F}_p[X]$ 中的等式

$$(X+1)^n = \prod_{k\geq 0} (X^{p^k}+1)^{a_k}.$$

解答. 应用特征 p 时的性质 $(X+1)^{p^k a_k} = (X^{p^k}+1)^{a_k}$, 对所有 k 相乘.

(ii) 设 $n, m \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ 有 p 进制展开 $n = \sum_{k\geq 0} a_k p^k$, $m = \sum_{k\geq 0} b_k p^k$. 基于 (i) 证明二项式系数 $\binom{n}{m} := \frac{n(n-1)\cdots(n-m+1)}{m!}$ (当 $n < m$ 时定义为 0) 满足同余式

$$\binom{n}{m} \equiv \prod_{k\geq 0} \binom{a_k}{b_k} \pmod{p}.$$

解答. 考虑 X^m 在 $\prod_k (X^{p^k}+1)^{a_k} = \prod_k \left(\sum_{h_k=0}^{p-1} \binom{a_k}{h_k} X^{h_k p^k}\right)$ 中的系数, 以及 m 的 p 进制展开的唯一性.

2. (20 分) 对于下列的 $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_5 \in \mathbb{Q}^3$, 求出一个极大线性无关子集.

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{v}_4 = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 14 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{v}_5 = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 19 \end{pmatrix}.$$

解答. 消元法给出矩阵的列梯形式为

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

所以 $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3\}$, $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_4\}$, $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_5\}$ 等都是极大线性无关子集的标准取法, 尽管不是唯一的. 任给一种即可.

3. (20 分) 在有理数域 $\mathbb{Q}$ 上求下列矩阵的逆矩阵:

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$;

(b) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

解答. 以消元法计算. 逆矩阵依序是 $\begin{pmatrix} -1 & -3 & 1 \\ 2 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 11 & -38 \\ 0 & 1 & -2 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

4. (10 分) 记 $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) := \{a + b\sqrt{2} : a, b \in \mathbb{Q}\}$, 记 $\mathbb{Q}[\sqrt{2}, \sqrt{5}]$ 为 $\mathbb{C}$ 中包含 $\mathbb{Q}$, $\sqrt{2}$ 和 $\sqrt{5}$ 的最小子环. 已知 $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ 是 $\mathbb{C}$ 的子域 (作业内容).

(i) 以复数乘法让 $\mathbb{Q}[\sqrt{2}, \sqrt{5}]$ 成为 $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$-向量空间. 证明 $1, \sqrt{5}$ 是此向量空间的一组基.

(ii) 用复数乘法让 $\mathbb{Q}[\sqrt{2}, \sqrt{5}]$ 成为 $\mathbb{Q}$-向量空间. 证明 $1, \sqrt{2}, \sqrt{5}, \sqrt{10}$ 是一组基.

提示. 可用课程中关于纯量限制与基的结论: 若 F 是域 E 的子域, B 是 E-向量空间 V 的基, C 是 E 作为 F-向量空间的基, 则 $\{cb : (b, c) \in B \times C\}$ 是 V 作为 F-向量空间的基.

解答. 首先须验证 $\mathbb{Q}[\sqrt{2}, \sqrt{5}] = \mathbb{Q} + \mathbb{Q}\sqrt{2} + \mathbb{Q}\sqrt{5} + \mathbb{Q}\sqrt{10}$.

对于 (i), 观察到 1 和 $\sqrt{5}$ 生成 $\mathbb{Q}[\sqrt{2}, \sqrt{5}]$ (作为 $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$-向量空间), 故维数 ≤ 2. 如果维数 $= 2$, 则 1 和 $\sqrt{5}$ 成基; 如果维数 $= 1$ 则 $\mathbb{Q}[\sqrt{2}, \sqrt{5}] = \mathbb{Q}(\sqrt{2})$, 从而存在 $a, b \in \mathbb{Q}$ 使得 $\sqrt{5} = a + b\sqrt{2}$, 但两边取平方易见此无可能.

对于 (ii), 用 $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ 以 $1, \sqrt{2}$ 为基和 (i) 的结论来推导.

5. (15 分) 设 $\boldsymbol{A} \in \mathrm{M}_{m \times n}(F)$, 其中 F 是域.

(i) 证明 $\boldsymbol{A}$ 的秩 ≤ 1 当且仅当存在列向量 $\boldsymbol{b} \in F^m$ 和 $\boldsymbol{c} \in F^n$ 使得 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{b} \cdot {}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{c}$ (仅作出本问得 8 分).

(ii) 推而广之, 对于 $r \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$, 证明 $\boldsymbol{A}$ 的秩 $\leq r$ 当且仅当存在 $\boldsymbol{B} \in \mathrm{M}_{m \times r}(F)$ 和 $\boldsymbol{C} \in \mathrm{M}_{r \times n}(F)$ 使得 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{C}$.

解答. 对于 (ii), 将 $\boldsymbol{A}$ 分解成列向量 $(\boldsymbol{v}_1 | \cdots | \boldsymbol{v}_n)$, 将 $\boldsymbol{B}$ 分解成列向量 $(\boldsymbol{b}_1 | \cdots | \boldsymbol{b}_r)$, 并且记 $\boldsymbol{C} = (c_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq r \\ 1 \leq j \leq n}}$; 等式 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{C}$ 等价于

$$\boldsymbol{v}_i = \sum_{k=1}^{r} c_{ki} \boldsymbol{b}_k$$

对所有 $1 \leq i \leq n$ 成立; 当 $\boldsymbol{A}$ 给定, 存在这样的 $\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{C}$ 因此等价于 $\langle \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n \rangle$ 可由 r 个元素生成. 代入秩的定义.

6. (10 分) 记 H 为所有函数 $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 对函数的逐点加法和乘法构成的 $\mathbb{R}$-向量空间, 函数变元记为 x. 证明 H 的元素 $e^{1898x}, \ldots, e^{2024x}$ 线性无关.

解答. 方法多种. 譬如假设有线性关系式 $\sum_{k=1898}^{2024} p_k e^{kx} = 0$, 则因为多项式 $\sum_k p_k X^k$ 若非零则根数有限, 而指数函数可以取无穷多个值, 故必有 $\forall k$, $p_k = 0$. 另一种方法则是考虑指数函数的增长速度, 逐步论证 $p_{2024} = 0, \ldots, p_{1898} = 0$.

7. (15 分) 设 $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$, 命 $\zeta = e^{2\pi\imath/n}$.

(i) 定义 $f = \prod_{k=1}^{n}(1 + X^k)$, 展开后记为 $\sum_{k\geq 0} a_k X^k$. 证明

$$\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} f(\zeta^j) = \sum_{j\geq 0} a_{jn}.$$

解答. 对 $\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k\geq 0} a_k \zeta^{kj}$ 换序求和. 对所有 $k \geq 0$, 论证 $\sum_{j=1}^{n} \zeta^{kj}$ 在 $n \mid k$ 时为 n, 其它情形为 0.

(ii) 对所有 $j \geq 1$, 命 $d = n/\gcd(j, n)$, 研究 $X^d - 1$ 的分解以推导

$$(1+\zeta^j)(1+\zeta^{2j})\cdots(1+\zeta^{dj}) = \begin{cases} 2, & d \text{ 奇} \\ 0, & d \text{ 偶}, \end{cases}$$

$$f(\zeta^j) = \begin{cases} 2^{n/d}, & d \text{ 奇} \\ 0, & d \text{ 偶}. \end{cases}$$

解答. 首先, d 的定义相当于说 ζ^j 是 d 次本原单位根. 对 $X^d - 1 = (X - \zeta^j)\cdots(X - \zeta^{dj})$ 代入 $X = -1$ 得到第一部分. 周期之故, $f(\zeta^j)$ 是以上乘积的 n/d 次幂, 故 $f(\zeta^j)$ 在 $2 \nmid d$ 时为 $2^{n/d}$, 在 $2 \mid d$ 时为 0.

(iii) 对所有 $d \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ 定义 $\varphi(d)$ 为满足 $1 \leq h \leq d$ 并且和 d 互素的正整数 h 的个数. 在前两问的基础上证明

$$\big(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \text{ 中元素和为 } 0_{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} \text{ 的子集个数}\big) = \frac{1}{n}\sum_{\substack{d\mid n\\ d \text{ 奇}}} \varphi(d) 2^{n/d};$$

此处的子集容许为空集, 其元素和定义为 $0_{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}$.

解答. 展开 f 可知 a_k 是 $\{1, \ldots, n\}$ 中元素和为 k 的子集个数, 故 $\sum_{j\geq 0} a_{jn}$ 即欲证等式的左项. 根据 (i) 和 (ii), 这等于

$$\frac{1}{n}\sum_{\substack{d\mid n\\ d \text{ 奇}}} C_d 2^{n/d},$$

其中 C_d 是使得 $\gcd(j, n) = n/d$ 的 $j \in \{1, \ldots, n\}$ 的个数; 这般的 j 写作 $j = \frac{n}{d} \cdot j'$, 其中 $1 \leq j' \leq d$ 与 d 互素, 故 $C_d = \varphi(d)$.

北京大学
2024–2025 学年第一学期高等代数 (I) 期末考

课程号: 00132331　班号: 2　教师: 李文威

简略解答版

- 考试时间为 2024 年 12 月 31 日 08:30 — 10:30.
- 总分为 100 分.
- 课程和作业中的结论可以直接使用, 其余知识需要证明.
- 符号 ${}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{A}$ 代表矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的转置, $\mathbf{1}_{n\times n}$ 代表 $n\times n$ 单位矩阵, $\mathrm{M}_{m\times n}(R)$ 代表交换环 R 上的所有 $m\times n$ 矩阵所成集合.

---

1. (15 分) 计算以下实矩阵的特征多项式, 判断它在 $\mathbb{R}$ 和在 $\mathbb{C}$ 上可否对角化.

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

解答. 计算得特征多项式 $X^4 - 5X^2 + 18$, 无实根但有四个相异复根, 故在 $\mathbb{R}$ 上无法对角化, 在 $\mathbb{C}$ 上可对角化.

2. (10 分) 设 $p: V \to W$ 为线性满射, V 有限维, $f: V \to V$ 和 $g: W \to W$ 为满足 $pf = gp$ 的线性映射. 证明 g 的特征多项式整除 f 的特征多项式, 且 g 的极小多项式整除 f 的极小多项式.

解答. 回忆 $\dim\ker(p) + \mathrm{rk}(p) = \dim V$ 的证明, 可知适当取基后不妨设 V 带有直和分解 $V = W \oplus W'$ 而 p 是向直和项 W 的投影. 由此容易将 f 表成分块下三角矩阵, 其左上分块是 g 的矩阵, 如:

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} W & W' \end{array} \\ \begin{array}{c} W \\ W' \end{array} & \left(\begin{array}{c|c} g & \\ \hline \star & \star \end{array}\right) \end{array} \quad \text{留白部分为零,}$$

按此处理特征多项式与极小多项式.

3. (10 分) 对所有 $n \in \mathbb{Z}_{\geq 3}$ 定义 $\mathbb{Q}$ 上的 $n \times n$ 矩阵

$$\boldsymbol{D}_n = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & -1 & 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix},$$

求 $\det \boldsymbol{D}_n$ 的通式.

解答. 对 $n=3,4$ 直接计算, 在 $n \geq 5$ 时对最后一行展开两次得到递推公式 $\det \boldsymbol{D}_n = 2\det \boldsymbol{D}_{n-1} - \det \boldsymbol{D}_{n-2}$, 从而解出 $\det \boldsymbol{D}_n = 4$.

4. (20 分) 对以下实矩阵 $\boldsymbol{A}$, 求正交矩阵 $\boldsymbol{P}$ 及对角矩阵 $\boldsymbol{D}$ 使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{D}$, 要求 $\boldsymbol{D}$ 的对角元递减:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}.$$

解答. 可取

$$\begin{aligned} \boldsymbol{D} &= \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ \boldsymbol{P} &= \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{4}{3\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}; \end{aligned}$$

其 1-特征子空间是方程 $X + 2Y - 2Z = 0$ 的解空间, $\boldsymbol{P}$ 的后两列可为此空间的任意单位正交子集, 但 $\boldsymbol{P}$ 的第一列精确到 ± 1 是唯一的.

5. (15 分) 设 $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$. 证明由下式确定的实对称矩阵 $\boldsymbol{H} = (h_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ 正定:

$$h_{ij} := \frac{1}{i+j-1}.$$

解答. 运用 $h_{ij} = \int_0^1 t^{i-1} t^{j-1}\,\mathrm{d}t \implies {}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{x}\,\boldsymbol{H}\boldsymbol{y} = \int_0^1 \sum_{i=1}^n x_i t^{i-1} \sum_{j=1}^n y_j t^{j-1}\,\mathrm{d}t$. 另一种过于复杂的方法是将 $\boldsymbol{H}$ 视为 Cauchy 矩阵的特例, 说明其行列式非零, 然后代入正定性的判准, 但必需证明用到的性质.

6. (20 分) 证明以下事实.

(i) 考虑任意域上的 $n \times n$ 矩阵 $\boldsymbol{P}, \boldsymbol{Q}$, 则 $\boldsymbol{PQ}$ 和 $\boldsymbol{QP}$ 有相同的非零特征值 (不记重数).

解答. 直接的论证是设 $\boldsymbol{PQv} = \lambda \boldsymbol{v}$ 而 $\lambda \neq 0$ 且 $\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0}$, 则 $\boldsymbol{Qv} \neq \boldsymbol{0}$, 因此有 $\boldsymbol{QP}(\boldsymbol{Qv}) = \lambda(\boldsymbol{Qv})$. 反方向是对称的. 另一种方法是等同 $\boldsymbol{PQ}$ 和 $\boldsymbol{QP}$ 的特征多项式, 讲义有记载.

(ii) 设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in \mathrm{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ 为半正定对称矩阵. 证明 $\boldsymbol{AB}$ 的特征值皆为非负实数.

解答. 注意到可取半正定对称的 $\sqrt{\boldsymbol{B}}$, 而 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{A}\sqrt{\boldsymbol{B}}\sqrt{\boldsymbol{B}}$ 和 $\sqrt{\boldsymbol{B}}\boldsymbol{A}\sqrt{\boldsymbol{B}} = {}^{\mathrm{t}}\sqrt{\boldsymbol{B}}\,\boldsymbol{A}\sqrt{\boldsymbol{B}}$ 有相同的非零特征值.

7. (10 分) 一个环 H (容许非交换) 的双边理想定义为对加法封闭并且满足 $HI \subset I$ 和 $IH \subset I$ 的非空子集 $I \subset H$.

以下设 R 为交换环, I 为环 $\mathrm{M}_{n\times n}(R)$ 的双边理想, 证明存在唯一的理想 $J\subset R$ 使得 $I=\mathrm{M}_{n\times n}(J):=\{(a_{ij})_{1\le i,j\le n}:\forall i,j,\ a_{ij}\in J\}$.

解答. 以 $\boldsymbol{E}_{ij}\in\mathrm{M}_{n\times n}(R)$ 代表 (i,j) 矩阵元为 1, 其余为零的矩阵. 以下说明可取 $J=\{r\in R: r\boldsymbol{E}_{11}\in I\}$. 首先易见 J 是理想. 其次从 $r\boldsymbol{E}_{11}$ 能以左乘或右乘以置换矩阵得到所有 $r\boldsymbol{E}_{ij}$, 故 $\mathrm{M}_{n\times n}(J)\subset I$. 最后对于给定的 $\boldsymbol{A}\in I$ 和 (i,j), 左右乘以合适的矩阵能得到 $a_{ij}\boldsymbol{E}_{ij}\in I$, 再用置换矩阵可得 $a_{ij}\boldsymbol{E}_{11}\in I$, 故 $a_{ij}\in J$. 这就说明 $\boldsymbol{A}\in\mathrm{M}_{n\times n}(J)$.

唯一性说明如下: 若 J 是 R 的理想而 $I=\mathrm{M}_{n\times n}(J)$, 则 $r\boldsymbol{E}_{11}\in I \iff r\in J$ 表明 I 唯一地确定 J.