北京大学
2021 年第一学期高等代数 (I) 期中考

课程号: 00132321　班号: 3　教师: 李文威

简略解答版

- 考试时间为 2021 年 11 月 11 日 08:00 — 09:50.
- 总分为 100 分.
- 符号 $1_{n\times n}$ 代表 $n\times n$ 单位矩阵.
- 矩阵以圆括号表示. 矩阵 $A=(a_{ij})_{1\le i,j\le n}$ 的行列式记为 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots \\ a_{21} & a_{22} & \cdots \\ \vdots & & \ddots \end{vmatrix}$ 或 $\det A$.

---

1. (20 分) 对于下列的 $v_1,\ldots,v_5\in\mathbb{Q}^4$, 求出一个极大线性无关子集.

$$v_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\2\\4\end{pmatrix},\ v_2=\begin{pmatrix}0\\3\\1\\2\end{pmatrix},\ v_3=\begin{pmatrix}3\\0\\7\\14\end{pmatrix},\ v_4=\begin{pmatrix}1\\-1\\2\\0\end{pmatrix},\ v_5=\begin{pmatrix}2\\1\\5\\6\end{pmatrix}.$$

解答. 消元法给出矩阵的列梯形式为

$$\begin{pmatrix}1&0&3&0&1\\0&1&1&0&1\\0&0&0&1&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

所以 $\{v_1,v_2,v_4\}$, $\{v_1,v_3,v_4\}$, $\{v_1,v_2,v_5\}$, $\{v_1,v_3,v_5\}$ 都是极大线性无关子集的标准取法, 尽管不是唯一的. 任给一种即可.

2. (10 分) 设 A 为任意域 F 上的 $n\times n$ 矩阵, 证明

(i) A 的秩 ≤ 1 当且仅当 A 能够表成

$$A=\begin{pmatrix}x_1\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1&\cdots&y_n\end{pmatrix}$$

的形式, $x_i,y_i\in F$;

(ii) 若 A 的秩 ≤ 1, 则存在 $k\in F$ 使得 $A^2=kA$.

解答. 基于列秩的定义, (i) 的条件相当于说 A 的列向量可以写成 $x_1y, \ldots, x_ny$ 的形式, 其中 $y = {}^t(y_1 \cdots y_n)$ 是列向量, 而 $x_1, \ldots, x_n \in F$. 因此 (ii) 归结为

$$\begin{aligned} A^2 &= \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 & \cdots & y_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 & \cdots & y_n \end{pmatrix} \\ &= \underbrace{\sum_{i=1}^n x_i y_i}_{\in F} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 & \cdots & y_n \end{pmatrix} \\ &= \sum_{i=1}^n x_i y_i \cdot A. \end{aligned}$$

3. (10 分) 考虑域 F 上的分块对角矩阵

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{\lambda_1 1_{n_1 \times n_1}} & & \\ & \ddots & \\ & & \boxed{\lambda_r 1_{n_r \times n_r}} \end{pmatrix}$$

留白部分为零, $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \in F$ 两两相异, $n_i \geq 1$ 而 $n_1 + \cdots + n_r = n$. 确定所有满足

$$AB = BA$$

的 $n \times n$ 矩阵 B.

解答. 将 B 按照和 A 相同的规格分块, 则

$$AB = \left(\begin{array}{c|c|c} \lambda_1 B_{11} & \cdots & \lambda_1 B_{1r} \\ \hline \vdots & & \vdots \\ \hline \lambda_r B_{r1} & \cdots & \lambda_r B_{rr} \end{array}\right), \quad BA = \left(\begin{array}{c|c|c} \lambda_1 B_{11} & \cdots & \lambda_r B_{1r} \\ \hline \vdots & & \vdots \\ \hline \lambda_1 B_{r1} & \cdots & \lambda_r B_{rr} \end{array}\right).$$

因此 $AB = BA$ 等价于 $\lambda_i B_{ij} = \lambda_j B_{ij}$. 由于 $i \neq j$ 蕴涵 $\lambda_i \neq \lambda_j$, 此时 $B_{ij} = 0_{n_i \times n_j}$. 综上可见 $AB = BA$ 等价于 B 分块对角.

4. (20 分) 选定 $n \geq 1$. 考虑实数域 $\mathbb{R}$ 上的 $n \times n$ 矩阵 $P = (p_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$. 如果 P 满足

$$p_{ij} \geq 0, \quad \sum_{i=1}^n p_{ij} = 1,$$

则称之为 Markov 矩阵. 如果 $\mathbb{R}$ 上的 n 维列向量 $X = (x_i)_{i=1}^n$ 满足 $x_i \geq 0$ 和 $\sum_{i=1}^n x_i = 1$, 则称 X 为概率向量.

(i) 证明 P 是 Markov 矩阵当且仅当

$$X \text{ 是概率向量} \implies PX \text{ 是概率向量}.$$

(ii) 证明如果 X 是概率向量, P 是 Markov 矩阵, 而且对所有 i, j 都有 $p_{ij} > 0$, 则 PX 是各个坐标皆 > 0 的概率向量.

(iii) 证明 Markov 矩阵的乘积仍然是 Markov 矩阵.

(iv) 设 P 是 Markov 矩阵. 证明存在列向量 $X \neq 0$ 使得 $PX = X$.

解答. (i) 如果 P 是 Markov 矩阵而 X 是概率向量, 则 PX 的第 i 个坐标是 $\sum_{j=1}^n p_{ij}x_j \geq 0$, 这些坐标的和为 $\sum_i \sum_j p_{ij}x_j = \sum_j \left(\sum_i p_{ij}\right) x_j = \sum_j x_j = 1$. 反之设 P 映概率向量为概率向量, 则 P 的列向量 $Pe_1, \ldots, Pe_n$ 都是概率向量, 故 P 是 Markov 矩阵.

(ii) 从 (i) 知 PX 是概率向量, 而因为 $x_1, \ldots, x_n$ 不全为 0, 故 PX 的第 i 个坐标 $\sum_{j=1}^n p_{ij}x_j > 0$.

(iii) 可以直接计算, 或应用 (i) 的刻画.

(iv) 按 Markov 矩阵的定义, $(1 \cdots 1)P = (1 \cdots 1)$, 亦即 $(1 \cdots 1)(P - 1_{n\times n})$ 是零行向量, 所以 $P - 1_{n\times n}$ 不可逆. 但这又说明存在列向量 $X \neq 0$ 使得 $(P - 1_{n\times n})X$ 为零列向量.

5. (15 分) 设 F 为有限域, 其元素个数记为 q. 请将以下问题的答案用 q 来表达.

(i) 确定有限集 $\left\{ \begin{array}{l|l} \text{向量组 } (v_1, \ldots, v_m) & \text{线性无关} \\ \in \underbrace{F^n \times \cdots \times F^n}_{m \text{ 份}} & \end{array} \right\}$ 的元素个数, 其中 $1 \leq m \leq n$.

(ii) 确定 F 上的 $n \times n$ 可逆矩阵的个数.

(iii) 确定 F^n 有几个 m 维子空间, 其中 $1 \leq m \leq n$.

解答. (i) 对于 v_1 有 $q^n - 1$ 种选法 (排除零向量), 对于 v_2 有 $q^n - q$ 种选法 (排除 v_1 的倍数), 对于 v_3 有 $q^n - q^2$ 种选法 (排除 v_1, v_2 的线性组合), 依此类推可得 $\prod_{k=0}^{m-1}(q^n - q^k)$.

(ii) 给定 F 上的 $n \times n$ 可逆矩阵相当于给定线性无关的 $v_1, \ldots, v_n \in F^n$, 因此个数是 $\prod_{k=0}^{n-1}(q^n - q^k)$.

(iii) 任何 m 维子空间都有有序基 $w_1, \ldots, w_m \in F^n$, 而且有序基的个数由 (i) 确定 (另一种观点: 有序基和 $m \times m$ 可逆矩阵一样多, 因为 $(w_i)_{i=1}^m, (w_i')_{i=1}^m$ 确定相同的子空间当且仅当它们通过一个 $m \times m$ 可逆矩阵来转换, 此矩阵的取法是唯一的). 简单的计数遂说明 m 维子空间的个数是

$$\frac{\text{线性无关的 } (w_i)_{i=1}^m \text{ 的个数}}{m \times m \text{ 可逆矩阵的个数}} = \prod_{k=0}^{m-1} \frac{q^n - q^k}{q^m - q^k} = \prod_{k=0}^{m-1} \frac{q^{n-k} - 1}{q^{m-k} - 1}.$$

当然, 上式还可以进一步简化或展开.

6. (10 分) 设 $a_1, \ldots, a_n$ 皆非零 $(n \geq 2)$. 证明

$$\begin{vmatrix} x_1 - a_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1 & x_2 - a_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n - a_n \end{vmatrix} = (-1)^{n-1} a_1 \cdots a_n \left(\sum_{i=1}^n \frac{x_i}{a_i} - 1 \right).$$

解答. 按照先前作业提示的方法 (考虑有序基 $e_1, \ldots, e_{n-1}, f$, 其中 $f = e_1 + \cdots + e_n$). 本质上相同的作法是从第 $1, \ldots, n-1$ 行减掉最后一行, 化行列式为

$$\begin{vmatrix} -a_1 & 0 & 0 & \cdots & a_n \\ 0 & -a_2 & 0 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & -a_{n-1} & a_n \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n - a_n \end{vmatrix}$$

然后作列变换消掉最后一列的所有 a_n, 最后右下角可以整理为 $a_n \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{a_i} - 1 \right)$, 对此计算下三角矩阵的行列式.

7. (15 分) 对所有正整数 n, 定义 $\mathbb{Q}$ 上的 $n \times n$ 矩阵

$$A_n = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix},$$

作为特例, $A_1 = (2)$ 而 $A_2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

(i) 将行列式按行展开以证明当 $n \geq 3$ 时 $\det A_n = 2 \det A_{n-1} - \det A_{n-2}$.

(ii) 试确定 $\det A_n$.

(iii) 对于 $n \geq 2$, 定义 $n \times n$ 矩阵 C_n 使得它的第 $(1, 2)$ 个矩阵元为 -2, 其余矩阵元和 A_n 相同. 试证 $\det C_n = 2$.

解答. 按最后一行展开 (做两次) 给出 (i). 由 $\det A_1 = 2$ 和 $\det A_2 = 3$ 递归地从 (i) 验证 $\det A_n = n + 1$, 此即 (ii). 至于 (iii), 同样按行展开两次得到 $n \geq 4$ 时 $\det C_n = 2 \det C_{n-1} - \det C_{n-2}$, 再从 $\det C_2 = \det C_3 = 2$ 验证 $\det C_n = 2$.

北京大学
2021 年第一学期高等代数 (I) 期末考

课程号: 00132321　**班号**: 3

简略解答版

- 考试时间为 2021 年 12 月 28 日 08:30 — 10:30.
- 符号 $\mathrm{M}_{m\times n}(F)$ 代表域 F 上的所有 $m\times n$ 矩阵构成的空间, 符号 $0_{m\times n}$ 代表 $m\times n$ 零矩阵, $1_{n\times n}$ 代表 $n\times n$ 单位矩阵.
- 矩阵以圆括号表示. 矩阵 $A=(a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ 的转置记为 ${}^tA$.
- 可以使用课本或上课证明的一般性结果, 期中考出现过的内容, 或者提示的内容.

---

1. (15 分) 设 $A\in\mathrm{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$ 满足 $A^2=A$. 证明 A 的迹等于 A 的秩. 提示: 可由极小多项式有无重根来判定可否对角化.

解答. 因为 $f:=X^2-X$ 无重根并且满足 $f(A)=0_{n\times n}$, 故 A 可以对角化, 它的特征值只有 0 和 1. 按此计算 A 的迹和秩.

2. (10 分) 设 $m,n\geq 1$. 考虑域 $\mathbb{C}$ 上的分块矩阵

$$A=\left(\begin{array}{c|c} B & \\ \hline & C \end{array}\right),\quad B\in\mathrm{M}_{n\times n}(\mathbb{C}),\quad C\in\mathrm{M}_{m\times m}(\mathbb{C}),$$

空白部分为 0. 证明 A 可对角化当且仅当 B 和 C 皆可对角化.

解答. 从矩阵的分块运算立见 B, C 可对角化蕴涵 A 可对角化. 反之若 A 可对角化, 则极小多项式 m_A 无重根. 但分块运算给出 $m_A(B)=0_{n\times n}$, $m_A(C)=0_{m\times m}$, 这又导致 B 和 C 的极小多项式也无重根, 故 B 和 C 可对角化.

3. (15 分) 设 $A\in\mathrm{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$, 证明 ${}^tAA$ 在 $\mathbb{C}$ 中的特征值都是非负实数.

解答. 既然 ${}^tAA$ 是对称矩阵, 它在 $\mathbb{R}$ 上可对角化, 因而特征值都是实数. 若 ${}^tAAv=\lambda v$, 其中 $v\neq 0$, 则

$$\lambda\cdot{}^tvv={}^tv\left({}^tAAv\right)={}^t(Av)(Av)\geq 0$$

蕴涵 $\lambda\geq 0$. 或者也可以直接在 $\mathbb{C}$ 中操作, 设 $\lambda\in\mathbb{C}$ 而 $v\in\mathbb{C}^n\smallsetminus\{0\}$, 但需要 ${}^tA={}^t\overline{A}$ 的性质.

4. (10 分) 在配备标准内积的空间 $\mathbb{R}^4$ 中, 设

$$v_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix},\quad v_2=\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix},\quad v_3=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\-1\end{pmatrix},$$

以 Gram–Schmidt 正交化为它们生成的子空间求一组正交基, 不必化为单位向量.

解答. 按标准方法操作. 以行向量表示为:

$$\begin{aligned}
w_1 &= v_1 = (1,1,0,0),\\
w_2 &= v_2 - \frac{(v_2,w_1)}{(w_1,w_1)}\cdot w_1\\
&= (1,0,1,0) - \frac{1}{2}(1,1,0,0) = \left(\frac{1}{2}, \frac{-1}{2}, 1, 0\right),\\
w_3 &= v_3 - \frac{(v_3,w_1)}{(w_1,w_1)}\cdot w_1 - \frac{(v_3,w_2)}{(w_2,w_2)}\cdot w_2\\
&= (1,0,0,-1) - \frac{1}{2}(1,1,0,0) - \frac{1/2}{3/2}\left(\frac{1}{2}, \frac{-1}{2}, 1, 0\right)\\
&= (1,0,0,-1) - \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0\right) - \left(\frac{1}{6}, \frac{-1}{6}, \frac{1}{3}, 0\right)\\
&= \left(\frac{1}{3}, \frac{-1}{3}, \frac{-1}{3}, -1\right),
\end{aligned}$$

或者取与之成比例的向量.

5. (10 分) 设 n 元实二次型 f 可以表成 $f_+ - f_-$, 其中 $f_\pm$ 都是半正定二次型, f_+ 的正惯性指数为 p 而 f_- 的正惯性指数为 q. 证明 f 的正惯性指数 $\leq p$, 负惯性指数 $\leq q$.

解答. 设 f 等价或者说同构于二次型 $X_1^2 + \cdots + X_{p'}^2 - X_{p'+1}^2 - \cdots - X_{p'+q'}^2$. 为了说明正惯性指数满足 $p' \leq p$, 仅须说明任何 $p+1$ 维子空间 $U \subset \mathbb{R}^n$ 都包含一个非零向量 v 使得 $f(v) \leq 0$. 由于 f_+ 的正惯性指数为 p, 存在 $n-p$ 维子空间 $V \subset \mathbb{R}^n$ 使得 $f_+|_V$ 半负定, 而

$$\dim U \cap V = \dim U + \dim V - \dim(U+V) \geq \dim U + \dim V - n = 1,$$

故可取 $v \in (U \cap V) \smallsetminus \{0\}$. 这样的 v 满足

$$f(v) = f_+(v) - f_-(v) \leq f_+(v) \leq 0.$$

负惯性指数的估计 $q' \leq q$ 完全类似, 也可以用 $-f$ 代替 f 化约到正惯性指数的情形.

6. (20 分) 判断下列实三元二次型是否正定.

(a) $f(X_1,X_2,X_3) = 5X_1^2 + 6X_2^2 + 4X_3^2 - 4X_1X_2 - 4X_2X_3$;

(b) $f(X_1,X_2,X_3) = 3X_1^2 + 4X_2^2 + X_3^2 + 4X_1X_2 - 4X_2X_3$.

解答. 使用配方法, 或者计算以下矩阵的顺序主子式:

$$\begin{pmatrix} 5 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & -2 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

答案分别是 $5, 26, 84$ 和 $3, 8, -4$. 故 (a) 正定, (b) 非正定.

7. (10 分) 设 F 是 $\mathbb{C}$ 的子域, $a, b \in F$ 满足 $a + b \neq 0$. 证明 F 上的二元二次型

$$aX^2 + bY^2 \quad \text{和} \quad (a+b)X^2 + ab(a+b)Y^2$$

相互等价.

解答. 作线性并且可逆的坐标变换 $X = U + bV$, $Y = U - aV$ (因为 $a + b \neq 0$), 计算

$$a(U+bV)^2 + b(U-aV)^2 = (a+b)U^2 + ab(a+b)V^2.$$

8. (10 分) 设 $A, B \in \mathrm{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$, B 是对称矩阵, $k \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ 是奇数. 证明如果 $AB^k = B^kA$, 则 $AB = BA$.

解答. 因为对称矩阵可对角化, 可设 B 是对角的, 其对角元为

$$\underbrace{\lambda_1, \ldots, \lambda_1}_{n_1\text{ 个}}, \ldots, \underbrace{\lambda_r, \ldots, \lambda_r}_{n_r\text{ 个}}, \quad \lambda_1, \ldots, \lambda_r \text{ 两两相异}, \quad \sum_{i=1}^{r} n_i = n.$$

因为 k 是奇数, $\lambda_1^k, \ldots, \lambda_r^k$ 也两两相异. 由此可见满足 $AB = BA$ 和 $AB^k = B^kA$ 的 A 有相同的描述: 它们都是 $n_1 \times n_1, \ldots, n_r \times n_r$ 分块对角矩阵.