中国科学院大学

课程编号：B12001Y-01，B12001Y-02

课程名称：代数

试 题 专 用 纸

任课教师：李文威，支丽红

注意事项：

1.考试时间为 120 分钟，考试方式 闭 卷；

2.全部答案写在答题纸上；

3.考试结束后，请将本试卷和答题纸、草稿纸一并交回。

---

1. **(15 分)** 证明当 $n \geq 3$ 时, 群 S_n 不同构于 $A_n \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$.
⟴ 解答. 落在 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 像里的元素必为中心元. 然而当 $n \geq 3$ 时容易验证 S_n 无中心元.

2. **(20 分)** 设 p 和 q 是两个素数, $p < q$.

(i) 证明 pq 阶群 G 一定不是单群.

(ii) 设 p 整除 $q-1$. 证明 pq 阶非交换群 G 一定可以由下述生成元和定义关系给出

$$G = \langle a, b \mid a^p = 1 = b^q,\ a^{-1}ba = b^r \rangle$$

其中 $r^p \equiv 1 \pmod{q}$ 而 q 不整除 $r-1$.

3. **(15 分)** 试给出 1500 阶交换群的分类.
⟴ 解答. 因为 $1500 = 2^2 \times 3 \times 5^3$, 问题化为 $2^2, 3, 5^3$ 阶交换群的分类, 同构类分别是

$$\mathbb{Z}/4, \quad \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2,$$
$$\mathbb{Z}/3,$$
$$\mathbb{Z}/5^3, \quad \mathbb{Z}/5^2 \oplus \mathbb{Z}/5, \quad \mathbb{Z}/5 \oplus \mathbb{Z}/5 \oplus \mathbb{Z}/5.$$

相应地 1500 阶交换群共有 $2 \times 1 \times 3 = 6$ 种.

4. **(15 分)** 本题所谓的自由交换群都假定为有限秩, 也就是同构于 $\mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}$ (有限项) 的交换群. 群运算写作加法. 注记: 以下结果对无穷秩情形也成立, 但这里不要求证明.

(i) 具有下述性质的交换群 A 称为可除的: 对任意正整数 m 和 $x \in A$, 存在 $y \in A$ 使得 $my = x$. 证明非平凡的自由交换群不可能是可除群.

(ii) 说明群 $(\mathbb{Q}, +)$ 可除, 因而不是自由交换群.

(iii) 证 $(\mathbb{Q}, +)$ 的所有有限生成子群都同构于 $(\mathbb{Z}, +)$.

⟴ 解答. 考虑自由交换群 $\mathbb{Z}^{\oplus I}$ 的非零元 $x = (x_i)_{i \in I}$ (按题设假定 I 是有限集). 若 $m > \max_{i \in I} |x_i|$, 则不存在 $y = (y_i)_{i \in I}$ 使得 $my = x$. 显然 $(\mathbb{Q}, +)$ 可除; 它的有限生成子群必属于某个 $\frac{1}{n}\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}$, 因此也同构于 $\mathbb{Z}$.

5. **(15 分)** 证明 $\mathbb{Z}\left[\sqrt{-2}\right] = \left\{a + b\sqrt{-2} : a, b \in \mathbb{Z}\right\}$ 是欧几里得环.
⟴ 解答. 和 $\mathbb{Z}\left[\sqrt{-1}\right]$ 的手法完全相同.

6. **(20 分)** 定义 $\mathscr{C}([0,1])$ 为全体连续函数 $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ 之集, 它具有交换环的结构: 命 $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$, $(fg)(x) = f(x)g(x)$, 乘法单位元是常值函数 1.

中国科学院大学

试 题 专 用 纸

课程编号：B12001Y-01，B12001Y-02

课程名称：代数

任课教师：李文威，支丽红

注意事项：

1.考试时间为 120 分钟，考试方式 闭 卷；

2.全部答案写在答题纸上；

3.考试结束后，请将本试卷和答题纸、草稿纸一并交回。

(i) 证明 $f \in \mathscr{C}([0,1])$ 是可逆元当且仅当 f 处处非零.

(ii) 对每个 $x \in [0,1]$ 定义 $\mathfrak{m}_x := \{ f \in \mathscr{C}([0,1]) : f(x) = 0 \}$, 说明 $\mathfrak{m}_x$ 是极大理想.

(iii) 证明对每个极大理想 $\mathfrak{m} \subset \mathscr{C}([0,1])$ 都存在 x 使得 $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_x$. 提示: 可应用分析学的常识 − $[0,1]$ 若能由一族开子集覆盖, 则可以挑出一族有限子覆盖.

解答. 对每个 x 定义环同态 $\mathrm{ev}_x : f \mapsto f(x)$. 第一个部分是简单的, 第二部分是因为

$$\mathfrak{m}_x = \mathrm{Ker}\left(\mathrm{ev}_x : \mathscr{C}([0,1]) \twoheadrightarrow \mathbb{R}\right).$$

以下讨论第三部分. 我们承认数学分析中关于 $[0,1]$ 的几个性质, 以下的 "开集" 不妨理解为 $[0,1]$ 中形如 $[0,b)$, (a,b) 或 $(a,1]$ 的子区间:

- 如 $[0,1]$ 由是一族开集的并, 则它是其中有限多个开集的并;
- 若 $f \in \mathscr{C}([0,1])$ 满足 $f(x) \neq 0$, 则 f 在某个包含 x 的开集上非零.

假定对每个 $x \in [0,1]$ 都存在 $f_x \in \mathfrak{m}$ 使得 $f(x) \neq 0$; 取开集 $\mathscr{U}_x \ni x$ 使得 f_x 在其上恒非零. 拣择有限多个 $x_1, \ldots, x_n$ 使得 $\bigcup_{i=1}^{n} \mathscr{U}_{x_i} = [0,1]$, 则

$$f := \sum_{i=1}^{n} f_{x_i}^2 \quad \in \mathfrak{m}$$

并且对每个点 x 都存在 $i = i(x)$ 使得 $x \in \mathscr{U}_{x_i}$ 而 $f(x) \geq f_{x_i}(x)^2 > 0$, 故 f 可逆, 从而 $\mathfrak{m} = \mathscr{C}([0,1])$.