开课编号：B13009H
课程名称：模形式导论
任课教师：李文威

时间: 2017 年 1 月 4 日 13:30–15:30
总分: 100 分

处理级数和无穷乘积时不必另证收敛和全纯等性质. 讲义和课堂的结果可以直接使用.

1. **(30 分)** 设 $N_0 \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$. 证明存在 $\alpha \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{Q})^+$ 和 $N \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ 使得

$$f \in M_k(\Gamma(N_0)) \implies f \Big|_k \alpha \in M_k(\Gamma_1(N)).$$

解答. 课堂上已经说明 $f \mapsto f \Big|_k \alpha$ 给出同态 $M_k(\Gamma(N_0)) \xrightarrow{\sim} M_k(\alpha^{-1}\Gamma_0(N)\alpha)$. 为了得到 $M_k(\alpha^{-1}\Gamma_0(N)\alpha) \subset M_k(\Gamma_1(N))$, 取 α, N 使得 $\Gamma_1(N) \subset \alpha^{-1}\Gamma(N_0)\alpha$ 即可; 这里无须再检验 $\Gamma_1(N)$ 的尖点处的全纯性, 因为 $\alpha^{-1}\Gamma(N_0)\alpha$ 和任意同余子群皆可公度. 取

$$\alpha = \begin{pmatrix} N_0 & \\ & 1 \end{pmatrix}, \quad N_0^2 \mid N,$$

那么对所有 $\gamma = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \Gamma_1(N)$,

$$\alpha\gamma\alpha^{-1} = \begin{pmatrix} a & bN_0 \\ cN_0^{-1} & d \end{pmatrix} \in \Gamma(N_0).$$

2. **(30 分)** 令 Γ 为 $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$ 的同余子群, $f \in M_2(\Gamma)$. 证明当 $\eta \in \mathscr{H}$ 是 Γ 的椭圆点时 $f(\eta) = 0$.

解答. 模型式的性质表明 $f(\tau)\,\mathrm{d}\tau$ 是 $\mathscr{H}$ 上对 Γ 作用不变的全纯微分形式. 设 η 是椭圆点. 在 η 附近可用一个线性分式变换来取局部坐标 z 使得 $z(\eta) = 0$, 而已知 $\mathrm{Stab}_\Gamma(\tau)$ 在坐标 z 下的作用由一个旋转变换 $z \mapsto \alpha z$ 生成, $|\alpha| = 1$ 而 $\alpha \neq 1$. 因为 $\mathrm{d}(\alpha z) = \alpha\,\mathrm{d}z$, 对之不变的微分形式在 $z = 0$ 处必取零值.

3. **(30 分)** 设 $k > 2$ 为偶数, $q := e^{2\pi i\tau}$. 考虑 Eisenstein 级数及其 L-函数

$$\mathscr{G}_k(\tau) := -\frac{B_k}{2k} + \sum_{n\geq 1} \sigma_{k-1}(n) q^n \in M_k(\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})), \quad \tau \in \mathscr{H},$$

$$L(s, \mathscr{G}_k) := \sum_{n\geq 1} \frac{\sigma_{k-1}(n)}{n^s}, \quad \Re(s) \gg 0,$$

此处 $\sigma_{k-1}(n) := \sum_{d|n} d^{k-1}$. 试用 Riemann ζ-函数来表示 $L(s, \mathscr{G}_k)$.

解答. 因为 $\mathbb{Z}_{\geq 1}$ 上的函数 σ_{k-1} 是 $n \mapsto n^{k-1}$ 和常值函数 1 的卷积, 根据卷积与 Dirichlet 级数乘法的对应可得

$$L(s, \mathscr{G}_k) = \sum_{n\geq 1} n^{k-1-s} \cdot \sum_{n\geq 1} n^{-s} = \zeta(s - k + 1)\zeta(s).$$

4. **(10 分)** 对 $(z,\tau)\in\mathbb{C}\times\mathscr{H}$ 定义 $q:=e^{\pi i\tau}$, $\eta:=e^{2\pi iz}$ 和

$$\begin{aligned}\vartheta(z;\tau)&:=\sum_{n\in\mathbb{Z}}q^{n^2}\eta^n,\\ P(z;\tau)&:=\prod_{n\geq 1}\left(1+q^{2n-1}\eta\right)\left(1+q^{2n-1}\eta^{-1}\right).\end{aligned}$$

定义 $\mathbb{C}$ 中的格 $\Lambda_\tau:=\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}\tau$.

(a) 证明 $\vartheta(z+\tau;\tau)=(q\eta)^{-1}\vartheta(z;\tau)$, $P(z+\tau;\tau)=(q\eta)^{-1}P(z;\tau)$, 从而说明 $z\mapsto\vartheta(z;\tau)/P(z;\tau)$ 是以 Λ_τ 为周期格的椭圆函数.

(b) 固定 τ, 证明 $z\mapsto P(z;\tau)$ 的零点集是 $z=\frac{1}{2}+\frac{\tau}{2}+\Lambda_\tau$. 证明它们也是 $\vartheta(z;\tau)$ 的零点, 而 $\vartheta(z;\tau)/P(z;\tau)$ 只和 q 相关, 记作 $\phi(q)$.

(c) 证明

$$\begin{aligned}&\vartheta\left(\frac{1}{2};4\tau\right)=\vartheta\left(\frac{1}{4};\tau\right),\\ &P\left(\frac{1}{2};4\tau\right)=P\left(\frac{1}{4};\tau\right)\cdot\prod_{n\geq 1}\left(1-q^{4n-2}\right)\left(1-q^{8n-4}\right),\\ &\lim_{q\to 0}\phi(q)=1.\end{aligned}$$

(d) 由上式证明 $\phi(q)=\prod_{n\geq 1}(1-q^{2n})$, 并代入 $(z;\tau)\rightsquigarrow\left(-\frac{\tau}{4}+\frac{1}{2},\ \frac{3\tau}{2}\right)$ (相应地 $(q,\eta)\rightsquigarrow(q^{3/2},-q^{-1/2})$) 以导出 **Jacobi 三重积公式**

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}}(-1)^n q^{\frac{3n^2+n}{2}}=\prod_{n\geq 1}(1-q^n).$$

注: 这也给出了 Dedekind η 函数的展开式.

☞ 解答.

(a) 代 $z\rightsquigarrow z+\tau$ 相当于代 $\eta\rightsquigarrow q^2\eta$. 所以

$$\begin{aligned}\vartheta(z+\tau;\tau)&=\sum_n q^{n^2+2n}\eta^n=q^{-1}\eta^{-1}\sum_n q^{(n+1)^2}\eta^{n+1},\\ P(z+\tau;\tau)&=\prod_{n\geq 1}(1+q^{2n+1}\eta)(1+q^{2n-3}\eta^{-1})\\ &=P(z;\tau)(1+q\eta)^{-1}(1+q^{-1}\eta^{-1}).\end{aligned}$$

(b) 显然 $1+q^{2n-1}\eta^{\pm 1}=0$ 当且仅当 $\eta^{\pm 1}=-q^{2n-1}$, 后者等价于

$$\begin{aligned}\pm 2\pi iz&\equiv\pi i(2n-1)\tau+\pi i\pmod{2\pi i\mathbb{Z}},\quad\text{即}\\ \pm z&\equiv n\tau+\frac{-\tau+1}{2}=(n-1)\tau+\frac{\tau+1}{2}\pmod{\mathbb{Z}}.\end{aligned}$$

当 $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ 变动, 因为

$$-\left(\frac{\tau+1}{2}\right) - \mathbb{Z} - \mathbb{Z}_{\geq 0}\tau = \frac{\tau+1}{2} + \mathbb{Z} + \mathbb{Z}_{<0}\tau,$$

这表明 $P(z;\tau)$ 的零点集恰为 $\frac{1+\tau}{2} + \Lambda_\tau$. 由于 $z \mapsto \eta$ 的导数处处非零, 上述零点都是一阶的. 因全纯椭圆函数必为常数之故, 根据 (a), 仅须再验证 $\vartheta(\frac{1+\tau}{2};\tau) = 0$ 即可. 代入级数后得到

$$\vartheta\left(\frac{1+\tau}{2};\tau\right) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} (-1)^n q^{n^2+n},$$

右式对项的重排 $n \rightsquigarrow -n-1$ 变号, 故为零.

(c) 按定义

$$\vartheta\left(\frac{1}{4};\tau\right) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} i^n q^{n^2},$$

考虑 $n \leftrightarrow -n$ 可知奇数项相消, 偶数项给出 $\sum_n (-1)^n q^{4n^2}$, 即 $\vartheta\left(\frac{1}{2};4\tau\right)$. 类似地,

$$\begin{aligned} P\left(\frac{1}{2};4\tau\right) &= \prod_{n\geq 1}\left(1-q^{4(2n-1)}\right)\left(1-q^{4(2n-1)}\right) \\ &= \prod_{n\geq 1}\left(1-q^{8n-4}\right)^2, \\ P\left(\frac{1}{4};\tau\right) &= \prod_{n\geq 1}\left(1+iq^{2n-1}\right)\left(1-iq^{2n-1}\right) \\ &= \prod_{n\geq 1}(1+q^{4n-2}); \end{aligned}$$

由此见 $P(1/4;\tau)\prod_{n\geq 1}(1-q^{4n-2})(1-q^{8n-4})$ 等于 $P(1/2;4\tau)$. 最后, 固定 $\eta \neq 0$, 当 $q \to 0$ 时 ϑ, P 都趋近于 1, 故 $\phi(q) \to 1$.

(d) 上一步表明

$$\phi(q) = \prod_{n\geq 1}(1-q^{4n-2})(1-q^{8n-4})\phi(q^4).$$

反复应用上式, 归纳得出

$$\phi(q) = \prod_{h=1}^{2k}\prod_{n\geq 1}\left(1-q^{2^{h+1}n-2^h}\right)\cdot\phi\left(q^{2^{2k}}\right), \quad k \geq 1.$$

展开 $\phi(q) = 1 + \sum_{m\geq 1} c_m q^m$. 因为所有正偶数 $2r$ 都能唯一表作 $2r = 2^h(2n-1) = 2^{h+1}n - 2^h$, 其中 $h, n \geq 1$, 上式表明在幂级数环中

$$\begin{aligned} 1 + \sum_{m\geq 1} c_m q^m &\equiv \prod_{h=1}^{2k}\prod_{n\geq 1}\left(1-q^{2^{h+1}n-2^h}\right) \pmod{q^{2^{2k}}} \\ &\equiv \prod_{h,n\geq 1}\left(1-q^{2^{h+1}n-2^h}\right) = \prod_{r\geq 1}\left(1-q^{2r}\right) \pmod{q^{2^{2k}}}. \end{aligned}$$

因为 k 是任意的, $\phi(q) = \prod_{r\geq 1}(1-q^{2r})$. 代回 ϕ 的定义便得到三重积

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} q^{n^2}\eta^n = \prod_{n\geq 1}\left(1-q^{2n}\right)\left(1+q^{2n-1}\eta\right)\left(1+q^{2n-1}\eta^{-1}\right).$$

按题设代入 $(q,\eta) \rightsquigarrow (q^{3/2}, -q^{-1/2})$, 即所求之

$$\begin{aligned}\sum_{n\in\mathbb{Z}}(-1)^n q^{(3n^2+n)/2} &= \prod_{n\geq 1}(1-q^{3n})(1-q^{3n-2})(1-q^{3n-1}) \\ &= \prod_{n\geq 1}(1-q^n).\end{aligned}$$