目录

第一章 交换环基础

1.1 环与模的基本概念

除非另外说明, 本书所论的环默认为交换环. 此时环的理想不分左右, 环上的模也同样不分左右; 模的纯量乘法统一写作左乘. 零模 $\{0\}$ 和零理想常简写为 0. 由环中元素 $a, b, \ldots$ 生成的理想记为 $(a, b, \ldots)$; 能由单个元素生成的理想称为主理想.

同理, 所论的 R-代数也默认交换. 指定 R-代数 S 相当于指定环同态 $R \to S$, 见 [7, 命题 7.1.3]. 若 S 是 R-代数, 有时也借用域论术语, 称 S 为 R 的扩张, 尽管此处不要求同态 $R \to S$ 为单.

本书惯例是以 Fraktur 字体标注环 R 的素理想, 如 $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$ 等; 回忆到理想 $\mathfrak{p}$ 是素理想意谓 $ab \in \mathfrak{p} \iff a \in \mathfrak{p}$ 或 $b \in \mathfrak{p}$. 极大理想总是素理想.

对于任两个理想 $I, J \subset R$, 定义

$$IJ := \{ab : a \in I,\ b \in J\} \text{ 在 } R \text{ 中生成的理想.}$$

理想的积满足结合律 $I(JK) = (IJ)K$. 依此定义 $I^2, I^3, \ldots$ 等, 另规定 $I^0 := R$.

引理 1.1.1 设 $\mathfrak{p}$ 为素理想, I 和 J 为任意理想, 则 $\mathfrak{p} \supset IJ \iff \mathfrak{p} \supset I$ 或 $\mathfrak{p} \supset J$.

证明 方向 $\Longleftarrow$ 平凡. 反之若存在 $a \in I \smallsetminus \mathfrak{p}$ 和 $b \in J \smallsetminus \mathfrak{p}$, 则素理想的定义蕴涵 $ab \in IJ \smallsetminus \mathfrak{p}$. □

对于 R 的理想 I, 商环 $\overline{R} := R/I$ 的理想有如下描述:

$$\begin{aligned} \{\overline{J} \subset \overline{R} : \text{理想}\} &\xleftrightarrow{1:1} \{J \subset R : \text{理想},\ J \supset I\} \\ \overline{J} &\longmapsto J := \overline{J}\ \text{的原像} \\ \overline{J} := J/I &\longleftarrow J. \end{aligned} \tag{1.1.1}$$

此双射对 $\subset$ 严格保序; 此外, J 是素理想 (或极大理想) 当且仅当 $\overline{J}$ 是素理想 (或极大理想). 这些常识见诸 [7, 命题 5.1.11 和 5.3.4]. 以下推论也同样广为人知.

$$\begin{aligned} I\ \text{是素理想} &\iff \overline{R}\ \text{是整环}, \\ I\ \text{是极大理想} &\iff \overline{R}\ \text{是域}. \end{aligned}$$

因此极大理想总是素理想.

给定一族环 $(R_i)_{i\in I}$, 其中 $I \neq \varnothing$, 集合 $\prod_{i\in I} R_i$ 上具有使每个投影映射 $p_j : \prod_{i\in I} R_i \to R_j$ 皆为同态的唯一环结构, 方式是逐坐标地定义环的运算, 我们称环 $\prod_{i\in I} R_i$ 为 $(R_i)_{i\in I}$ 的直积.

环 R 中任何一族理想的交与和仍是理想, 空交定义为 R, 空和定义为 0.

定理 1.1.2 (中国剩余定理) 设 $I_1, \ldots, I_n$ 为 R 的理想, 满足 $i \neq j \implies I_i + I_j = R$, 则有环同构

$$\begin{aligned} R/\bigcap_{i=1}^{n} I_i &\xrightarrow{\sim} \prod_{i=1}^{n} R/I_i \\ r + \bigcap_{i=1}^{n} I_i &\mapsto (r + I_i)_{i=1}^{n}. \end{aligned}$$

证明 见 [7, 定理 5.5.2]. □

下面称为素避性质的结论在一些场合颇为有用, 相关条件的必要性将在本章习题说明.

命题 1.1.3 (素避性质) 设 I 和 $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_r$ 为环 R 的理想, 其中 $r \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$, 满足 $I \subset \bigcup_{i=1}^{r} \mathfrak{p}_i$. 设

(a) 或者 R 包含一个无穷域 F,

(b) 或者 $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_r$ 中至多仅有两个非素理想.

则存在 $1 \leq i \leq r$ 使得 $I \subset \mathfrak{p}_i$.

证明 先设 (a) 成立. 此时 R 是 F-向量空间, 而其理想都是子空间. 由于无穷域上的向量空间无法表作有限多个真子空间之并 (这一事实留作本章带提示的习题), 存在 i 使得 $I \subset \mathfrak{p}_i$.

以下设 (b) 成立. 我们对 r 递归地论证若 I 和满足条件 (b) 的 $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_r$ 给定, 且 $I \not\subset \mathfrak{p}_i$ 对所有 i 成立, 则 $I \not\subset \bigcup_i \mathfrak{p}_i$. 平凡的情形是 $r = 1$. 设 $r \geq 2$, 则对每个 i 可以取到 $x_i \in I \smallsetminus \bigcup_{j \neq i} \mathfrak{p}_j$. 假若 $I \subset \bigcup_{j=1}^r \mathfrak{p}_j$, 则 $x_i \in \mathfrak{p}_i$ 将对每个 i 皆成立.

在上述假设下, 若 $r = 2$ 则推得 $x_1 + x_2 \notin \mathfrak{p}_1 \cup \mathfrak{p}_2$, 但 $x_1 + x_2 \in I$, 矛盾. 若 $r > 2$, 不妨假设 $\mathfrak{p}_1$ 为素理想, 此时

$$x_1 + \prod_{j=2}^{r} x_j \notin \bigcup_{i=1}^{n} \mathfrak{p}_i,$$

仍然矛盾. □

全体 R-模构成一个 Abel 范畴 R-Mod; 关于 Abel 范畴的完整讨论可见 [8, 第二章]. 对于 R-模同态 $\varphi : M \to N$, 因而有核 $\ker(\varphi)$, 像 $\operatorname{im}(\varphi)$ 及余核 $\operatorname{coker}(\varphi)$ 的概念, 它们都有基于范畴论的描述; 进一步, 还能谈论由 R-模构成的复形 $\cdots \to M^n \to M^{n+1} \to \cdots$ 与正合列的概念.

对于任意集合 I 和 R-模 M, 以 $M^{\oplus I}$ 表示 I 份 M 的直和; 特别地, $R^{\oplus I}$ 是以 I 为标准基的自由 R-模. 关于自由模及其秩的概念可参阅 [7, §6.3].

对于 R-模 M 和 N, 其间的同态集 $\operatorname{Hom}(M, N) := \operatorname{Hom}_R(M, N)$ 有自然的 R-模结构, 其加法和纯量乘法分别是

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x), \quad (rf)(x) = r \cdot f(x),$$
$$f, g \in \operatorname{Hom}(M, N), \; x \in M, \; r \in R.$$

注意到有 R-模的典范同构 $\operatorname{Hom}(R, M) \xrightarrow{\sim} M$, 映 f 为 $f(1)$.

注记 1.1.4 全体 R-模并不构成集合, 而只是一个真类. 为了理解 R-Mod, 第一种进路是容许范畴的对象仅构成一个类, 如 [9, 附录 B]; 第二种进路是沿用 [7, 8] 的范畴论框架, 选定 Grothendieck 宇宙 $\mathcal{U}$ 并要求 R-模建立在 $\mathcal{U}$-集上 [7, 定义 2.1.3]; 第三种进路是在具体场景中限定 R-模的基数, 此处不论. 直和涉及的下标集也应当相应地取遍一个给定的集合 (进路一) 或 $\mathcal{U}$-集 (进路二).

给定范畴 I, 如果其对象构成集合 $\operatorname{Ob}(I)$ 而非真类 (进路一), 或者 $\operatorname{Ob}(I)$ 是 $\mathcal{U}$-小集, 亦即和某个 $\mathcal{U}$-集等势 (进路二), 则称 I 是小范畴. 由于范畴在本章仅是一种修辞, 不涉及进阶操作, 在真类的基础上理解范畴毫无窒碍, 故今后不多纠结于集合论问题.

给定小范畴 I 和函子 $\alpha : I \to R$-Mod, 可以构造相应的 $\varinjlim \alpha$ 和 $\varprojlim \alpha$. 对于 $\varprojlim$, 习惯上也常以 I^{op} 代 I, 将所论的函子写作 $\beta : I^{\mathrm{op}} \to R$-Mod 的形式. 根据 [7, §6.2], 它们有以下的明确构造.

◇ 对于 $\varinjlim \alpha$, 先取直和 $\bigoplus_{i \in \operatorname{Ob}(I)} \alpha(i)$, 将每个 $\alpha(j)$ 视同 $\bigoplus_i \alpha(i)$ 的子模, 然后记它对形如

$$x_i - \alpha(f)(x_i), \quad f \in \operatorname{Hom}_I(i, j), \; x_i \in \alpha(i)$$

的元素生成的子模之商为 $\varinjlim \alpha$, 则对每个 $i \in \operatorname{Ob}(I)$ 都有自明的同态 $\iota_i : \alpha(i) \to \varinjlim \alpha$, 这些资料满足 $\varinjlim$ 所需的泛性质.

◇ 对于 $\varprojlim \beta$, 先取直积 $\prod_{i\in \mathrm{Ob}(I)} \beta(i)$, 然后记满足

$$\beta(f)(x_j) = x_i, \quad f \in \mathrm{Hom}_I(i,j)$$

的元素 $(x_i)_{i\in\mathrm{Ob}(I)}$ 所成之子模为 $\varprojlim \beta$, 则对每个 $i \in \mathrm{Ob}(I)$ 都有自明的投影同态 $p_i : \varprojlim \beta \to \beta(i)$, 这些资料满足 $\varprojlim$ 所需的泛性质.

若将 $\alpha(i)$ (或 $\beta(i)$) 写作 M_i, 则上述构造又记为 $\varinjlim_i M_i$ (或 $\varprojlim_i M_i$).

通过环本身的加法和乘法, R 本身也自然地成为 R-模, 其子模无非是理想.

约定 1.1.5 对所有理想 $I \subset R$ 和 R-模 M, 记 IM 为形如 ax 的元素生成的子模, 其中 $a \in I$ 而 $x \in M$. 若 $a \in R$ 而 $I = (a)$, 则简记 $(a)M$ 为 aM.

两个理想的乘积 IJ 不过是约定 1.1.5 的特例. 对一般的 M, 商模 M/IM 不仅是 R-模, 还自然地成为 R/I-模, 这是因为 I 在 M/IM 上的纯量乘法恒为零.

给定 R-模 M 和 $x \in M$, 定义 R 的理想

$$\mathrm{ann}(x) = \mathrm{ann}_R(x) := \{a \in R : ax = 0\}, \tag{1.1.2}$$

则 $x = 0 \iff \mathrm{ann}(x) = R$. 类似地, 对 M 本身定义理想

$$\begin{aligned} \mathrm{ann}(M) = \mathrm{ann}_R(M) &:= \{a \in R : aM = 0\} \\ &= \bigcap_{x\in\Sigma} \mathrm{ann}(x), \end{aligned} \tag{1.1.3}$$

其中 Σ 意谓任何一个生成 M 的子集, 则同样有 $M = 0 \iff \mathrm{ann}(M) = R$.

若对所有 $x \in M \smallsetminus \{0\}$ 皆有 $\mathrm{ann}(x) = 0$, 则称 M **无挠**. 在必须强调 R 的场合, 也记 $\mathrm{ann}(\cdots)$ 为 $\mathrm{ann}_R(\cdots)$.

定义 1.1.6 (忠实模) 如果 R-模 M 满足 $\mathrm{ann}(M) = 0$, 则称 M 为忠实 R-模.

定义 1.1.7 (零因子) 对任意 R-模 M 和 $r \in R$, 如果存在 $x \in M \smallsetminus \{0\}$ 使得 $rx = 0$, 则称 r 为 M 的零因子.

因此 M 的零因子集是 $\bigcup_{x\in M\smallsetminus\{0\}} \mathrm{ann}(x)$. 如取 $M = R$, 便回归环中零因子的原始定义, 见 [7, §5.2].

1.2 从幂等元到直和分解

本节探讨的环容许非交换.

定义 1.2.1 任意环 A 的元素 e 若满足 $e^2 = e$, 则称之为 A 的**幂等元**; 如果进一步要求 e 属于 A 的中心, 则称为**中心幂等元**.

若 $e \in A$ 是幂等元 (或中心幂等元), 则 $1-e$ 亦然, 而且 $e(1-e)=0$. 推而广之, 设有 $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ 和一列元素 $e_1, \ldots, e_n$, 我们将考虑以下性质:

E.1 每个 e_i 皆是幂等元: $e_i^2 = e_i$,

E.2 正交性: $i \neq j \implies e_i e_j = 0$,

E.3 $e_1 + \cdots + e_n = 1$.

接着考虑左 A-模 M, 模论常识 [7, 命题 6.12.4] 表明有双射

$$\begin{gathered} \left\{ \text{直和分解 } M = M_1 \oplus \cdots \oplus M_n \right\} \\ \Big\updownarrow {\scriptstyle 1:1} \\ \left\{ e_1, \ldots, e_n \in \mathrm{End}_A(M), \text{ 满足 } \mathbf{E.1}\text{—}\mathbf{E.3} \right\}; \end{gathered}$$

更精确地说, e_i 对应到直和分解的投影同态 $p_i : M \to M_i$ 与包含同态 $\iota_i : M_i \to M$ 之合成. 对右 A-模也有类似结论.

以下在环的层次讨论分解. 设 e 为环 A 的中心幂等元, 则 eA 相对于 A 的加法和乘法运算成为环, 以 e 为幺元 (注意: eA 并非含幺环 A 的子环).

若有环同构 $A_1 \times A_2 \xrightarrow{\sim} A$, 则 $(1,0) \in A_1 \times A_2$ (或 $(0,1) \in A_1 \times A_2$) 对其之像 e_1 (或 e_2) 是 A 的中心幂等元, 它们满足 **E.1**—**E.3**, 而 $e_1 A$ (或 $e_2 A$) 通过同构等同于 $A_1 \times \{0\}$ (或 $\{0\} \times A_2$); 更多项的直积 $A_1 \times \cdots \times A_n$ 也是类似的.

以下是反向的结论.

命题 1.2.2 设 $e \in A$ 为中心幂等元, 按以上方式定义环 eA 和 $(1-e)A$, 则有环同构

$$\begin{aligned} A &\xrightarrow{\sim} eA \times (1-e)A \\ a &\longmapsto (ea, (1-e)a), \end{aligned}$$

它映 e 为 $(1_{eA}, 0)$, 映 $1-e$ 为 $(0, 1_{(1-e)A})$.

推而广之, 给定一列满足 **E.1**—**E.3** 的中心幂等元 $e_1, \ldots, e_n \in A$, 则有映 e_i 为 $(0, \ldots, e_i, \ldots, 0)$ 的环同构

$$\begin{aligned} A &\xrightarrow{\sim} \textstyle\prod_{i=1}^n e_i A \\ a &\longmapsto (e_1 a, \ldots, e_n a). \end{aligned}$$

证明 由于 e 和 $1-e$ 皆是中心幂等元, 所示映射保持加法和乘法; 此外 1_A 的像 $(e, 1-e)$ 是右侧的幺元, 由此得到环同态; e 与 $1-e$ 的像容易描述.

若 $ea = 0 = (1-e)a$, 则 $a = ea + (1-e)a = 0$, 故同态为单. 给定 $x, y \in A$, 取 $a = ex + (1-e)y$, 则 $ea = ex$ 而 $(1-e)a = (1-e)y$, 故同态为满.

对于一般情形, 设 $n \geq 2$; 注意到条件蕴涵 $1 - e_1 = e_2 + \cdots + e_n$ 是 A 的中心幂等元, 而且当 $2 \leq i \leq n$ 时 $e_i = (e_2 + \cdots + e_n)e_i$ 是环 $(e_2 + \cdots + e_n)A$ 的中心幂等元, 故可用 $n = 2$ 的情形递归地推导. $\square$

命题 1.2.3 设 $A = A_1 \times \cdots \times A_n$, 相应地有中心幂等元 $e_1, \ldots, e_n \in A$; 此时有保序双射

$$\begin{aligned} \{I \subset A : \text{左理想}\} &\xleftrightarrow{1:1} \{(I_1, \ldots, I_n) : \forall i,\ I_i \subset A_i \text{ 左理想}\} \\ I &\longmapsto (e_1 I, \ldots, e_n I) \\ I_1 \times \cdots \times I_n &\longleftarrow (I_1, \ldots, I_n). \end{aligned}$$

将左理想换成右理想或双边理想, 结论亦同.

证明 基于中心幂等元 $e_1, \ldots, e_n$ 的性质 **E.1—E.3**, 直接验证双向映射皆有定义, 并且互为逆. □

作为应用, 在 $A_1, \ldots, A_n$ 皆交换的情形, A 的素理想 (或极大理想) 皆形如

$$\mathfrak{p} = \cdots \times \mathfrak{p}_i \times \cdots, \quad 1 \leq i \leq n,$$

其中而 $\mathfrak{p}_i$ 是 A_i 的素理想 (或极大理想), 直积的其它位置摆 A_i.

1.3 张量积

选定环 R. 给定 R-模 M 和 N, 考虑 R-模 L 和映射 $B : M \times N \to L$; 如果 B 对每个变元都是 R-模同态, 则称 B 为 R-双线性的. 全体 R-双线性映射 $B : M \times N \to L$ 所成集合 $\mathrm{Bil}(M, N; L)$ 具有自然的 R-模结构, 其加法是 $(B + B')(x, y) = B(x, y) + B'(x, y)$, 纯量乘法是 $(rB)(x, y) = r \cdot B(x, y)$.

张量积的理论在 [7, §6.5] 有完整说明. 由于此处考虑的是交换环, 表述和证明都有如下简化.

定义–命题 1.3.1 (张量积) 设 M 和 N 为 R-模. 存在 R-模 $M \underset{R}{\otimes} N$ 连同 R-双线性映射 $M \times N \to M \underset{R}{\otimes} N$, 记为 $(x, y) \mapsto x \otimes y$, 使得下述泛性质成立: 对于所有 R-模 L, 我们有 R-模的同构

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}(M \underset{R}{\otimes} N, L) &\xrightarrow{\sim} \mathrm{Bil}(M, N; L) \\ \varphi &\longmapsto [(x, y) \mapsto \varphi(x \otimes y)]. \end{aligned}$$

这便刻画了 $M \underset{R}{\otimes} N$ 连同 $(x, y) \mapsto x \otimes y$, 精确到唯一同构. 不致混淆时, 也记 $M \otimes N := M \underset{R}{\otimes} N$, 称为 M 和 N 的张量积.

证明 考虑自由 R-模 $R^{\oplus(M \times N)}$ 及其中由以下元素生成的子模 $\mathcal{R}$:

$$\begin{gathered} (rx, y) - r(x, y), \quad (x, ry) - r(x, y), \quad r \in R, \\ (x + x', y) - (x, y) - (x', y), \quad (x, y + y') - (x, y) - (x, y'). \end{gathered}$$

定义 $M \underset{R}{\otimes} N := R^{\oplus(M\times N)}/\mathcal{R}$. 从 $\mathcal{R}$ 的定义可见 $(x,y) \mapsto x\otimes y := (x,y)+\mathcal{R}$ 给出 R-双线性映射 $M\times N \to M \underset{R}{\otimes} N$.

基于自由模的泛性质, 指定映射 $B : M\times N \to L$ 相当于指定 R-模同态 $R^{\oplus(M\times N)} \to L$; 双线性性质等价于说该映射通过商模分解为 $M \underset{R}{\otimes} N \to L$. 此即所求泛性质.

此泛性质相当于说在所有 R-模 L 连同 R-双线性映射 $M\times N \to L$ 所成的范畴中, $M\times N \to M \underset{R}{\otimes} N$ 是始对象. 这就刻画了张量积, 精确到唯一的同构. □

任何 R-模 M 都能通过 $rxr' := rr'x$ 成为 (R,R)-双模, 其中 $r, r' \in R$ 而 $x\in M$. 借此, 上述泛性质也能理解为双模张量积的一则特例, 见 [7, 注记 6.5.10].

读者对张量积的操作应有基本认知, 至少须知悉以下性质:

▷ **结合约束** $M\otimes(N\otimes P) \xrightarrow{\sim} (M\otimes N)\otimes P$, 同构由 $x\otimes(y\otimes z)\mapsto(x\otimes y)\otimes z$ 确定;

▷ **幺约束** $R\otimes M \xrightarrow{\sim} M \xleftarrow{\sim} M\otimes R$, 同构由 $r\otimes x \mapsto rx \mapsfrom x\otimes r$ 确定;

▷ **交换约束** $M\otimes N \xrightarrow{\sim} N\otimes M$, 同构由 $x\otimes y\mapsto y\otimes x$ 确定;

▷ **保持直和** $(\bigoplus_{i\in I} M_i)\otimes N \xrightarrow{\sim} \bigoplus_{i\in I} M_i\otimes N$ 而 $M\otimes(\bigoplus_{j\in J} N_j) \xrightarrow{\sim} \bigoplus_{j\in J} M\otimes N_j$, 其中的下标集 I 和 J 任意, 同构的映法是 $(\sum_i x_i)\otimes y \mapsto \sum_i x_i\otimes y$ 和 $x\otimes(\sum_j y_j)\mapsto \sum_j x\otimes y_j$.

▷ **保持余核** 若 $N' \to N \to N'' \to 0$ 是 R-模的正合列, 则 $M\otimes N' \to M\otimes N \to M\otimes N'' \to 0$ 亦然.

▷ **保持 $\varinjlim$** 前两条性质的结合给出 $M\otimes \varinjlim_i N_i \simeq \varinjlim_i M\otimes N_i$, 这是因为从直和及余核能构造一般的 $\varinjlim$.

基于结合约束, 可以不加括号地写下多元张量积 $M_1\otimes\cdots\otimes M_n$, 或者直接用 n 重 R-线性映射和泛性质予以刻画. 这些性质都是 [7, §6.5] 关于双模的一般理论在交换环情形的特例, 也可以按照同构的描述直接检验. 按此定义 M 的张量幂

$$\begin{aligned} M^{\otimes n} &:= \underbrace{M\otimes\cdots\otimes M}_{n\ \text{项}}, \quad n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}, \\ M^{\otimes 0} &:= R. \end{aligned} \tag{1.3.1}$$

同态模和张量积的构造都具有函子性, 两者由以下的伴随同构相联系.

命题 1.3.2 设 M, N, A 为 R-模, 则有 R-模的典范同构

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}(M\otimes N, A) &\xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(M, \mathrm{Hom}(N, A)) \\ \varphi &\longmapsto [x\mapsto[y\mapsto\varphi(x\otimes y)]]; \end{aligned}$$

证明 所求同构不过是 [7, 定理 6.6.5] 在交换环情形的应用, 但直接验证更为简单: 根据定义–命题 1.3.1, 指定同态 $\varphi: M \otimes N \to A$ 相当于指定 R-双线性映射 $B: M \times N \to A$, 两者的联系是 $B(x,y) = \varphi(x \otimes y)$, 然而基于双线性映射和 Hom-模结构的定义, 指定 B 又相当于由指定 $x \mapsto [y \mapsto B(x,y)]$ 确定的同态 $M \to \operatorname{Hom}(N, A)$. 由此得到双射

$$\operatorname{Hom}(M \otimes N, A) \xleftrightarrow{1:1} \operatorname{Bil}(M, N; A) \xleftrightarrow{1:1} \operatorname{Hom}(M, \operatorname{Hom}(N, A)),$$

易见每一段都保持加法和 R 的纯量乘法. $\square$

张量积函子 $R\text{-Mod} \times R\text{-Mod} \to R\text{-Mod}$ 连同之前回顾的性质使得 $(R\text{-Mod}, \otimes)$ 成为以 R 为幺对象的**对称幺半范畴**, 详见 [7, 推论 6.5.15]. 命题 1.3.2 的伴随关系蕴涵 $(R\text{-Mod}, \otimes)$ 还是闭幺半范畴 [8, 定义 7.3.1], 但本书不需要这一结论.

给定环同态 $\varphi: R \to S$, 借此将每个 S-模上的纯量乘法拉回到 R, 便有相应的忘却函子

$$\mathcal{F}_{R \to S}: S\text{-Mod} \to R\text{-Mod}.$$

另一方面, S 也通过纯量乘法 $rs := \varphi(r)s$ 成为 R-模. 于是对所有 R-模 M, 张量积 $S \underset{R}{\otimes} M$ 有意义; 它不仅是 R-模, 还按照

$$s(s' \otimes x) = ss' \otimes x, \quad s, s' \in S, \ x \in M$$

升级为 S-模; 更严格地说, s 的纯量乘法是对 $(s', x) \mapsto ss' \otimes x$ 给出的 R-双线性映射 $B_s: S \times M \to S \otimes M$ 应用泛性质 (定义–定理 1.3.1) 的产物.

若 $f: M_1 \to M_2$ 是 R-模同态, 则纯量乘法的以上描述导致 $\mathrm{id} \otimes f: S \underset{R}{\otimes} M_1 \to S \underset{R}{\otimes} M_2$ 是 S-模同态. 综上, $M \mapsto S \underset{R}{\otimes} M$ 给出函子

$$S \underset{R}{\otimes} (\cdot): R\text{-Mod} \to S\text{-Mod},$$

称为**环的变换**, 它显然是加性函子. 此外 $S \underset{R}{\otimes} (\cdot)$ 保持张量积, 体现为典范同构

$$\begin{aligned} (S \underset{R}{\otimes} M_1) \underset{S}{\otimes} (S \underset{R}{\otimes} M_2) &\xrightarrow{\sim} S \underset{R}{\otimes} (M_1 \underset{R}{\otimes} M_2), & S \underset{R}{\otimes} R &\xrightarrow{\sim} S \\ (s_1 \otimes x_1) \otimes (s_2 \otimes x_2) &\mapsto s_1 s_2 \otimes (x_1 \otimes x_2), & s \otimes r &\mapsto s\varphi(r). \end{aligned} \tag{1.3.2}$$

上述同构和 R-模与 S-模对张量积的结合约束与幺约束兼容. 扼要的说法是 $S \underset{R}{\otimes} (\cdot)$ 给出 [7, 定义 3.1.7] 所谓的**幺半函子**; 详见 [7, 命题 6.6.10]. 此外它还兼容于交换约束:

$$\begin{tikzcd} \left(S \underset{R}{\otimes} M_1\right) \underset{S}{\otimes} \left(S \underset{R}{\otimes} M_2\right) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "\wr"'] & S \underset{R}{\otimes} \left(M_1 \underset{R}{\otimes} M_2\right) \arrow[d, "\wr"] \\ \left(S \underset{R}{\otimes} M_2\right) \underset{S}{\otimes} \left(S \underset{R}{\otimes} M_1\right) \arrow[r, "\sim"'] & S \underset{R}{\otimes} (M_2 \otimes M_1) \end{tikzcd} \tag{1.3.3}$$

是交换图表; 按 [8, 定义 7.1.14] 的术语, $S \underset{R}{\otimes} (\cdot)$ 是对称幺半范畴之间的**辫幺半函子**. 这一切证明不过是例行公事.

关于张量积的以下性质都包含于 [7, §6.6], 但直接论证毫不费力.

命题 1.3.3 给定同态 $R \to S$, 设 M 为 R-模, N 为 S-模, 则有典范双射

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_S\left(S \underset{R}{\otimes} M, N\right) &\xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_R\left(M, \mathcal{F}_{R\to S} N\right) \\ \Psi &\longmapsto [x \mapsto \Psi(1 \otimes x)] \\ [s \otimes x \mapsto s\psi(x)] &\longleftarrow\!\shortmid\ \psi, \end{aligned}$$

其中 $x \in M$ 而 $s \in S$. 这使得 $S \underset{R}{\otimes} (\cdot) : R\text{-}\mathsf{Mod} \rightleftarrows S\text{-}\mathsf{Mod} : \mathcal{F}_{R\to S}$ 按此成为伴随对.

若以 $\mathcal{F}_{R\to S}$ 将 $\mathrm{Hom}_S\left(S \underset{R}{\otimes} M, N\right)$ 视为 R-模, 则上述双射还是 R-模的同构.

证明 直接验证双向的映射良定义, 互逆, 并且是 R-线性的. □

留意到伴随对的单位态射 $M \to \mathcal{F}_{R\to S}(S \underset{R}{\otimes} M)$ 是 $x \mapsto 1 \otimes x$, 余单位态射 $S \underset{R}{\otimes} \mathcal{F}_{R\to S}(N) \to N$ 是 $s \otimes y \mapsto sy$.

注记 1.3.4 对任意 R-模 M_1 和 M_2, 函子性给出典范 R-模同态

$$\mathrm{Hom}_R(M_1, M_2) \to \mathrm{Hom}_S\left(S \underset{R}{\otimes} M_1, S \underset{R}{\otimes} M_2\right), \quad f \mapsto \mathrm{id} \otimes f.$$

诚然, 它显然保持加法; 对所有 $r \in R$ 和 $f \in \mathrm{Hom}_R(M_1, M_2)$, 考虑 rf 在右式中的像, 它映 $s \otimes x$ 为 $s \otimes rf(x) = \varphi(r)s \otimes x$, 这正是 $s \otimes x$ 在 $r(\mathrm{id} \otimes f)$ 之下的像. 因此映射是 R-线性的.

对同态两边的 Hom-模应用命题 1.3.3, 便得到典范 S-模同态

$$\begin{gathered} \Xi_{M_1, M_2} : S \underset{R}{\otimes} \mathrm{Hom}_R(M_1, M_2) \to \mathrm{Hom}_S\left(S \underset{R}{\otimes} M_1, S \underset{R}{\otimes} M_2\right) \\ s \otimes f \mapsto s(\mathrm{id} \otimes f). \end{gathered}$$

一般而言 Ξ_{M_1, M_2} 未必是同构, 命题 5.2.3 将探讨这一问题.

命题 1.3.5 给定环同态 $R \xrightarrow{\varphi} S$ 和 $S \xrightarrow{\theta} T$, 我们有 $\mathcal{F}_{R\to S}\mathcal{F}_{S\to T} = \mathcal{F}_{R\to T}$; 另一方面, 也有典范同构

$$\begin{aligned} T \underset{S}{\otimes} (S \underset{R}{\otimes} M) &\xrightarrow{\sim} T \underset{R}{\otimes} M \\ t \otimes (s \otimes x) &\longmapsto t\theta(s) \otimes x \\ x \otimes (1 \otimes x) &\longleftarrow\!\shortmid\ t \otimes x \end{aligned}$$

证明 由定义立见 $\mathcal{F}_{R\to S}\mathcal{F}_{S\to T}=\mathcal{F}_{R\to T}$. 至于 $T\underset{S}{\otimes}(S\underset{R}{\otimes}M)\simeq T\underset{R}{\otimes}M$, 既可以从写下的映法直接验证, 也能从命题 1.3.3 的伴随关系加以解释, 这是因为合成函子的左或右伴随可以分段取. $\square$

命题 1.3.6 给定环同态 $R\to S$, 对所有 R-模 M 和 S-模 N 都有 R-模的典范同构

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_{R\to S}(N)\underset{R}{\otimes}M &\xrightarrow{\sim}\mathcal{F}_{R\to S}\left(N\underset{S}{\otimes}(S\underset{R}{\otimes}M)\right)\\ y\otimes x &\mapsto y\otimes(1\otimes x).\end{aligned}$$

证明 右式等同于 $\mathcal{F}_{R\to S}\left((N\underset{S}{\otimes}S)\underset{R}{\otimes}M\right)$; 此处视中间的 S 为 (S,R)-双模来取张量积, 同时用到双模张量积的结合约束 [7, 命题 6.5.12]. 然而幺约束给出 S-模同构 $N\xrightarrow{\sim}N\underset{S}{\otimes}S$, 映 y 为 $y\otimes 1$. $\square$

由于 $\mathcal{F}_{R\to S}$ 是一种比较简单的操作, 本书将经常省略这一符号, 仅在必须突出 R-模和 S-模的差异时方予标记.

以下说明当理想 I 给定, 约定 1.1.5 的函子 $M\mapsto M/IM$ 同构于商同态 $R\to R/I$ 给出的 $(R/I)\underset{R}{\otimes}(\cdot)$.

命题 1.3.7 取定理想 I 和 R-模 M, 则有 R/I-模的典范同构

$$\begin{aligned}(R/I)\underset{R}{\otimes}M &\xrightarrow{\sim}M/IM\\ (r+I)\otimes x &\mapsto rx+IM.\end{aligned}$$

证明 一种方法是应用张量积保持余核的性质, 以下介绍基于伴随函子的方法. 给定 R/I-模 N, 任何 R-模同态 $M\to N$ 限制在 IM 上总是零, 故商模的泛性质给出典范同构 $\mathrm{Hom}_{R/I}(M/IM,N)\xrightarrow{\sim}\mathrm{Hom}_R(M,N)$. 这表明 $M\mapsto M/IM$ 是 $\mathcal{F}_{R\to R/I}$ 的左伴随, 其单位态射是 $\mathrm{id}_{M/IM}$ 所对应的 $q:M\to M/IM$, 亦即商同态.

对照命题 1.3.3 的伴随关系, 立得典范同构 $\Psi:(R/I)\underset{R}{\otimes}M\xrightarrow{\sim}M/IM$; 为了明确 Ψ, 只须在该处的伴随关系中用 q 代入 ψ, 相应的 Ψ 具体写作 $\Psi((r+I)\otimes x)=(r+I)q(x)=rx+IM$. $\square$

1.4 投射模和内射模

投射模和内射模属于模论的基本概念, [7, §6.9] 定义了任意环 (容许非交换) 上的投射模和内射模, [8, §2.8] 则推及任意 Abel 范畴. 本节将对交换环的特例摘录若干定义和初步性质.

定义 1.4.1 (投射模和内射模) 今后设 R 为交换环.

◇ 设 P 为 R-模. 若 $\mathrm{Hom}_R(P,\cdot): R\text{-}\mathsf{Mod} \to R\text{-}\mathsf{Mod}$ 保持所有正合列, 则称 P 为投射的.

◇ 设 I 为 R-模. 若 $\mathrm{Hom}_R(\cdot,I): R\text{-}\mathsf{Mod}^{\mathrm{op}} \to R\text{-}\mathsf{Mod}$ 保持所有正合列, 则称 I 为投射的.

保持所有正合列的函子在 [8, 定义 2.8.3] 中被称为**正合函子**, 等价的刻画是它们保持有限 $\varinjlim$ 和有限 $\varprojlim$.

举例明之, R 本身是投射模, 这是因为 $\mathrm{Hom}_R(R,\cdot)$ 同构于 R-Mod 到自身的恒等函子, 当然正合.

引理 1.4.2 给定一族 R-模 $(M_i)_{i\in I}$, 则 $\bigoplus_{i\in I} M_i$ (或 $\prod_{i\in I} M_i$) 投射 (或内射) 当且仅当每个 M_i 皆然.

证明 见 [7, 引理 6.9.5]. □

命题 1.4.3 对于 R-模 P, 以下陈述等价;

(i) P 是投射模;

(ii) 函子 $\mathrm{Hom}_R(P,\cdot)$ 保余核;

(iii) 对每个正合列 $M \to M'' \to 0$ 和同态 $P \to M''$, 下图可以补入虚线箭头使得全图交换

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, dashed, "\exists"'] \arrow[d] & \\ M \arrow[r] & M'' \arrow[r] & 0; \end{tikzcd}$$

进一步, 上述条件蕴涵

(iv) 形如 $0 \to M' \to M \to P \to 0$ 的正合列皆可裂.

对于 R-模 I, 以下陈述等价:

(i)' I 是内射模;

(ii)' 函子 $\mathrm{Hom}_R(\cdot,I)$ 保核;

(iii)' 对每个正合列 $0 \to M' \to M$ 和同态 $M' \to I$, 下图可以补入虚线箭头使得全图交换

$$\begin{tikzcd} & I & \\ M \arrow[ur, dashed, "\exists"] & M' \arrow[l] \arrow[u] & 0 \arrow[l]; \end{tikzcd}$$

进一步, 上述条件蕴涵

(iv)' 形如 $0 \to I \to M \to M'' \to 0$ 的正合列皆可裂.

证明 见于 [7, §6.9], 重述如下.

(i) $\implies$ (ii). 平凡.

(ii) $\implies$ (iii). 命 $M' := \ker[M \to M'']$. 从 $M'' \simeq \operatorname{coker}[M' \to M]$ 可将 $\operatorname{Hom}_R(P, M'')$ 等同于 $\operatorname{coker}[\operatorname{Hom}_R(P, M') \to \operatorname{Hom}_R(P, M)]$, 特别地, $\operatorname{Hom}_R(P, M) \to \operatorname{Hom}_R(P, M'')$ 为满射. 取 $P \to M''$ 的任意原像即所求箭头.

(iii) $\implies$ (i). 对所有短正合列 $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$, 相应的 $0 \to \operatorname{Hom}_R(P, M') \to \operatorname{Hom}_R(P, M) \to \operatorname{Hom}_R(P, M'')$ 正合, 而 (iii) 蕴涵其最后一段是满射, 因此 $\operatorname{Hom}_R(P, \cdot)$ 保短正合列. 因为正合列能拆解成短正合列, 故 P 是投射模.

(iii) $\implies$ (iv). 存在同态 $P \to M$ 使得 $P \to M \to P$ 合成为 id_P, 这表明 $M \to P$ 有右逆, 使 $0 \to M' \to M \to P \to 0$ 分裂.

对于 (i)' — (iv)' 的处理方式是对偶的. □

推论 1.4.4 设 P 为 R-模, 则 P 为投射模当且仅当它同构于某个自由模 F 的一个直和项; 若要求 P 为由给定的子集 $\mathcal{S}$ 生成的投射 R-模, 则可取到 $F := R^{\oplus \mathcal{S}}$.

证明 设 P 同构于某个自由 R-模 F 的直和项, 则因为 R 已知是投射模, 引理 1.4.2 说明 F 是投射模, 其直和项也是投射模.

设 P 为投射 R-模, 取子集 $\mathcal{S}$ 使之生成 P, 相应地有正合列 $0 \to M' \to R^{\oplus \mathcal{S}} \to P \to 0$. 命题 1.4.3 蕴涵其可裂, 因而 P 同构于 $R^{\oplus \mathcal{S}}$ 的直和项. □

推论 1.4.5 设有 R-模的正合列 $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$. 若 M' 和 M'' 皆投射 (或自由), 则 M 亦然.

证明 由于 M'' 是投射模, 命题 1.4.3 (iv) 给出 $M \simeq M' \oplus M''$. 应用引理 1.4.2. □

命题 1.4.6 设 $\varphi : R \to S$ 为环同态, 则 φ 诱导的函子 $S \underset{R}{\otimes} (\cdot) : R\text{-Mod} \to S\text{-Mod}$ 映投射模为投射模.

证明 此函子保直和, 映 R 为 S, 故映自由模为自由模, 因而映自由模的直和项为自由模的直和项. 代入推论 1.4.4.

另一种看法则基于命题 1.3.3: 函子 $S \underset{R}{\otimes} (\cdot)$ 是 $\mathcal{F}_{R \to S} : S\text{-Mod} \to R\text{-Mod}$ 的左伴随, 而 $\mathcal{F}_{R \to S}$ 显然正合, 故 $S \underset{R}{\otimes} (\cdot)$ 映投射对象为投射对象 [8, 命题 2.8.17]. □

约定 1.4.7 本书将链复形记如 $X_\bullet = [\cdots \to X_n \xrightarrow{d_n} X_{n-1} \to \cdots]$ 之形, 将上链复形记如 $X^\bullet = [\cdots \to X^n \xrightarrow{d^n} X^{n+1} \to \cdots]$ 之形; 两者只是记法不同, 按 $X^n = X_{-n}$ 和 $d^n = d_{-n}$ 相互切换. 同态 d_n 和 d^n 经常省略, 但在必要时也以 d_n^X 和 d_X^n 的记法强调 $X_\bullet$ 或 $X^\bullet$ 的角色.

定义–命题 1.4.8 (投射解消, 自由解消和内射解消) 考虑 R-模 M.

(i) 形如

$$\cdots \to P_2 \to P_1 \to P_0 \to M \to 0,$$

而且每个 P_i 皆为投射模的正合列称为 M 的投射解消, 简记为 $P_\bullet \to M \to 0$; 若进一步要求每个 P_i 皆为自由模, 则称之为自由解消. 对于 $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, 若 $P_{n+1} = P_{n+2} = \cdots = 0$, 则称此解消的长度 $\leq n$.

(ii) 形如

$$0 \to M \to I^0 \to I^1 \to I^2 \to \cdots,$$

而且每个 I^i 皆为内射模的正合列称为 M 的投射解消, 简记为 $0 \to M \to I^\bullet$. 对于 $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, 若 $I^{n+1} = I^{n+2} = \cdots = 0$, 则称此解消的长度 $\leq n$.

任意 R-模 M 总有自由解消, 也有内射解消.

证明 任意 R-模 M 总有自由解消: 先取自由模 P_0 连同满同态 $P_0 \twoheadrightarrow M$, 再取自由模 P_1 连同满同态 $P_1 \twoheadrightarrow \ker[P_0 \to M]$, 依此类推.

任意 R-模 M 总有内射解消: 根据 [7, 定理 6.9.14] 可取到内射模 I^0 连同单同态 $M \hookrightarrow I^0$, 同理可取内射模 I^1 连同单同态 $\operatorname{coker}[M \to I^0] \hookrightarrow I^1$, 依此类推. $\square$

注记 1.4.9 投射解消有以下的唯一性: 设 $P_\bullet \to M \to 0$ 和 $Q_\bullet \to M \to 0$ 为 M 的投射解消, 则存在交换图表

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & P_2 \arrow[r] \arrow[d, "\beta_2"] & P_1 \arrow[r] \arrow[d, "\beta_1"] & P_0 \arrow[r] \arrow[d, "\beta_0"] & M \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
\cdots \arrow[r] & Q_2 \arrow[r] & Q_1 \arrow[r] & Q_0 \arrow[r] & M \arrow[r] & 0,
\end{tikzcd}$$

而且链复形之间的态射 $\beta = (\beta_i)_{i\geq 0} : P_\bullet \to Q_\bullet$ 精确到同伦是唯一的.

对偶地, 设 $0 \to M \to I^\bullet$ 和 $0 \to M \to J^\bullet$ 为 M 的内射解消, 则存在交换图表

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M \arrow[r] & I^0 \arrow[r] & I^1 \arrow[r] & I^2 \arrow[r] & \cdots \\
0 \arrow[r] & M \arrow[r] \arrow[u, equal] & J^0 \arrow[r] \arrow[u, "\beta^0"'] & J^1 \arrow[r] \arrow[u, "\beta^1"'] & J^2 \arrow[r] \arrow[u, "\beta^2"'] & \cdots
\end{tikzcd}$$

而上链复形之间的态射 $\beta = (\beta^i)_{i\geq 0} : I^\bullet \to J^\bullet$ 精确到同伦是唯一的. 详见 [8, 定理 3.11.5].

1.5 有限生成模与有限展示模

设 M 为 R-模. 根据自由模的泛性质, 指定 M 的一组元素 $(x_i)_{i\in I}$ 相当于指定模同态 $R^{\oplus I}\to M$, 后者映 $(r_i)_{i\in I}$ 为有限和 $\sum_{i\in I} r_i x_i$. 元素族 $(x_i)_{i\in I}$ 生成 M 相当于说此同态为满.

对给定的满同态 $R^{\oplus I}\to M$, 其核 K 记录了生成元之间的所有线性关系; 进一步指定 K 的一族生成元, 以 J 为下标集, 便有正合列

$$R^{\oplus J}\to R^{\oplus I}\to M\to 0.$$

这般正合列称为 M 的**展示**, 它描述了 M 的生成元以及生成元之间的关系.

定义 1.5.1 设 M 为 R-模.

- 若存在 $n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$ 和正合列 $R^{\oplus n}\to M\to 0$, 则称 M 为**有限生成**或**有限型**的.
- 若存在 $m,n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$ 和正合列 $R^{\oplus m}\to R^{\oplus n}\to M\to 0$, 则称 M 是**有限展示**的.

有限展示强于有限生成. 模的有限生成或有限展示性质能否被子模和商模继承? 在一般的环上, 相关结论略显复杂, 证明也相对迂回.

引理 1.5.2 考虑 R-模的短正合列 $0\to M'\to M\to M''\to 0$.

(i) 若 M 有限生成, 则 M'' 亦然.

(ii) 若 M' 和 M'' 皆为有限生成的, 则 M 亦然.

(iii) 若 M'' 有限展示, M 有限生成, 则 M' 是有限生成的.

(iv) 若 M' 有限生成, M 有限展示, 则 M'' 是有限展示的.

(v) 若 M' 和 M'' 皆为有限展示的, 则 M 亦然.

特别地, 若 M_1, M_2 都是有限生成 (或有限展示) R-模, 则 $M_1\oplus M_2$ 亦然. 若 M_1 和 M_2 是某 R-模 M 的有限生成子模, 则 M_1+M_2 亦然.

证明 以下论证将反复应用命题 1.4.3 (iii) 关于投射模的性质.

对于 (i), 给定满同态 $R^{\oplus n}\to M$, 和 $M\to M''$ 合成给出满同态 $R^{\oplus n}\to M''$.

对于 (ii), 取定满同态 $\alpha: R^{\oplus m}\to M'$ 和 $\gamma: R^{\oplus n}\to M''$. 由于 $R^{\oplus n}$ 是投射模, γ 有分解 $R^{\oplus n}\xrightarrow{\tilde{\gamma}} M\to M''$. 将 M' 视同 M 的子模, 构造

$$\beta := (\alpha,\tilde{\gamma}) : R^{\oplus(m+n)} = R^{\oplus m}\oplus R^{\oplus n}\to M.$$

留意到 $\mathrm{im}(\beta)$ 包含 $\mathrm{im}(\alpha) = M'$, 而 $\tilde{\beta}$ 满确保 $\mathrm{im}(\beta)/M' = M''$, 故 β 也是满同态, 从而 M 是有限生成的.

对于 (iii), 先选定 M'' 的展示 $R^{\oplus m} \to R^{\oplus n} \xrightarrow{f} M'' \to 0$. 由于 $R^{\oplus n}$ 是投射模, f 可分解为 $M \to M''$ 和某个同态 $g : R^{\oplus n} \to M$ 的合成. 下图的实线部分

$$\begin{tikzcd} & R^{\oplus m} \arrow[r] \arrow[d, dashed, "h"'] & R^{\oplus n} \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"] & M'' \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{id}"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & M' \arrow[r] & M \arrow[r] & M'' \arrow[r] & 0, \end{tikzcd}$$

因之是行正合交换图表. 追图可见 $R^{\oplus m} \to R^{\oplus n} \xrightarrow{g} M \to M''$ 合成为 0, 故存在虚线所示之 h 使全图交换.

对上图应用蛇形引理 [7, 命题 6.8.6], 可得 $\mathrm{coker}(h) \xrightarrow{\sim} \mathrm{coker}(g)$. 根据 (i), M 有限生成蕴涵 $\mathrm{coker}(g)$ 有限生成, 故 $\mathrm{coker}(h)$ 亦然; 同理 $\mathrm{im}(h)$ 也是有限生成的. 对短正合列

$$0 \to \mathrm{im}(h) \to M' \to \mathrm{coker}(h) \to 0$$

应用 (ii), 可知 M' 有限生成.

考虑 (iv). 取正合列 $R^{\oplus m} \xrightarrow{g} R^{\oplus n} \xrightarrow{f} M \to 0$ 和 $R^{\oplus p} \xrightarrow{h} M' \to 0$. 合成同态 $R^{\oplus n} \xrightarrow{f} M \to M''$ 是满的, 其核是 M' 在 $R^{\oplus n}$ 中的原像, 证此原像有限生成即可. 由于 $R^{\oplus p}$ 是投射 R-模, 存在同态 j 使得

$$\begin{tikzcd} & R^{\oplus p} \arrow[r, "h"] \arrow[d, "j"'] & M' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ R^{\oplus m} \arrow[r, "g"'] & R^{\oplus n} \arrow[r, "f"'] & M \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

是行正合交换图表. 考虑 $(j, g) : R^{\oplus(p+m)} = R^{\oplus p} \oplus R^{\oplus m} \to R^{\oplus n}$. 沿用类似于 (ii) 的方法, 易见 $\mathrm{im}(j, g)$ 正是 M' 在 $R^{\oplus n}$ 中的原像. 综上, M'' 是有限展示的.

下面考虑 (v). 其条件强于 (ii), 故可延续该处构造, 得到行正合交换图表

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & R^{\oplus m} \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"'] & R^{\oplus(m+n)} \arrow[r] \arrow[d, "\beta"] & R^{\oplus n} \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & M' \arrow[r] & M \arrow[r] & M'' \arrow[r] & 0, \end{tikzcd}$$

其中 α, β, γ 皆满. 代入蛇形引理得到短正合列

$$0 \to \ker(\alpha) \to \ker(\beta) \to \ker(\gamma) \to 0.$$

基于 (iii) 可见 $\ker(\alpha)$ 和 $\ker(\gamma)$ 皆为有限生成, 代入 (ii) 遂知 $\ker(\beta)$ 有限生成. 对短正合列 $0 \to \ker(\beta) \to R^{\oplus(m+n)} \to M \to 0$ 应用 (iv), 即知 M 是有限展示的, 故 (v) 得证.

最后一部分断言是 (i), (ii) 和 (v) 的应用, 按定义直接验证也毫无困难. □

推论 1.5.3 设 M 为有限展示 R-模, 则对于所有 $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ 及满同态 $f : R^{\oplus n} \to M$, 其核 $\ker(f)$ 都是有限生成的[1].

证明 将短正合列 $0 \to \ker(f) \to R^{\oplus n} \xrightarrow{f} M \to 0$ 代入引理 1.5.2 (iii). □

注记 1.5.4 有限生成投射模总是有限展示的, 这是因为对于投射 R-模 P, 命题 1.4.3 (iv) 表明任何满同态 $R^{\oplus k} \twoheadrightarrow P$ 的核都是 $R^{\oplus k}$ 的直和项, 因此核也是有限生成的.

以下将对小范畴 I (注记 1.1.4) 和函子 $\alpha : I \to R\text{-Mod}$ 讨论相应的 $\varinjlim$. 回忆 [7, 定义 2.7.6]: 若小范畴 I 非空且满足

- ◇ 对任意 $i, j \in \mathrm{Ob}(I)$ 存在 $k \in \mathrm{Ob}(I)$ 和态射 $i \to k \leftarrow j$,
- ◇ 对 I 中的任意态射 $f, g : i \to j$ 存在 $k \in \mathrm{Ob}(I)$ 和态射 $h : j \to k$ 使得 $hf = hg$,

则称 I 为**滤过**的. 若偏序集 $(I, \preceq)$ 对应的范畴是滤过小范畴, 则称 $(I, \preceq)$ 是滤过偏序集, 此时上述第二项条件是多余的.

对于滤过小范畴 I, 相应的 $\varinjlim \alpha$ 称为滤过 $\varinjlim$.

命题 1.5.5 任何 R-模 M 都能写成有限展示 R-模的滤过 $\varinjlim$, 而且以下陈述等价.

(i) M 是有限展示的.

(ii) M 是 R-Mod 中的紧对象 [8, 定义 A.2.2]; 换言之, 考虑小范畴 I 连同函子 $\alpha : I \to R\text{-Mod}$, 由同态族 $\alpha(i) \to \varinjlim \alpha$ (其中 $i \in \mathrm{Ob}(I)$) 诱导的典范同态

$$\varinjlim \mathrm{Hom}_R(M, \alpha) \to \mathrm{Hom}_R(M, \varinjlim \alpha)$$

在 I 滤过时为同构.

证明 先对一般的 R-模 M 证第一个断言. 考虑资料 (Z, G), 其中

$$Z \subset M, \quad G \subset \ker\left[R^{\oplus Z} \to M\right]$$

都是有限子集; 换言之, G 是 Z 上的一族有限线性关系. 包含映射 $G \to R^{\oplus Z}$ 诱导同态 $R^{\oplus G} \to R^{\oplus Z}$, 命

$$M_{Z,G} := \mathrm{coker}\left[R^{\oplus G} \to R^{\oplus Z}\right],$$

则 $M_{Z,G}$ 是有限展示的, 且有自明同态 $f_{Z,G} : M_{Z,G} \to M$. 在所有这些 (Z, G) 构成的集合 I 上定义偏序 $\preceq$ 如下: $(Z, G) \preceq (Z', G')$ 意谓 $Z \subset Z'$ 而诱导同态 $R^{\oplus Z} \to R^{\oplus Z'}$ 限制为 $G \to G'$, 从而诱导 $M_{Z,G} \to M_{Z',G'}$. 不难验证:

- ◇ $(I, \preceq)$ 是滤过偏序集, 这是因为 $(Z_1, G_1) \preceq (Z_1 \cup Z_2, G_1 \cup G_2) \succeq (Z_2, G_2)$,

[1] 因此有限展示 R-模 M 的等价刻画是: M 有限生成, 而且对任意 n 和任意满同态 $f : R^{\oplus n} \to M$, 其核 $\ker(f)$ 仍是有限生成的. 这种性质在几何学中称为凝聚性.

◇ 将 $(I, \preceq)$ 等同于相应的小范畴, 简记为 I, 则 $(Z, G) \mapsto M_{Z,G}$ 给出函子 $\omega : I \to R\text{-Mod}$,

◇ 同态族 $f : (f_{Z,G})_{(Z,G)\in I}$ 诱导的同构 $\varinjlim \omega \xrightarrow{\sim} M$ 是双射, 因而是同构.

第二部分的 (i) $\implies$ (ii) 是 [8, 例 A.2.5] 的内容. 以下处理 (ii) $\implies$ (i). 不妨就设 $M = \varinjlim \alpha$, 其中 I 是滤过小范畴, $\alpha : I \to R\text{-Mod}$ 是函子, 而 $\alpha(i)$ 对所有 $i \in \mathrm{Ob}(I)$ 都是有限展示 R-模; 记典范同态 $\alpha(i) \to M$ 为 ι_i.

条件 (ii) 蕴涵 id_M 来自 $\varinjlim \mathrm{Hom}_R(M, \alpha)$, 故由集合的滤过 $\varinjlim$ 的构造知存在 $i \in \mathrm{Ob}(I)$ 和 $f_i \in \mathrm{Hom}(M, \alpha(i))$ 使得 $\iota_i f_i = \mathrm{id}_M$. 于是有直和分解

$$\alpha(i) \simeq M \oplus N.$$

既然 N 同构于 $\alpha(i)$ 的商模, 引理 1.5.2 (i) 确保它有限生成, 从而引理 1.5.2 (iv) 确保 $M \simeq \alpha(i)/N$ 是有限展示的. □

命题 1.5.5 给出了有限展示模的范畴论刻画. 有限生成模也能以范畴论的性质刻画, 例如 [8, 引理 7.7.15].

注记 1.5.6 定义 1.5.1, 引理 1.5.2 和命题 1.5.5 也适用于一般的环 A 上的左模 (或右模), 不必要求 A 交换, 论证无异.

下面讨论有限生成和有限展示性质和张量积的关系.

命题 1.5.7 设 M 和 N 为 R-模.

(i) 若 M 和 N 都是有限生成的, 则 $M \otimes N$ 亦然.

(ii) 若 M 和 N 都是有限展示的, 则 $M \otimes N$ 亦然.

证明 既然张量积保持余核, 它也保持同态的满性.

对于 (i), 取满同态 $f : R^{\oplus n} \to M$ 和 $g : R^{\oplus m} \to N$, 则 $f \otimes \mathrm{id} : R^{\oplus n} \otimes N \to M \otimes N$ 和 $\mathrm{id} \otimes g : R^{\oplus n} \otimes R^{\oplus m} \to R^{\oplus n} \otimes N$ 皆满. 然而张量积保持直和与 $R \otimes R \simeq R$ 蕴涵 $R^{\oplus n} \otimes R^{\oplus m} \simeq R^{\oplus mn}$, 合成后遂有满同态 $R^{\oplus mn} \to M \otimes N$.

对于 (ii), 取正合列 $R^{\oplus p} \xrightarrow{h} R^{\oplus n} \xrightarrow{f} M \to 0$, 则

$$R^{\oplus p} \otimes N \xrightarrow{h \otimes \mathrm{id}} R^{\oplus n} \otimes N \xrightarrow{f \otimes \mathrm{id}} M \otimes N \to 0$$

依然正合. 注意到 $R^{\oplus n} \otimes N \simeq N^{\oplus n}$ 是有限展示的, 而 $R^{\oplus p} \otimes N \simeq N^{\oplus p}$ 在其中的像是有限生成的 (引理 1.5.2 (i)), 故相应的商模 $M \otimes N$ 是有限展示的 (引理 1.5.2 (iv)). □

命题 1.5.8 设 $R \to S$ 为环同态, 则相应的函子 $S \underset{R}{\otimes} (\cdot) : R\text{-Mod} \to S\text{-Mod}$ 保持有限生成和有限展示性质.

证明 设 R-模 M 有限生成, 取满同态 $f : R^{\oplus n} \to M$, 则同态

$$\mathrm{id} \otimes f : S^{\oplus n} \simeq S \underset{R}{\otimes} (R^{\oplus n}) \to S \underset{R}{\otimes} M$$

依然满, 故 S-模 $S \underset{R}{\otimes} M$ 有限生成.

类似地, 设 M 有限展示, 取正合列 $R^{\oplus p} \to R^{\oplus n} \to M \to 0$, 相应地有 S-模的正合列

$$S^{\oplus p} \to S^{\oplus n} \to S \underset{R}{\otimes} M \to 0,$$

这表明 $S \underset{R}{\otimes} M$ 是有限展示 S-模. □

1.6 局部化的定义

环 R 的子集 U 如果包含 1, 而且对乘法封闭, 则称 U 为 R 的**乘性子集**. 环 R 对乘性子集 U 的局部化是一个环 $R[U^{-1}]$ 连同环同态 $R \to R[U^{-1}]$; 精确到唯一同构, 它们由以下泛性质刻画.

- ◇ 首先, $R \to R[U^{-1}]$ 映 U 为 $R[U^{-1}]^\times$ 的子集.
- ◇ 给定环 A 及同态 $\varphi : R \to A$, 若 $\varphi(U) \subset A^\times$, 则存在唯一的同态 $\varphi_0 : R[U^{-1}] \to A$ 使下图交换:

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d] & A. \\ R[U^{-1}] \arrow[ur, "\varphi_0"'] & \end{tikzcd}$$

这是 [7, 命题 5.3.9] 的内容; 回忆到 $R[U^{-1}]$ 具体被构造为 $U \times R$ 对等价关系

$$(u, r) \sim (u', r') \iff \exists u_1 \in U,\ u_1(ur' - r'u) = 0$$

的商集. 我们将 $R[U^{-1}]$ 中的等价类 $[u, r]$ 写作分式 $\frac{r}{u}$. 注意到 $R \to R[U^{-1}]$ 未必单.

例 1.6.1 (整环的分式域) 取 R 为整环, 则 $R \smallsetminus \{0\}$ 是乘性子集, 对应的局部化正是 R 的分式域 $\mathrm{Frac}(R)$, 而 $R \to \mathrm{Frac}(R)$ 是单射. 我们将在 §2.9 推广此一构造.

现在着手定义并刻画模对乘性子集的局部化, 思路和 $R[U^{-1}]$ 的构造相通. 注意到任何 $R[U^{-1}]$-模 N 都能通过同态 $R \to R[U^{-1}]$ 视作 R-模, 严格记法是 $\mathcal{F}_{R \to R[U^{-1}]} N$.

定义–命题 1.6.2 (模的局部化) 设 U 为 R 的乘性子集, M 为 R-模. 存在 $R[U^{-1}]$-模 $M[U^{-1}]$ 连同 R-模同态 $\ell : M \to M[U^{-1}]$, 使得对于任意 $R[U^{-1}]$-模 N, 我们有 R-模同构

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{R[U^{-1}]}(M[U^{-1}], N) &\xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_R(M, N) \\ \varphi &\longmapsto \varphi\ell. \end{aligned}$$

这给出伴随对

$$(\cdot)[U^{-1}] : R\text{-Mod} \rightleftarrows R[U^{-1}]\text{-Mod} : \mathcal{F}_{R\to R[U^{-1}]}$$

它刻画了 $(M[U^{-1}], \ell)$, 精确到唯一同构. 我们称 $M[U^{-1}]$ 为 M 对 U 的局部化.

证明 在 $U \times M$ 上定义关系

$$(u, x) \sim (u', x') \iff \exists u_1 \in U,\ u_1(ux' - u'x) = 0.$$

请读者自证 $\sim$ 是等价关系; 记 $[u, x]$ 为 (u, x) 的等价类, 则同样易证运算

$$\begin{aligned} [u_1, x_1] + [u_2, x_2] &:= [u_1u_2, u_2x_1 + u_1x_2], \\ \frac{r}{u} \cdot [s, x] &:= [us, rx], \quad \frac{r}{u} \in R[U^{-1}] \end{aligned}$$

良定义, 使 $M[U^{-1}]$ 成为以 $[1, 0]$ 为零元的 $R[U^{-1}]$-模. 具体验证方式和 $R[U^{-1}]$ 的构造无异.

定义 $\ell : M \to M[U^{-1}]$ 为 $x \mapsto [1, x]$, 则 ℓ 保持加法, 也保持 R 的纯量乘法: $\frac{r}{1} \cdot [1, x] = [1, rx]$.

断言中的映射 $\varphi \mapsto \varphi\ell$ 显然良定义, 并且是 R-模同态, 以下证其为双射. 设 $\varphi \in \mathrm{Hom}_{R[U^{-1}]}(M[U^{-1}], N)$, 则 $\varphi([u, x]) = \varphi\left(\frac{1}{u}[1, x]\right) = \frac{1}{u}\varphi\ell(x)$, 由此可见 $\varphi \mapsto \varphi\ell$ 单. 反之给定 $\psi \in \mathrm{Hom}_R(M, N)$, 定义 $\varphi : M[U^{-1}] \to N$ 为

$$\varphi([u, x]) = \frac{1}{u}\psi(x),$$

这是良定义的: 若 $(u, x) \sim (u', x')$, 则存在 $u_1 \in U$ 使得 $u_1(ux' - u'x) = 0$, 从而 $u_1u\psi(x') = u_1u'\psi(x)$ 在 N 中成立; 然而 u_1, u, u' 对 N 的纯量乘法皆可逆, 整理后得到 $\frac{1}{u}\psi(x) = \frac{1}{u}\psi(x')$.

在此基础上, 进一步验证 φ 是 $R[U^{-1}]$-模同态. 显见 $\varphi\ell(x) = \varphi([1, x]) = \psi(x)$, 由此证得 $\varphi \mapsto \varphi\ell$ 满. □

方便起见, 今后将上述证明中构造的 $[u, x]$ 另记为 $\frac{1}{u}x = \frac{x}{u}$.

定义–命题 1.6.2 的泛性质使得 $M \mapsto M[U^{-1}]$ 成为函子 $R\text{-Mod} \to R[U^{-1}]\text{-Mod}$. 任意同态 $f \in \mathrm{Hom}_R(M_1, M_2)$ 在函子 $(\cdot)[U^{-1}]$ 之下的像为

$$f[U^{-1}] \in \mathrm{Hom}_{R[U^{-1}]}(M_1[U^{-1}], M_2[U^{-1}]),$$

更精确地说, $f[U^{-1}]$ 映 $\frac{x}{u} \in M_1[U^{-1}]$ 为 $\frac{f(x)}{u}$.

引理 1.6.3 局部化函子满足下述性质:

(i) 对所有 R-模 M, 有 $\ker\left[M \to M[U^{-1}]\right] = \{x \in M : \exists u \in U,\ ux = 0\}$;

(ii) $M[U^{-1}]=0$ 当且仅当对所有 $x\in M$ 皆存在 $u\in U$ 使得 $ux=0$, 如果 M 有限生成, 则这也等价于存在 $u\in U$ 使得 $uM=0$;

(iii) 函子 $M\mapsto M[U^{-1}]$ 保持所有正合列;

(iv) 设 $f:M_1\to M_2$ 为单 (或满) 同态, 则 $f[U^{-1}]$ 亦然.

证明 沿用此前的符号. 对于 (i), 根据定义 $\frac{x}{1}=0$ 在 $M[U^{-1}]$ 中成立当且仅当存在 $u\in U$ 使得 $ux=0$ 在 M 中成立.

对于 (ii), 观察到 $\frac{x}{u}=\frac{1}{u}\cdot\frac{x}{1}$, 而 $\frac{1}{u}\in R[U^{-1}]^\times$, 因此 $M[U^{-1}]=0$ 当且仅当 M 在其中的像为 0; 根据 (i), 这等价于 (ii) 的第一部分性质成立. 若 M 有生成元 $x_1,\ldots,x_n$, 且对每个 x_i 存在 u_i 使得 $u_ix_i=0$, 则 $u:=u_1\cdots u_n\in U$ 满足 $uM=0$, 故 (ii) 的第二部分成立.

对于 (iii), 考虑三项正合列 $M'\xrightarrow{f}M\xrightarrow{g}M''$ 即可. 它取局部化之后仍是复形, 亦即 $\operatorname{im}f[U^{-1}]\subset\ker g[U^{-1}]$. 为证 $\supset$, 设 $\frac{x}{u}\in\ker g[U^{-1}]$, 亦即 $\frac{g(x)}{u}=0\in M''[U^{-1}]$, 则存在 $u_1\in U$ 使得 $g(u_1x)=u_1g(x)=0\in M''$. 于是存在 $x'\in M'$ 使得 $u_1x=f(x')$, 从而

$$\frac{x}{u}=\frac{u_1x}{u_1u}=\frac{f(x')}{u_1u}\in\operatorname{im}f[U^{-1}].$$

对于 (iv), 将正合列 $0\to M_1\xrightarrow{f}M_2$ (或 $M_1\xrightarrow{f}M_2\to 0$) 代入 (iii) 即可. □

引理 1.6.4 设 M_1 为 $R[U^{-1}]$-模, M 为 M_1 的 R-子模, 则 $M[U^{-1}]$ 典范地同构于 M_1 的 $R[U^{-1}]$-子模 $R[U^{-1}]\cdot M$.

证明 注意到 $R[U^{-1}]\cdot M=\left\{\frac{1}{u}x : x\in M,\ u\in U\right\}$, 而 $\frac{1}{u}\cdot x=\frac{1}{u'}x'$ 当且仅当 $ux'=u'x$ 在 M 中成立.

兹验证包含同态 $M\to R[U^{-1}]\cdot M$ 满足泛性质. 设 N 为 $R[U^{-1}]$-模, 任何 R-模同态 $\psi:M\to N$ 能且仅能通过 $\frac{1}{u}\cdot x\mapsto\frac{1}{u}\psi(x)$ 延拓为 $R[U^{-1}]$-模同态 $R[U^{-1}]\cdot M\to N$. □

命题 1.6.5 (局部化的传递性) 设 U 和 V 为环 R 的乘性子集, $U\subset V$. 记 V 在 $R[U^{-1}]$ 中的像为 $\underline{V}$, 这仍是乘性子集. 此时有典范的环同构

$$R[U^{-1}][\underline{V}^{-1}]\xrightarrow{\sim}R[V^{-1}]$$
$$\frac{r/u}{\underline{v}}\mapsto\frac{r}{uv},$$

其中 $r\in R$, $u\in U$, $v\in V$ 而 $\underline{v}$ 代表 v 在 $\underline{V}$ 中的像.

相应地, 对所有 R-模 M 皆有典范的 $R[V^{-1}]$-模同构

$$M[U^{-1}][\underline{V}^{-1}]\xrightarrow{\sim}M[V^{-1}]$$
$$\frac{1}{\underline{v}}\left(\frac{x}{u}\right)\mapsto\frac{x}{uv},$$

其中 $x\in M$, 其余照旧.

证明　对于环的版本, 首先注意到 $R \to R[U^{-1}] \to R[U^{-1}][\underline{V}^{-1}]$ 的合成映 V 的所有元素为可逆元, 下面验证它具有 $R[V^{-1}]$ 所需的泛性质. 对于所有环 A 连同满足 $\varphi(V) \subset A^\times$ 的同态 $\varphi : R \to A$, 首先由 $\varphi(U) \subset A^\times$ 得到唯一分解 $\varphi_0 : R[U^{-1}] \to A$; 其次, 对所有 $v \in V$ 皆有 $\varphi_0(\underline{v}) = \varphi(v) \in A^\times$, 故 φ_0 也唯一地分解为 $\varphi_1 : R[U^{-1}][\underline{V}^{-1}] \to A$.

反过来说, 设 φ 如上, 若有 φ_1 使得图表

$$\begin{tikzcd}
R \arrow[d] \arrow[dr, "\varphi"] & \\
R[U^{-1}] \arrow[d] \arrow[r, dashed, "\varphi_0"] & A \\
R[U^{-1}][\underline{V}^{-1}] \arrow[ur, "\varphi_1"'] &
\end{tikzcd}$$

的实线部分交换, 取虚线所示的 φ_0 使下半三角交换, 则上半三角也自动交换; 这就说明 φ_1 总是按上一段的方式得出, 因而唯一. 泛性质得证.

特别地, 代入 $A = R[V^{-1}]$ 和典范同态 $R \to R[V^{-1}]$, 相应的 φ_1 即所求同构, 映法确如断言所述.

至于模的版本, 鉴于

$$\mathcal{F}_{R\to R[V^{-1}]} \simeq \mathcal{F}_{R\to R[U^{-1}][\underline{V}^{-1}]} = \mathcal{F}_{R[U^{-1}]\to R[U^{-1}][\underline{V}^{-1}]}\mathcal{F}_{R\to R[U^{-1}]}$$

和定义–命题 1.6.2 的伴随关系, 将相应的左伴随亦即局部化函子拆作两段即可. □

实践中经常将 $M[U^{-1}]$ 等同于张量积 $R[U^{-1}] \underset{R}{\otimes} M$, 这是以下结论所保证的.

命题 1.6.6　设 U 为 R 的乘性子集, 则对所有 R-模 M, 我们有 $R[U^{-1}]$-模的典范同构 $R[U^{-1}] \underset{R}{\otimes} M \xrightarrow{\sim} M[U^{-1}]$, 它映 $\frac{r}{u} \otimes x$ 为 $\frac{rx}{u}$.

特别地, 模的局部化对张量积成为幺半函子, 亦即有典范同构

$$\begin{aligned} M_1[U^{-1}] \underset{R[U^{-1}]}{\otimes} M_2[U^{-1}] &\xrightarrow{\sim} (M_1 \underset{R}{\otimes} M_2)[U^{-1}] \\ \frac{x_1}{u_1} \otimes \frac{x_2}{u_2} &\mapsto \frac{x_1 \otimes x_2}{u_1 u_2}, \end{aligned}$$

它们和 R-模与 $R[U^{-1}]$-模对张量积的结合约束, 幺约束等兼容.

证明　比较命题 1.3.3 与定义–命题 1.6.2 的伴随对: $R[U^{-1}] \underset{R}{\otimes} (\cdot)$ 和 $(\cdot)[U^{-1}]$ 都是 $\mathcal{F}_{R\to R[U^{-1}]}$ 的左伴随, 故同构. 为了明确此一同构, 留意到后一伴随对的单位态射 $M \to M[U^{-1}]$ 是 $x \mapsto \frac{x}{1}$; 对此应用 $R[U^{-1}] \underset{R}{\otimes} (\cdot)$ 和 $\mathcal{F}_{R\to R[U^{-1}]}$ 的伴随关系, 便得知相应的 $R[U^{-1}] \underset{R}{\otimes} M \to M[U^{-1}]$ 由 $\frac{r}{u} \otimes x \mapsto \frac{r}{u} \cdot \frac{x}{1} = \frac{rx}{u}$ 给出. 基于此, 关于幺半函子的断言归结为 (1.3.2). □

作为应用, 模的局部化和任意直和交换: $\bigoplus_{i\in I} M_i[U^{-1}] \simeq \left(\bigoplus_{i\in I} M_i\right)[U^{-1}]$.

推论 1.6.7 设 U 是 R 的乘性子集, M 是 R-模. 若 M 是有限生成 (或有限展示) R-模, 则 $M[U^{-1}]$ 是有限生成 (或有限展示) $R[U^{-1}]$-模.

证明 命题 1.6.6 表明 $R[U^{-1}] \underset{R}{\otimes} M \simeq M[U^{-1}]$, 一切化为命题 1.5.8 的应用. $\square$

将 R 视为 R-模, 比较定义–命题 1.6.2 证明和 [7, §5.3] 的构造, 可见以下两种工序给出相同的 R-模:

- ◇ 将 R 作为环对 U 作局部化, 再将纯量乘法限制到 R 上;
- ◇ 将 R 作为 R-模对 U 作局部化.

因此写法 $R[U^{-1}]$ 无歧义.

由于 $R = R \cdot 1$, 引理 1.6.3 (ii) 蕴涵

$$R[U^{-1}] \text{ 是零环} \iff 1 \in \ker\left[R \to R[U^{-1}]\right] \iff 0 \in U. \tag{1.6.1}$$

因此考虑局部化时经常要求 $0 \notin U$.

1.7 局部化的进阶性质

继续讨论关于环 R 的局部化. 对不同乘性子集的局部化有时典范地同构, 以下是一类典型状况.

引理 1.7.1 设 U 和 V 都是 R 的乘性子集, 满足以下性质

- ◇ 对所有 $u \in U$, 存在 $r \in R$ 使得 $ur \in V$,
- ◇ 对所有 $v \in V$, 存在 $r \in R$ 使得 $vr \in U$;

换言之, 两者的元素相互整除. 此时存在唯一的 R-代数同构 $R[U^{-1}] \xrightarrow{\sim} R[V^{-1}]$.

证明 考虑环同态 $\varphi : R \to A$.

- ◇ 若 $\varphi(U) \subset A^\times$, 则对所有 $v \in V$, 可取 r 使得 $vr \in U$, 从而 $\varphi(vr) \in A^\times$ 蕴涵 $\varphi(v) \in A^\times$, 故 $\varphi(V) \subset A^\times$.
- ◇ 同理, 若 $\varphi(V) \subset A^\times$ 则 $\varphi(U) \subset A^\times$.

综上可见 $R \to R[U^{-1}]$ 和 $R \to R[V^{-1}]$ 的泛性质相互等价, 这给出 R-代数的同构 $R[U^{-1}] \xrightarrow{\sim} R[V^{-1}]$. $\square$

对于形如 $f^{\mathbb{Z}_{\geq 0}}$ 的乘性子集, 我们对相应的局部化引入方便的符号.

约定 1.7.2 设 $f \in R$, 我们将 R 对乘性子集 $f^{\mathbb{Z}_{\geq 0}}$ 的局部化简记为 $R[f^{-1}]$ 或 $R[\frac{1}{f}]$, 视为 R-代数.

以下是关于 $R[f^{-1}]$ 的一些初步性质.

- 如果 $f = ug^n$, 其中 $n \geq 1$ 而 $u \in R^\times$, 则引理 1.7.1 等同 $R[f^{-1}]$ 与 $R[g^{-1}]$.
- 考虑形式如下的乘性子集
$$U = \left\{ \prod_{i=1}^m u_i^{a_i} : a_1, \ldots, a_m \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \right\},$$
其中 $u_1, \ldots, u_m \in R$ 给定. 取 $f := u_1 \cdots u_m$, 则引理 1.7.1 等同 $R[U^{-1}]$ 与 $R[f^{-1}]$.
- 满足 $\exists n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$, $f^n = 0$ 的 $f \in R$ 称为幂零元. 因此 $f \in R$ 非幂零元等价于说 $\{f^n : n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}$ 是不含零元的乘性子集, 等价于 $R[f^{-1}]$ 非零环.

一般的局部化可以用形如 $R[f^{-1}]$ 的局部化来表达. 先回忆任何预序集 $(P, \leq)$ (见 [7, 定义 1.2.1]) 都给出相应的范畴 $\mathcal{P}$ (见 [7, 例 2.1.5]), 满足

$$\mathrm{Ob}(\mathcal{P}) = P, \quad \mathrm{Hom}_{\mathcal{P}}(p, p') = \begin{cases} \text{独点集}, & \text{若 } p \leq p' \\ \varnothing, & \text{若 } p \not\leq p'. \end{cases}$$

现在对 R 的任意子集 U 赋予预序

$$f \leq g \iff \exists n \geq 1,\ f \mid g^n. \tag{1.7.1}$$

容易验证预序的公理. 当 U 是乘性子集时, 由于 $f \leq fg \geq g$, 相应的 $\mathcal{U}$ 是滤过范畴; 此外由局部化的泛性质易见 $f \leq g$ 时存在唯一的 R-代数同构 $\alpha_{g,f} : R[f^{-1}] \to R[g^{-1}]$.

命题 1.7.3 设 U 为 R 的乘性子集, 赋予上述预序. 在 $\varinjlim_f R[f^{-1}]$ 上存在典范的 R-代数结构, 而且存在唯一的 R-代数同构 $R[U^{-1}] \simeq \varinjlim_f R[f^{-1}]$; 此处在环范畴中取 $\varinjlim_f$, 下标取在预序集 $(U, \leq)$ 对应的范畴 $\mathcal{U}$ 上.

证明 基于环的滤过 $\varinjlim$ 的具体构造, 这些断言可以直接验证. 以下提供另一种基于泛性质的论证, 详见 §1.6 开头的回顾.

选定环 A. 指定满足 $\varphi(U) \subset A^\times$ 的环同态 $\varphi : R \to A$ 相当于对所有 $f \in U$ 指定一个满足 $\varphi^f(f) \in A^\times$ 的环同态 $\varphi_f : R \to A$, 使得 $f \leq g$ 时 $\varphi^f = \varphi^g$. 这点当然是平凡的, 但指定 φ^f 也相当于指定环同态 $\varphi_f : R[f^{-1}] \to A$; 考虑下图

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r] \arrow[d] & R[f^{-1}] \arrow[dl, "\alpha_{g,f}"'] \arrow[d, "\varphi_f"] \\ R[g^{-1}] \arrow[r, "\varphi_g"'] & A, \end{tikzcd}$$

其上三角已知交换, 而 $\varphi^f = \varphi^g$ 等价于外框交换, 也等价于下三角交换.

于是指定 φ 相当于指定一族当 $f \leq g$ 时满足 $\varphi_g \alpha_{g,f} = \varphi_f$ 的环同态 $\varphi_f : R[f^{-1}] \to A$. 根据 $\varinjlim_f$ 的泛性质, 这也相当于指定环同态 $\varinjlim_f R[f^{-1}] \to A$, 它和 $R \to \varinjlim_f R[f^{-1}]$ 合成为 φ. 与 $R \to R[U^{-1}]$ 的泛性质比较, 立见有唯一的 R-代数同构 $R[U^{-1}] \xrightarrow{\sim} \varinjlim_f R[f^{-1}]$. □

不妨设想 $R[f^{-1}]$ 为向 R 形式地添入 f 的逆元的产物, 它也可以描述为多项式环的商.

命题 1.7.4 设 $f \in R$, 则有 R-代数的同态

$$R[X]/(fX-1) \xrightarrow{\sim} R[f^{-1}],$$

它映 X 的陪集为 $\frac{1}{f}$.

证明 以下对同态 $R \hookrightarrow R[X] \to R[X]/(fX-1)$ 的合成验证 $R[f^{-1}]$ 的泛性质. 首先 f 在 $R[X]/(fX-1)$ 中的像有逆, 由 X 的陪集给出.

指定满足 $\varphi(f) \in A^{\times}$ 的环同态 $\varphi : R \to A$ 等价于指定资料 (φ, a), 其中 $\varphi : R \to A$ 是环同态而 $a \in A$ 满足 $\varphi(f)a = 1$; 然而指定 φ 连同任意 $a \in A$ 等价于指定环同态 $\Phi : R[X] \to A$, 对应关系是 $(\varphi, a) = (\Phi|_R, \Phi(X))$, 因此 $\varphi(f)a = 1$ 等价于 $\Phi(fX) = 1$, 等价于 Φ 通过 $R[X]/(fX-1)$ 分解.

于是有 R-代数的同态 $R[X]/(fX-1) \xrightarrow{\sim} R[f^{-1}]$, 它映 f 的陪集为 $\frac{f}{1}$, 因而映 X 的陪集为 $\frac{1}{f}$. □

接着探讨局部化和理想的关系.

约定 1.7.5 回忆到 R 的子模无非是 R 的理想, 对 $R[U^{-1}]$ 亦然.

- ◇ 若 $I \subset R$ 是理想, 则基于引理 1.6.3 (iv), $I[U^{-1}]$ 也嵌入为 $R[U^{-1}]$ 的理想, 具体表作

$$\begin{aligned} I[U^{-1}] &= \left\{ \frac{x}{u} \in R[U^{-1}] : x \in I,\ u \in U \right\} \\ &= I \cdot R[U^{-1}]. \end{aligned}$$

- ◇ 对 R 的任意一族理想 $\{I_\alpha \in \mathcal{A}\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$, 易见 $(\sum_\alpha I_\alpha)[U^{-1}] = \sum_\alpha I_\alpha[U^{-1}]$.

- ◇ 对 R 的任意理想 I_1, I_2, 易见 $(I_1 I_2)[U^{-1}] = I_1[U^{-1}] I_2[U^{-1}]$.

  此外 $(I_1 \cap I_2)[U^{-1}] = I_1[U^{-1}] \cap I_2[U^{-1}]$, 这点既可以直接验证, 也是之后的引理 5.2.5 的特例.

- ◇ 若 J 是 $R[U^{-1}]$ 的理想, 则它对环同态 $R \to R[U^{-1}]$ 的原像是 R 的以下理想

$$J \cap R := \left\{ r \in R : \frac{r}{1} \in J \right\};$$

  注意到 $R \to R[U^{-1}]$ 未必单, 取交不过是简写.

所有理想 $J \subset R[U^{-1}]$ 都能写作 $J = I[U^{-1}]$ 的形式; 事实上, 映射对

$$\{I : R \text{ 的理想}\} \underset{R\cap J \leftarrow J}{\overset{I\mapsto I[U^{-1}]}{\rightleftarrows}} \{J : R[U^{-1}] \text{ 的理想}\} \tag{1.7.2}$$

按 $\circlearrowleft$ 的合成是恒等, 详见 [7, §5.3] 或自证. 若不对所论的理想设限, 则这对映射并非互逆, 然而我们有以下结论.

命题 1.7.6 设 U 是 R 的乘性子集, $0 \notin U$.

(i) 对于 R 的所有理想 I 皆有 $I[U^{-1}] = R[U^{-1}] \iff I \cap U \neq \varnothing$.

(ii) 沿用约定 1.7.5 的符号, 则 (1.7.2) 限制为互逆双射

$$\begin{aligned} \{\mathfrak{p} : R \text{ 的素理想},\ \mathfrak{p} \cap U = \varnothing\} &\rightleftarrows \left\{\mathfrak{q} : R[U^{-1}] \text{ 的素理想}\right\} \\ \mathfrak{p} &\longmapsto \mathfrak{p}R[U^{-1}] = \mathfrak{p}[U^{-1}] \\ \mathfrak{q} \cap R &\longleftarrow\!\shortmid\ \mathfrak{q}, \end{aligned}$$

而且此双射相对于 $\subset$ 是保序的.

(iii) 设素理想 $\mathfrak{p}$ 满足 $\mathfrak{p} \cap U = \varnothing$, 则

$$R[U^{-1}] \smallsetminus \mathfrak{p}[U^{-1}] = \left\{ \frac{r}{u} : r \in R \smallsetminus \mathfrak{p},\ u \in U \right\}.$$

证明 断言 (i) 和 (ii) 是 [7, 命题 5.3.13] 的内容. 至于 (iii), 对所有 $r \in R$ 和 $u \in U$, 因为 $\frac{1}{u}$ 可逆,

$$\frac{r}{u} \in \mathfrak{p}[U^{-1}] \iff \frac{r}{1} \in \mathfrak{p}[U^{-1}] \iff r \in \mathfrak{p}[U^{-1}] \cap R \overset{\text{(ii)}}{=\!=} \mathfrak{p},$$

故 $R[U^{-1}] \smallsetminus \mathfrak{p}[U^{-1}]$ 确实有断言中的描述. □

若 $\mathfrak{p}$ 是 R 的素理想, 则 $R \smallsetminus \mathfrak{p}$ 是不含 0 的乘性子集. 对这类乘性子集的局部化特别常用, 为此我们引入专用的符号.

定义 1.7.7 设 $\mathfrak{p}$ 为 R 的素理想, 对乘性子集 $R \smallsetminus \mathfrak{p}$ 的局部化记为

$$R_{\mathfrak{p}} := R[(R \smallsetminus \mathfrak{p})^{-1}], \quad M_{\mathfrak{p}} := M[(R \smallsetminus \mathfrak{p})^{-1}],$$

其中 M 是任意 R-模; 这种局部化也称为在 $\mathfrak{p}$ 处的局部化.[2)]

[2)] 局部化一词因此有两种解读, 一是对乘性子集作局部化, 二是在某个素理想处作局部化, 两者容易从语境辨别.

引理 1.7.8 设 U 为 R 的乘性子集, R 的素理想 $\mathfrak{p}$ 满足 $\mathfrak{p} \cap U = \varnothing$, 则有典范同构

$$R[U^{-1}]_{\mathfrak{p}[U^{-1}]} \simeq R_{\mathfrak{p}}, \quad M[U^{-1}]_{\mathfrak{p}[U^{-1}]} \simeq M_{\mathfrak{p}},$$

其中 M 是任意 R-模.

证明 命 $V := R \smallsetminus \mathfrak{p}$, 则 $U \subset V$. 记 V 在 $R[U^{-1}]$ 中的像为 $\underline{V}$. 命题 1.7.6 (iii) 表明 $\underline{V}$ 和 $R[U^{-1}] \smallsetminus \mathfrak{p}[U^{-1}]$ 至多相差 $R[U^{-1}]$ 的可逆元. 结合引理 1.7.1 可得 $R[U^{-1}][\underline{V}^{-1}] \simeq R[U^{-1}]_{\mathfrak{p}[U^{-1}]}$, 再代入命题 1.6.5 的传递性便完成证明. □

选定 R 的素理想 $\mathfrak{p}$. 命题 1.7.6 (ii) 给出保序双射

$$\begin{aligned} \left\{\mathfrak{q} : R \text{ 的素理想}, \ \mathfrak{q} \subset \mathfrak{p}\right\} &\rightleftarrows \left\{\underline{\mathfrak{q}} : R_{\mathfrak{p}} \text{ 的素理想}\right\} \\ \mathfrak{q} &\longmapsto \mathfrak{q}R_{\mathfrak{p}} \\ \underline{\mathfrak{q}} \cap R &\longleftarrow\!\shortmid \underline{\mathfrak{q}}. \end{aligned} \tag{1.7.3}$$

对于 (1.7.3) 中的素理想 $\mathfrak{q} \subset \mathfrak{p}$, 由于 $R \smallsetminus \mathfrak{q} \supset R \smallsetminus \mathfrak{p}$, 引理 1.7.8 的结论化为

$$(R_{\mathfrak{p}})_{\mathfrak{q}R_{\mathfrak{p}}} \simeq R_{\mathfrak{q}}, \quad (M_{\mathfrak{p}})_{\mathfrak{q}R_{\mathfrak{p}}} \simeq M_{\mathfrak{q}}. \tag{1.7.4}$$

同理, 对所有 $f \in R \smallsetminus \mathfrak{p}$ 都有

$$\left(R[f^{-1}]\right)_{\mathfrak{p}[f^{-1}]} \simeq R_{\mathfrak{p}}, \quad \left(M[f^{-1}]\right)_{\mathfrak{p}[f^{-1}]} \simeq M_{\mathfrak{p}}. \tag{1.7.5}$$

以下考虑约定 1.1.5 所定义的子模 $IM \subset M$.

引理 1.7.9 设 U 为 R 的乘性子集, I 为 R 的理想, M 为 R-模, 则 $(IM)[U^{-1}]$ 在 $M[U^{-1}]$ 中的像是 $I[U^{-1}]M[U^{-1}]$.

证明 直接检验. 另一种观点是将 IM 表作纯量乘法同态 $\mu : I \underset{R}{\otimes} M \to M$ 的像; 回忆到模的局部化是幺半函子 (命题 1.6.6), 又保持正合列, 于是 $\mu[U^{-1}] : I[U^{-1}] \otimes M[U^{-1}] \to M[U^{-1}]$ 的像即 $(IM)[U^{-1}]$, 然而易见 $\mu[U^{-1}]$ 是 $M[U^{-1}]$ 上的纯量乘法同态. □

命题 1.7.10 设 $\mathfrak{m}$ 为 R 的极大理想, M 为 R-模, 则对所有 $p \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ 皆有 R-模的典范同构 $\mathfrak{m}^p M / \mathfrak{m}^{p+1} M \xrightarrow{\sim} \mathfrak{m}^p M_{\mathfrak{m}} / \mathfrak{m}^{p+1} M_{\mathfrak{m}}$.

证明 根据引理 1.7.9 与局部化的正合性,

$$\left(\mathfrak{m}^p M / \mathfrak{m}^{p+1} M\right)_{\mathfrak{m}} \xrightarrow{\sim} \mathfrak{m}^p M_{\mathfrak{m}} / \mathfrak{m}^{p+1} M_{\mathfrak{m}}.$$

然而 $\mathfrak{m}^p M / \mathfrak{m}^{p+1} M$ 实则是 $R/\mathfrak{m}$-向量空间, $R \smallsetminus \mathfrak{m}$ 的元素在其上的作用皆可逆, 故泛性质表明其局部化等于自身. □

1.8 环上的代数: 一般性质

回忆到本书考虑的环和代数默认交换. 选定环 R, 对 R-代数有至少三种等价的观点:

1. 带有 R-模结构的环 S, 使得乘法是 R-双线性的;
2. 带有乘法同态 $\mu: S \underset{R}{\otimes} R \to S$ 和幺元同态 $\eta: R \to S$ 的 R-模 S, 满足体现幺元性质与结合律的交换图表

$$\begin{tikzcd} R \otimes S \arrow[r, "\eta\otimes\mathrm{id}"] \arrow[dr, "\sim"'] & S \otimes S \arrow[d, "\mu"] & S \otimes R \arrow[l, "\mathrm{id}\otimes\eta"'] \arrow[dl, "\sim"] \\ & S & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} (S \otimes S) \otimes S \arrow[rr, "a(S,S,S)", "\sim"'] \arrow[d, "\mu\otimes\mathrm{id}"'] & & S \otimes (S \otimes S) \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes\mu"] \\ S \otimes S \arrow[r, "\mu"'] & S & S \otimes S \arrow[l, "\mu"] \end{tikzcd}$$

连同体现乘法交换律的交换图表

$$\begin{tikzcd} S \otimes S \arrow[d, "交换约束"', "\wr"] \arrow[dr, "\mu"] & \\ S \otimes S \arrow[r, "\mu"'] & S. \end{tikzcd}$$

3. 环 S 连同环同态 $\varphi: R \to S$.

在第三种观点下, R-代数之间的同态 $f: S_1 \to S_2$ 相当于使图表

$$\begin{tikzcd} S_1 \arrow[rr, "f"] & & S_2 \\ & R \arrow[ul] \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

交换的环同态 f.

记全体 R-代数构成的范畴为 R-CAlg, 它带有忘却函子 $R\text{-CAlg} \to R\text{-Mod}$; 相关的集合论问题请参考注记 1.1.4.

接着回顾代数的张量积 [7, §7.3]. 对于 R-代数 S_1 和 S_2, 张量积的泛性质从四重 R-线性映射

$$\begin{aligned} S_1 \times S_2 \times S_1 \times S_2 &\to S_1 \otimes S_2 \\ (s_1, s_2, s_1', s_2') &\mapsto s_1 s_1' \otimes s_2 s_2' \end{aligned}$$

诱导 R-模同态

$$\mu_{S_1 \otimes S_2}: (S_1 \otimes S_2) \otimes (S_1 \otimes S_2) \simeq S_1 \otimes S_2 \otimes S_1 \otimes S_2 \to S_1 \otimes S_2;$$

以此为乘法, $S_1 \otimes S_2$ 便成为 R-代数, 其幺元是

$$1_{S_1 \otimes S_2} = 1_{S_1} \otimes 1_{S_2}$$

(对应到同态 $\eta_{S_1 \otimes S_2} = \eta_{S_1} \otimes \eta_{S_2}$), 而乘法的具体刻画是:

$$(s_1 \otimes s_2) \cdot (s_1' \otimes s_2') = s_1 s_1' \otimes s_2 s_2', \quad s_i \in S_i.$$

它带有 R-代数的同态

$$\begin{tikzcd} S_1 \arrow[r, "\iota_{S_1}"] & S_1 \otimes S_2 & S_2 \arrow[l, "\iota_{S_2}"'] \\ s_1 \arrow[r, mapsto] & s_1 \otimes 1 & \\ & 1 \otimes s_2 & s_2. \arrow[l, mapsto] \end{tikzcd}$$

以下调整符号, 将 R-模的张量积写作 $\underset{R}{\otimes}$. 考虑环同态 $\alpha : R \to R'$. 对任意 R-代数 S, 上述同态 $\iota_{R'} : R' \to R' \underset{R}{\otimes} S$ 将 R'-模 $R' \underset{R}{\otimes} S$ 升级为 R'-代数. 这给出范畴与函子的严格交换图表

$$\begin{tikzcd} R\text{-}\mathsf{CAlg} \arrow[r, "R' \underset{R}{\otimes} (\cdot)"] \arrow[d, "忘却"'] & R'\text{-}\mathsf{CAlg} \arrow[d, "忘却"] \\ R\text{-}\mathsf{Mod} \arrow[r, "R' \underset{R}{\otimes} (\cdot)"'] & R'\text{-}\mathsf{Mod}; \end{tikzcd}$$

取 $S = R$ 为例, 由 $r' \otimes r \mapsto r'\alpha(r)$ 给出的 $R' \underset{R}{\otimes} R \simeq R'$ 不仅是 R'-模的同构, 还是 R'-代数的同构, 这是因为两边的乘法和幺元显然相互对应.

进一步, $R' \underset{R}{\otimes} (\cdot) : R\text{-}\mathsf{CAlg} \to R'\text{-}\mathsf{CAlg}$ 还保持两边关于代数的张量积运算, 精确到典范同构. 这些事实既不难手工验证, 也可以从 $R' \underset{R}{\otimes} (\cdot) : R\text{-}\mathsf{Mod} \to R'\text{-}\mathsf{Mod}$ 是辫幺半函子这点来抽象地理解, 见 (1.3.3) 和 [8, 命题 7.1.15].

另一方面, α 给出的函子 $\mathcal{F}_{R \to R'} : R'\text{-}\mathsf{Mod} \to R\text{-}\mathsf{Mod}$ 也提升到代数层次, 这给出范畴与函子的严格交换图表

$$\begin{tikzcd} R'\text{-}\mathsf{CAlg} \arrow[r, "\mathcal{F}_{R \to R'}"] \arrow[d, "忘却"'] & R\text{-}\mathsf{CAlg} \arrow[d, "忘却"] \\ R'\text{-}\mathsf{Mod} \arrow[r, "\mathcal{F}_{R \to R'}"'] & R\text{-}\mathsf{Mod}. \end{tikzcd}$$

命题 1.8.1 给定环同态 $\alpha : R \to R'$, 命题 1.3.3 的伴随对

$$R' \underset{R}{\otimes} (\cdot) : R\text{-}\mathsf{Mod} \rightleftarrows R'\text{-}\mathsf{Mod} : \mathcal{F}_{R \to R'}$$

提升为伴随对

$$R' \underset{R}{\otimes} (\cdot) : R\text{-}\mathsf{CAlg} \rightleftarrows R'\text{-}\mathsf{CAlg} : \mathcal{F}_{R \to R'}.$$

证明 这是 [7, 命题 7.3.10] 的内容, 重点在于对所有 R-代数 A 和 R'-代数 B 证明命题 1.3.3 的双射

$$\mathrm{Hom}_{R'\text{-Mod}}\left(R' \underset{R}{\otimes} A, B\right) \xrightarrow{1:1} \mathrm{Hom}_{R\text{-Mod}}\left(A, \mathcal{F}_{R\to R'}B\right)$$

限制为

$$\mathrm{Hom}_{R'\text{-CAlg}}\left(R' \underset{R}{\otimes} A, B\right) \xrightarrow{1:1} \mathrm{Hom}_{R\text{-CAlg}}\left(A, \mathcal{F}_{R\to R'}B\right).$$

设 R'-代数同态 $\Psi : R' \underset{R}{\otimes} A \to B$ 属于左式, 则其像 $a \mapsto \Psi(1 \otimes a)$ 保持乘法及其幺元:

$$\Psi(1 \otimes a_1 a_2) = \Psi((1 \otimes a_1)(1 \otimes a_2)) = \Psi(1 \otimes a_1)\Psi(1 \otimes a_2), \quad \Psi(1 \otimes 1) = 1;$$

反之设 R-代数同态 $\psi : A \to \mathcal{F}_{R\to R'}B$ 属于右式, 则其像 $r' \otimes a \mapsto r'\psi(a)$ 保持乘法:

$$(r_1' \otimes a_1)(r_2' \otimes a_2) = r_1' r_2' \otimes a_1 a_2 \mapsto r_1' r_2' \psi(a_1 a_2) = r_1'\psi(a_1) \cdot r_2'\psi(a_2),$$

它显然也保持乘法幺元. 明所欲证. □

命题 1.3.5 的性质

$$\mathcal{F}_{R\to R'}\mathcal{F}_{R'\to R''} = \mathcal{F}_{R\to R''}, \quad R'' \underset{R'}{\otimes} \left(R' \underset{R}{\otimes} (\cdot)\right) \simeq R'' \underset{R}{\otimes} (\cdot)$$

在 R-代数的层次同样成立. 一如模的情形, 惯常省略符号 $\mathcal{F}_{R\to R'}$.

现在来探讨 $R' \underset{R}{\otimes} (\cdot) : R\text{-CAlg} \to R'\text{-CAlg}$ 的两类特例: 取商和局部化. 以下的 S 均取为 R-代数, 相应的环同态 $R \to S$ 记为 φ.

命题 1.8.2 设 I 为 R 的理想, 则 $\varphi(I)$ 在 S 中生成的理想是 $\varphi(I)S$. 将 $S/\varphi(I)S$ 通过 φ 视为 R/I-代数, 则有 R/I-代数的同构

$$\begin{gathered}(R/I) \underset{R}{\otimes} S \xrightarrow{\sim} S/\varphi(I)S \\ (r + I) \otimes s \mapsto \varphi(r)s + \varphi(I)S,\end{gathered}$$

其中 $r \in R$ 而 $s \in S$.

证明 将 S 通过 φ 视为 R-模, 则按照约定 1.1.5 的符号有 $IS = \varphi(I)S$; 命题 1.3.7 遂给出 R-模同构 $(R/I) \underset{R}{\otimes} S \xrightarrow{\sim} S/\varphi(S)S$, 映法如断言. 再证此同构保持乘法即可, 毫无困难. □

定义–命题 1.8.3 设 U 为 R 的乘性子集, 则 $\varphi(U)$ 是 S 的乘性子集. 将 $S[\varphi(U)^{-1}]$ 通过 φ 视为 $R[U^{-1}]$-代数, 则有 $R[U^{-1}]$-代数的同构

$$\begin{gathered}R[U^{-1}] \underset{R}{\otimes} S \xrightarrow{\sim} S[\varphi(U)^{-1}] \\ \frac{r}{u} \otimes s \mapsto \frac{\varphi(r)s}{\varphi(u)},\end{gathered}$$

其中 $r \in R$, $u \in U$ 而 $s \in S$. 因此两边的 $R[U^{-1}]$-代数可以无歧义地记为 $S[U^{-1}]$.

证明 无妨直接验证, 但也可以归结为函子 $S \mapsto S[\varphi(U)^{-1}]$ 的以下伴随关系:

$$\mathrm{Hom}_{R[U^{-1}]\text{-}\mathsf{CAlg}}\left(S[\varphi(U)^{-1}], T\right) \xleftrightarrow{1:1} \mathrm{Hom}_{R\text{-}\mathsf{CAlg}}\left(S, T\right).$$

为了说明这点, 考虑 $R[U^{-1}]$-代数 T, 记相应的环同态 $R[U^{-1}] \to T$ 为 ψ.

- ◇ 设有 R-代数的同态 $f : S \to T$, 则 $f(\varphi(U)) \subset T^\times$, 故局部化的泛性质给出环同态 $g : S[\varphi(U^{-1})] \to T$; 这是 $R[U^{-1}]$-代数同态, 因为

$$g\left(\frac{\varphi(r)}{\varphi(u)}\right) = f(\varphi(u))^{-1} f(\varphi(r)) = \psi\left(\frac{u}{1}\right)^{-1} \psi\left(\frac{r}{1}\right) = \psi\left(\frac{r}{u}\right), \quad \frac{r}{u} \in R[U^{-1}].$$

- ◇ 反之设有 $R[U^{-1}]$-代数的同态 $g : S[\varphi(U)^{-1}] \to T$, 取环同态 f 为 $S \to S[\varphi(U)^{-1}] \xrightarrow{g} T$ 的合成; 这是 R-代数同态, 因为

$$f(\varphi(r)) = g\left(\frac{\varphi(r)}{1}\right) = g\left(\frac{\varphi(r)}{\varphi(1)}\right) = \psi\left(\frac{r}{1}\right), \quad r \in R.$$

- ◇ 基于环的局部化的泛性质, 以上的 $f \leftrightarrow g$ 互为逆.

综上, $S \mapsto S[\varphi(U)^{-1}]$ 是 $\mathcal{F}_{R \to R[U^{-1}]}$ 的左伴随, 单位态射 $S \mapsto S[\varphi(U)^{-1}]$ 是在伴随关系中代入 $T = S[\varphi(U)^{-1}]$ 和 $g = \mathrm{id}_T$ 的产物, 亦即 $s \mapsto \frac{s}{1}$.

与命题 1.8.1 比较, 左伴随的唯一性表明 $R[U^{-1}] \underset{R}{\otimes} S \simeq S[\varphi(U)^{-1}]$; 此同构是对单位态射 $s \mapsto \frac{s}{1}$ 应用 $R[U^{-1}] \underset{R}{\otimes} (\cdot)$ 的左伴随性质所给出的, 易见这正是断言中的映射. □

推论 1.8.4 设 R_1 和 R_2 为环, U 为 $R_1 \times R_2$ 的乘性子集. 记 U_i 为 U 在 R_i 中的像 $(i = 1, 2)$, 则有环同构

$$\begin{gathered}(R_1 \times R_2)[U^{-1}] \xrightarrow{\sim} R_1[U_1^{-1}] \times R_2[U_2^{-1}] \\ \frac{(r_1, r_2)}{(u_1, u_2)} \mapsto \left(\frac{r_1}{u_1}, \frac{r_2}{u_2}\right).\end{gathered}$$

证明 易见 $(r_1, r_2) \mapsto \left(\frac{r_1}{1}, \frac{r_2}{1}\right)$ 给出环同态 $R_1 \times R_2 \to R_1[U_1^{-1}] \times R_2[U_2^{-1}]$, 它映 U 的元素为可逆元, 故诱导 $(R_1 \times R_2)[U^{-1}] \to R_1[U_1^{-1}] \times R_2[U_2^{-1}]$.

为了说明这是同构, 对 $i \in \{1, 2\}$ 将 R_i 视为 $R_1 \times R_2$-代数, 则 $R_i[U_i^{-1}] \simeq R[U^{-1}] \underset{R}{\otimes} R_i$ (定义–命题 1.8.3), 而上述同态在模的层次化为标准同构 $R[U^{-1}] \underset{R}{\otimes} (R_1 \oplus R_2) \xrightarrow{\sim} (R[U^{-1}] \underset{R}{\otimes} R_1) \oplus (R[U^{-1}] \underset{R}{\otimes} R_2)$. □

1.9 环上的代数: 有限性质

接续上一节的讨论. 对于 R-代数 S 及其子集 S_0, 由 S_0 生成的子代数是所有含 S_0 的子代数之交, 其元素是关于 S_0 的所有 R-系数多项式.

指定 R-代数同态 $\alpha : R[X_1, \ldots, X_n] \to S$ 相当于指定元素 $x_1, \ldots, x_n \in S$, 对应由 $\alpha(X_i) = x_i$ 刻画; α 满相当于说 $x_1, \ldots, x_n$ 生成 R-代数 $R[X_1, \ldots, X_n]$.

定义 1.9.1 设 S 为 R-代数.

- 如果存在 $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ 和 R-代数的满同态 $\alpha : R[X_1, \ldots, X_n] \to S$, 则称 S 或相应的环同态 $R \to S$ 是**有限生成**的或**有限型**的.
- 如果在 (i) 中进一步要求可取到 α 使得 $\ker(\alpha)$ 是有限生成理想, 则称 S 或相应的环同态 $R \to S$ 是**有限展示**的.
- 如果 S 作为 R-模是有限生成的, 则称 S 或相应的环同态 $R \to S$ 是**有限**的.

注记 1.9.2 首先, 观察到有限条件强于有限生成: 若 S 作为 R-模有生成元 $x_1, \ldots, x_m$, 则可定义 R-代数的满同态 $\alpha : R[X_1, \ldots, X_m] \to S$ 使得 $\alpha(X_i) = x_i$ 恒成立.

其次, 若 S 作为 R-模是有限展示的, 则作为 R-代数亦然: 为了得到上述生成元 $x_1, \ldots, x_n$ 相对于 R-代数运算的所有关系, 以表 S 为 $R[X_1, \ldots, X_n]$ 的商代数, 仅需在已有的有限多个 R-线性关系之外添入 $n^2 + 1$ 个关系

$$x_i x_j - \sum_{k=1}^{n} a_{ijk} x_k = 0, \quad 1_S - \sum_{k=1}^{n} b_k x_k = 0, \quad a_{ijk}, b_k \in R.$$

引理 1.9.3 考虑环同态 $R \to S$ 和 S-模 M.

(i) 若 M 作为 R-模有限生成, 则它作为 S-模亦然.

(ii) 设 $R \to S$ 有限; 若 M 作为 S-模是有限生成的, 则它作为 R-模亦然.

(iii) 设 $R \to S$ 有限生成; 若 M 作为 R-模是有限展示的, 则它作为 S-模亦然.

证明 对于 (i), 在 R 上的一族生成元当然也是 S 上的一族生成元.

对于 (ii), 取 M 的一族生成元 $x_1, \ldots, x_n$ 和 S 作为 R-模的一族生成元 $y_1, \ldots, y_m$, 则 $\{y_i x_j\}_{i,j}$ 生成 R-模 M.

关于 (iii) 的论证相对曲折. 不妨设 $S = R[Y_1, \ldots, Y_m]/I$, 其中 I 是任意理想. 取 M 作为 R-模的生成元 $x_1, \ldots, x_n$, 其间的关系由形如

$$\sum_{k=1}^{n} r_{hk} x_k = 0, \quad r_{hk} \in R, \quad 1 \leq h \leq p$$

的 p 个等式生成; 换言之, R-模同态 $R^{\oplus n} \twoheadrightarrow M$ 的核由相应的元素 $\sum_{k=1}^{n} r_{hk} e_k$ 生成, 其中 $1 \leq h \leq p$ 而 $e_1, \ldots, e_n$ 代表 $R^{\oplus n}$ 的标准基.

记 $y_i := Y_i + I \in S$. 取一族元素 $a_{ijk} \in R$ 使得 $y_i x_j = \sum_k a_{ijk} x_k$ 恒成立. 兹断言

$$\begin{array}{ccccccc} S^{\oplus p} \oplus S^{\oplus mn} & \xrightarrow{\quad\gamma\quad} & S^{\oplus n} & \xrightarrow{\quad\beta\quad} & M & \longrightarrow & 0 \\ & & e_k & \longmapsto & x_k & & \end{array}$$

$$(e_h, 0) \longmapsto \sum_{k=1}^{n} r_{hk} e_k$$

$$(0, e_{ij}) \longmapsto y_i e_j - \sum_{k=1}^{n} a_{ijk} e_k$$

是 S-模的正合列, 其中 e_h 和 e_{ij} 仍代表标准基的元素. 首先, 因为 $x_1, \ldots, x_n$ 也生成 S-模 M, 同态 β 满. 其次, 先前的讨论确保 $\mathrm{im}(\gamma) \subset \ker(\beta)$; 问题在于说明 $\ker(\beta) \subset \mathrm{im}(\gamma)$.

设有 $\sum_{k=1}^{n} b_k x_k = 0$, 其中 $b_k \in S$. 今将往证 $\sum_{k=1}^{n} b_k e_k \in \mathrm{im}(\gamma)$. 根据条件, 存在 $g_k \in R[Y_1, \ldots, Y_m]$ 使得 $b_k = g_k(y_1, \ldots, y_m)$; 利用形如 $\gamma(0, e_{ij})$ 的元素不断降次, 问题化约到 $g_k \in R$ 对所有 k 皆成立的情形. 此时得到关于 $x_1, \ldots, x_n$ 的 R-线性关系, 故 $\sum_{k=1}^{n} b_k e_k$ 必来自 $R^{\oplus mn}$ 的像, 因而来自 $S^{\oplus mn}$ 部分的像.

综上, M 是有限展示 S-模. □

引理 1.9.4 (塔性质) *考虑环同态* $R \to R' \to R''$.

(i) 若 $R \to R'$ 和 $R' \to R''$ 均为有限生成 (或有限展示, 或有限) 的, 则其合成 $R \to R''$ 亦然.

(ii) 若 $R \to R''$ 是有限生成 (或有限) 的, 则 $R' \to R''$ 亦然.

(iii) 若 $R \to R''$ 是有限展示的, $R \to R'$ 是有限生成的, 则 $R' \to R''$ 是有限展示的.

证明 (i). 先处理有限生成情形. 设 $x_1, \ldots, x_n$ 生成 R-代数 R', 而 $y_1, \ldots, y_m$ 生成 R'-代数 R'', 则显然 $x_1, \ldots, x_n$ 的像连同 $y_1, \ldots, y_m$ 生成 R-代数 R''.

接着处理有限展示情形. 存在同构

$$R'' \overset{R'\text{-代数}}{\simeq} R'[X_1, \ldots, X_n]/(f_1, \ldots, f_m), \quad f_i \in R'[X_1, \ldots, X_n],$$
$$R' \overset{R\text{-代数}}{\simeq} R[Y_1, \ldots, Y_r]/(g_1, \ldots, g_s), \quad g_j \in R[Y_1, \ldots, Y_r].$$

为每个 f_i 选取 $R[X_1, \ldots, X_n, Y_1, \ldots, Y_r]$ 中的代表元 $\tilde{f}_i$, 立得 R-代数的同构

$$R'' \simeq R[X_1, \ldots, X_n, Y_1, \ldots, Y_r]/(\tilde{f}_1, \ldots, \tilde{f}_m, g_1, \ldots, g_s).$$

因此 R'' 是有限展示的 R-代数.

对于有限情形, 为了说明 R'' 是有限生成 R-模, 在引理 1.9.3 (ii) 中代入 $S = R'$ 和 $M = R''$ (视为 R'-模) 即可.

(ii). 对于有限生成情形, 设 $y_1, \ldots, y_m$ 生成 R-代数 R'', 亦即任意 $y \in R''$ 总能表作它们的 R-系数多项式, 则 y 当然也能表作它们的 R'-系数多项式, 故 $y_1, \ldots, y_m$ 生成 R'-代数 R''. 有限情形的论证类似.

(iii). 不妨设 $R'' = R[X_1, \ldots, X_n]/(f_1, \ldots, f_k)$ 而 $R' = R[Y_1, \ldots, Y_m]/I$, 其中 $f_1, \ldots, f_k \in R[X_1, \ldots, X_n]$ 而 $I \subset R[Y_1, \ldots, Y_m]$ 是任意理想. 对所有 $1 \leq i \leq m$, 记 $y_i := Y_i + I \in R'$ 在 R'' 中的像为 $h_i + (f_1, \ldots, f_k)$. 分段取商可得

$$\begin{aligned} R'' &= R[X_1, \ldots, X_n]/(f_1, \ldots, f_k) \\ &\simeq \frac{R[Y_1, \ldots, Y_m, X_1, \ldots, X_n]}{(IR[X_1, \ldots, X_n] + (f_1, \ldots, f_k, Y_1 - h_1, \ldots, Y_m - h_m))} \\ &\simeq R'[X_1, \ldots, X_n]/(f_1, \ldots, f_k, y_1 - h_1, \ldots, y_m - h_m), \end{aligned}$$

而且这是 R'-代数的同构. □

以下性质表明若 S 是有限展示 R-代数, 则定义 1.9.1 中第二项的条件对所有 α 皆成立.

命题 1.9.5 设 $R \to S$ 是有限展示的, 则对所有 $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ 及 R-代数的满同态 $\alpha : R[Y_1, \ldots, Y_m] \to S$, 其核 $\ker(\alpha)$ 都是有限生成理想.

证明 不妨设 $S = R[X_1, \ldots, X_n]/(f_1, \ldots, f_k)$. 对所有 $1 \leq i \leq m$ 将 $\alpha(Y_i)$ 表作 $h_i + (f_1, \ldots, f_k)$, 则有代数的同构

$$\frac{R[X_1, \ldots, X_n, Y_1, \ldots, Y_m]}{(f_1, \ldots, f_k, Y_1 - h_1, \ldots, Y_m - h_m)} \xrightarrow{\sim} S,$$

映法是以 $h_i + (f_1, \ldots, f_k)$ 代入变元 Y_i.

下一步是设法消去 $X_1, \ldots, X_n$. 对所有 $1 \leq j \leq n$, 选取 $g_j \in R[Y_1, \ldots, Y_m]$ 使得 $\alpha(g_j) = X_j + (f_1, \ldots, f_k)$. 记 f_i' (或 h_i') 为在 f_i (或 h_i) 中用 g_j 代入变元 X_j 的产物 $(j = 1, \ldots, n)$. 现在便可以将 α 等同于同态

$$\begin{aligned} R[Y_1, \ldots, Y_m] &\to \frac{R[X_1, \ldots, X_n, Y_1, \ldots, Y_m]}{(f_1, \ldots, f_k, h_1 - Y_1, \ldots, h_m - Y_m)} \\ &\xrightarrow{\text{代值}} \frac{R[Y_1, \ldots, Y_m]}{(f_1', \ldots, f_k', h_1' - Y_1, \ldots, h_m' - Y_m)}, \end{aligned}$$

这映每个 Y_i 为 Y_i 的陪集. 因此 $\ker(\alpha)$ 有限生成. □

最后来探讨环的变换与张量积对定义 1.9.1 的影响.

命题 1.9.6 设 $R \to R'$ 为环同态, 则相应的函子 $R' \underset{R}{\otimes} (\cdot) : R\text{-CAlg} \to R'\text{-CAlg}$ 保持有限生成 (或有限展示, 或有限) 性质.

如果 S_1 和 S_2 都是有限生成 (或有限展示, 或有限) 的 R-代数, 则 $S_1 \underset{R}{\otimes} S_2$ 亦然.

证明 先处理第一部分. 设 S 为有限生成 R-代数, 选定满同态 $\alpha : R[X_1, \ldots, X_n] \to S$, 记 $I := \ker(\alpha)$, $S' := R' \underset{R}{\otimes} S$. 基于 R'-代数的同构 $R' \underset{R}{\otimes} R[X_1, \ldots, X_n] \simeq R'[X_1, \ldots, X_n]$, 由 R'-模的正合列

$$R' \underset{R}{\otimes} I \to R'[X_1, \ldots, X_n] \xrightarrow[\text{环同态}]{\mathrm{id}_{R'} \otimes \alpha} S' \to 0.$$

可见 S' 是有限生成 R'-代数.

进一步要求 S 是有限展示的, 在上述构造中可设 I 是有限生成 R-模, 则 $R' \underset{R}{\otimes} I$ 是有限生成 R'-模 (命题 1.5.8), 正合性遂蕴涵 $\ker(\mathrm{id}_{R'} \otimes \alpha)$ 是有限生成理想. 综上, S' 是有限展示 R'-代数.

关于有限性质的版本直接来自命题 1.5.8.

对于第二部分, 设 S_1 和 S_2 皆为有限生成 R-代数, 则第一部分 (取 $R' = S_1$) 蕴涵 $S_1 \underset{R}{\otimes} S_2$ 是有限生成 S_1-代数, 再由引理 1.9.4 (i) 即知 $S_1 \underset{R}{\otimes} S_2$ 是有限生成 R-代数. 同理可证有限展示和有限 R-代数的版本. □

1.10 素谱

以下定义涉及环的素理想与极大理想, 参看 [7, 定义 5.3.1].

定义 1.10.1 (素谱与极大理想谱) 设 R 为环, 记

$$\mathrm{Spec}(R) := \{\mathfrak{p} \subset R : \text{素理想}\},$$
$$\mathrm{MaxSpec}(R) := \{\mathfrak{m} \subset R : \text{极大理想}\}.$$

我们称 $\mathrm{Spec}(R)$ 为 R 的素谱, 称 $\mathrm{MaxSpec}(R)$ 为 R 的极大理想谱.

回忆到 $\mathrm{MaxSpec}(R) \subset \mathrm{Spec}(R)$. 对理想 $I \subset R$ 和元素 $f \in R$, 分别定义

$$\begin{aligned} V(I) &:= \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R) : \mathfrak{p} \supset I\}, \\ D(f) &:= \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R) : f \notin \mathfrak{p}\}. \end{aligned} \tag{1.10.1}$$

另对所有 $f_1, \ldots, f_k \in R$ 记 $V(f_1, \ldots, f_k) := V((f_1, \ldots, f_k))$, 其中 $(f_1, \ldots, f_k)$ 代表 $f_1, \ldots, f_k$ 在 R 中生成的理想.

引理 1.10.2 以上定义的 $V(I)$ 满足下述性质:

(i) $V(0) = \mathrm{Spec}(R)$ 而 $V(R) = \varnothing$;

(ii) 若 $I \subset J$ 则 $V(I) \supset V(J)$;

(iii) 设 $(I_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{A}}$ 为一族理想, 则 $V(\sum_\alpha I_\alpha) = \bigcap_\alpha V(I_\alpha)$;

(iv) 设 I, J 为理想, 则 $V(I) \cup V(J) = V(I \cap J) = V(IJ)$.

在 (iii) 中须将 R 中的理想空和规定为 0, 将 $\mathrm{Spec}(R)$ 中的子集空交规定为 $\mathrm{Spec}(R)$.

证明 断言 (i) 和 (ii) 是定义的直接操演.

对于 (iii), 显然有 $\mathfrak{p} \supset \sum_\alpha I_\alpha$ 当且仅当 $\forall \alpha \in \mathcal{A}$, $\mathfrak{p} \supset I_\alpha$, 而后者也相当于说 $\mathfrak{p} \in \bigcap_\alpha V(I_\alpha)$.

对于 (iv), 注意到 $IJ \subset I \cap J$, 故 (ii) 蕴涵 $V(I) \cup V(J) \subset V(I \cap J) \subset V(IJ)$, 再证 $V(I) \cup V(J) \supset V(IJ)$ 即可. 今将对补集证明反向包含: 设 $\mathfrak{p} \notin V(I) \cup V(J)$, 则存在 $a \in I \smallsetminus \mathfrak{p}$ 和 $b \in J \smallsetminus \mathfrak{p}$, 素理想的定义蕴涵 $ab \in IJ \smallsetminus \mathfrak{p}$, 故 $\mathfrak{p} \notin V(IJ)$. □

引理 1.10.3 以上定义的 $D(f)$ 满足下述性质:

(i) $D(0) = \varnothing$;

(ii) $D(fg) = D(f) \cap D(g)$;

(iii) 若 I 是 R 的理想, 由其子集 Σ 生成, 则 $\mathrm{Spec}(R) \smallsetminus V(I) = \bigcup_{f \in \Sigma} D(f)$;

(iv) $\mathrm{Spec}(R) \smallsetminus V(f) = D(f)$;

证明 断言 (i) 显然.

对于 (ii), 素理想 $\mathfrak{p}$ 的定义表明 $fg \notin \mathfrak{p}$ 当且仅当 $f \notin \mathfrak{p}$ 且 $g \notin \mathfrak{p}$.

对于 (iii), 观察到对于所有素理想 $\mathfrak{p}$, 我们有 $\mathfrak{p} \not\supset I$ 当且仅当存在 $f \in \Sigma$ 使得 $f \notin \mathfrak{p}$.

对于 (iv), 在 (iii) 中代入 $\Sigma = \{f\}$ 即可. □

为了确保关于 $\mathrm{Spec}(R)$ 的理论有实质内容, 须知悉 $\mathrm{Spec}(R)$ 或上述子集何时非空. 相关结论表述如下.

引理 1.10.4 设 R 为环, 而 I 是 R 的真理想, 则存在极大理想 $\mathfrak{m} \supset I$, 换言之 $V(I) \cap \mathrm{MaxSpec}(R) \neq \varnothing$.

特别地, 取 $I = 0$ 可见非零环总有极大理想.

证明 环论的基本内容, 见 [7, 命题 5.3.6]. □

推论 1.10.5 设 R 为环.

(i) 设 I 为 R 的理想, 则 $V(I) = \varnothing \iff I = R$.

(ii) 设 $f \in R$, 则 $D(f) = \mathrm{Spec}(R) \iff f \in R^\times$.

证明 对于 (i), 显然 $V(R) = \varnothing$; 反之若 I 是真理想, 则引理 1.10.4 说明 $V(I) \neq \varnothing$.

对于 (ii), 引理 1.10.3 (iv) 表明 $D(f) = \mathrm{Spec}(R) \iff V(f) = \varnothing$, 代入 (i). □

推论 1.10.6 给定 R 的子集 Σ, 我们有 $\bigcup_{f \in \Sigma} D(f) = \mathrm{Spec}(R)$ 当且仅当存在 $f_1, \ldots, f_m \in \Sigma$ 和 $r_1, \ldots, r_m \in R$, 其中 $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, 使得

$$r_1 f_1 + \cdots + r_m f_m = 1.$$

证明 记 I 为 Σ 生成的理想. 引理 1.10.3 (iii) 表明 $\bigcup_{f\in\Sigma} D(f) = \mathrm{Spec}(R)$ 等价于 $V(I)=\varnothing$, 推论 1.10.5 (i) 表明后者又等价于 $I=R$. □

定义–命题 1.10.7 (Zariski 拓扑) 在素谱 $\mathrm{Spec}(R)$ 上可赋予唯一的拓扑结构, 使得子集 $Z \subset \mathrm{Spec}(R)$ 为闭当且仅当存在理想 I 使得 $Z = V(I)$; 进一步, 形如 $D(f)$ 的子集为开, 且它们构成 $\mathrm{Spec}(R)$ 的一组基 (定义 A.1.1).

赋予 $\mathrm{MaxSpec}(R)$ 相应的子空间拓扑. 在 $\mathrm{Spec}(R)$ 和 $\mathrm{MaxSpec}(R)$ 上的这种拓扑结构称为 Zariski 拓扑.

证明 为了得到所刻画的唯一拓扑, 所需的只是验证形如 $V(I)$ 的子集对任意交和有限并封闭; 这正是引理 1.10.2 的应用.

引理 1.10.3 说明形如 $D(f)$ 的子集对 Zariski 拓扑为开, 并且构成拓扑基. □

以下一系列结论是代数性质在拓扑空间上的反映.

引理 1.10.8 对于 $\mathrm{Spec}(R)$ 的任意子集 $\mathcal{S}$, 其闭包 $\overline{\mathcal{S}}$ 等于 $V\left(\bigcap_{\mathfrak{p}\in\mathcal{S}}\mathfrak{p}\right)$; 当 $\mathcal{S}=\varnothing$ 时规定素理想的空交为 R.

证明 设 J 为 R 的任意理想, 则 $\mathcal{S}\subset V(J)$ 当且仅当所有 $\mathfrak{p}\in\mathcal{S}$ 皆满足 $\mathfrak{p}\supset J$, 当且仅当 $\bigcap_{\mathfrak{p}\in\mathcal{S}}\mathfrak{p}\supset J$, 所以 $V\left(\bigcap_{\mathfrak{p}\in\mathcal{S}}\mathfrak{p}\right)$ 是包含 $\mathcal{S}$ 的最小闭集. □

命题 1.10.9 设 $\mathfrak{p}$ 为 R 的素理想, 则 $\mathfrak{p}$ 是 $\mathrm{Spec}(R)$ 的闭点 (定义 A.1.2) 当且仅当它是极大理想.

证明 引理 1.10.8 表明 $\mathfrak{p}$ 是闭点等价于 $V(\mathfrak{p})=\{\mathfrak{p}\}$. 若 $\mathfrak{p}$ 极大, 则显然有 $V(\mathfrak{p})=\{\mathfrak{p}\}$. 反之设 $V(\mathfrak{p})=\{\mathfrak{p}\}$, 以引理 1.10.4 取极大理想 $\mathfrak{m}\supset\mathfrak{p}$, 则 $\mathfrak{m}=\mathfrak{p}$ 故 $\mathfrak{p}$ 极大. □

记环 (未必交换) 所成的范畴为 Ring, 交换环在其中构成全子范畴 CRing. 记拓扑空间所成范畴为 Top. 此处同样有集合论的细节, 详见注记 1.1.4.

命题 1.10.10 设 $\varphi: R\to R'$ 为环同态, 则有良定义的映射

$$\begin{aligned}\mathrm{Spec}(\varphi):\mathrm{Spec}(R')&\to\mathrm{Spec}(R)\\ \mathfrak{p}'&\mapsto\varphi^{-1}(\mathfrak{p}'),\end{aligned}$$

它对 Zariski 拓扑连续, 并且满足

$$\mathrm{Spec}(\varphi)^{-1}(V(I)) = V(\varphi(I)R'),\quad \mathrm{Spec}(\varphi)^{-1}(D(f)) = D(\varphi(f)).$$

上述构造使 Spec 成为函子 $\mathsf{CRing}^{\mathrm{op}}\to\mathsf{Top}$.

证明 为了说明 $\mathrm{Spec}(\varphi)$ 定义合理, 证 $\varphi^{-1}(\mathfrak{p}')$ 总是素理想即可: 首先 $\varphi^{-1}(\mathfrak{p}')$ 显然是理想, 而 $\varphi(1_R)=1_{R'}\notin\mathfrak{p}'$ 蕴涵它是真理想, 其次

$$\begin{aligned} xy\in\varphi^{-1}(\mathfrak{p}') &\iff \varphi(x)\varphi(y)\in\mathfrak{p}' \iff \varphi(x)\in\mathfrak{p}' \text{ 或 } \varphi(y)\in\mathfrak{p}' \\ &\iff x\in\varphi^{-1}(\mathfrak{p}') \text{ 或 } y\in\varphi^{-1}(\mathfrak{p}').\end{aligned}$$

对于 R 的任意理想 I,

$$\begin{aligned}\operatorname{Spec}(\varphi)^{-1}(V(I)) &= \left\{\mathfrak{p}' \in \operatorname{Spec}(R') : \varphi^{-1}(\mathfrak{p}') \supset I\right\} \\ &= \{\mathfrak{p}' \in \operatorname{Spec}(R)' : \varphi(I) \subset \mathfrak{p}'\} = V(\varphi(I)R'),\end{aligned}$$

由此知 $\operatorname{Spec}(\varphi)$ 连续. 对此代入 $I = (f)$ 并且运用引理 1.10.3 (iv), 可得

$$\begin{aligned}\operatorname{Spec}(\varphi)^{-1}(D(f)) &= \operatorname{Spec}(R') \smallsetminus \operatorname{Spec}(\varphi)^{-1}(V(f)) \\ &= \operatorname{Spec}(R)' \smallsetminus V(\varphi(f)) = D(\varphi(f)).\end{aligned}$$

最后, 显然有 $\operatorname{Spec}(\mathrm{id}_R) = \mathrm{id}_{\operatorname{Spec}(R)}$ 和 $\operatorname{Spec}(\psi\varphi) = \operatorname{Spec}(\varphi)\operatorname{Spec}(\psi)$, 其中 $R \xrightarrow{\varphi} R' \xrightarrow{\psi} R''$ 为环同态, 故 Spec 给出函子. □

关于诱导拓扑, 开嵌入和闭嵌入的回顾可见 §A.1.

推论 1.10.11 *考虑环 R 的理想 I 和乘性子集 U.*

(i) *商同态 $R \to R/I$ 诱导的映射*

$$i_I : \operatorname{Spec}(R/I) \xrightarrow{\sim} V(I) \subset \operatorname{Spec}(R)$$

是以 $V(I)$ 为像的闭嵌入; 它映子集 $V(\overline{J})$ 为 $V(J)$, 其中 $\overline{J}$ 是 R/I 的任意理想, 而 $J \subset R$ 为其原像.

(ii) *典范同态 $R \to R[U^{-1}]$ 诱导同胚*

$$j_U : \operatorname{Spec}(R[U^{-1}]) \xrightarrow{\sim} \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(R) : \mathfrak{p} \cap U = \varnothing\} \subset \operatorname{Spec}(R),$$

其像带来自 $\operatorname{Spec}(R)$ 的诱导拓扑.

(iii) *设 $f \in R$, 则 $R \to R[f^{-1}]$ 诱导以 $D(f)$ 为像的开嵌入 $j_f : \operatorname{Spec}(R[f^{-1}]) \to \operatorname{Spec}(R)$; 它映子集 $D(\frac{g}{u})$ 为 $D(g) \cap D(f) = D(fg)$.*

证明 对于 (i), 不妨设 $I \subsetneq R$. 由 (1.1.1) 的保序双射 $\overline{J} \leftrightarrow J$ 及其后讨论可见 i_I 是以闭子集 $V(I)$ 为像的单射. 已知 i_I 连续. 先前的保序双射蕴涵 $i_I(V(\overline{J})) = V(J)$, 故 i_I 还是闭映射. 同胚性质得证.

对于 (ii), 命题 1.7.6 (ii) 表明所示映射是连续双射, 再证其为开映射即可. 考虑 $\operatorname{Spec}(R[U^{-1}])$ 的开子集 $D(\frac{g}{u})$, 对于不交 U 的 $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(R)$, 回忆到 $\mathfrak{p}$ 的原像是 $\mathfrak{p}[U^{-1}]$, 命题 1.7.6 (ii) 蕴涵

$$\frac{g}{u} \in \mathfrak{p}[U^{-1}] \iff \frac{g}{1} \in \mathfrak{p}[U^{-1}] \iff g \in \mathfrak{p}[U^{-1}] \cap R = \mathfrak{p}.$$

因此 $D(\frac{g}{u})$ 的像等于 $D(g) \cap \operatorname{im}(j_U)$, 开性得证.

在 (ii) 的结论和证明中取 $U = f^{\mathbb{Z}_{\geq 0}}$ 即得 (iii). □

最后补充一则方便的结论.

引理 1.10.12 设 R 为整环, 则在分式域 $\mathrm{Frac}(R)$ 中有子环的等式

$$R = \bigcap_{\mathfrak{m}:\text{极大理想}} R_{\mathfrak{m}}.$$

证明 说明包含关系 $\supset$ 即可. 设 $x \in \mathrm{Frac}(R)$ 属于所有 $R_{\mathfrak{m}}$ 之交. 定义 R 的理想 $I := \{r \in R : rx \in R\}$. 若 $I = R$ 则从 $1 \in I$ 可得 $x \in R$. 若 $I \neq R$, 以引理 1.10.4 可见存在极大理想 $\mathfrak{m} \supset I$, 而从 $x \in R_{\mathfrak{m}}$ 可见存在 $u \in I \smallsetminus \mathfrak{m}$, 矛盾. □

1.11 局部环

局部环的研究是本书的重头戏.

定义 1.11.1 如果环 R 有唯一的极大理想 $\mathfrak{m}$, 则称之为**局部环**, 相关资料也记为 $(R, \mathfrak{m})$, 并称 $R/\mathfrak{m}$ 为 R 的**剩余类域**.

鉴于命题 1.10.9, 局部环的定义也相当于说 $\mathrm{Spec}(R)$ 有唯一闭点.

定义 1.11.2 如果非零环 R 仅有有限多个极大理想, 则称之为**半局部环**.

引理 1.11.3 对于非零环 R, 以下性质等价:

(i) R 是局部环;

(ii) 存在极大理想 $\mathfrak{m}$ 使得 $R \smallsetminus \mathfrak{m} = R^{\times}$;

(iii) $R \smallsetminus R^{\times}$ 是 R 的理想;

(iv) 对所有 $a \in R$, 必有 $a \in R^{\times}$ 或 $1 - a \in R^{\times}$.

证明 (i) $\implies$ (ii): 说明 $R \smallsetminus \mathfrak{m} \subset R^{\times}$ 即可. 取 $\mathfrak{m}$ 为 R 的唯一极大理想. 若 $a \in R \smallsetminus R^{\times}$, 则 $(a) \neq R$ 而引理 1.10.4 说明有极大理想 $\mathfrak{m}' \supset (a)$, 从而 $a \in \mathfrak{m}' = \mathfrak{m}$.

(ii) $\implies$ (iii): 显然.

(iii) $\implies$ (iv): 记 $\mathfrak{m} := R \smallsetminus R^{\times}$. 若 $a \notin R^{\times}$ 则 $a \in \mathfrak{m}$, 然而因为 $\mathfrak{m}$ 是真理想, 这又导致 $1 - a \notin \mathfrak{m}$, 从而 $1 - a \in R^{\times}$.

(iv) $\implies$ (i): 若 R 有相异极大理想 $\mathfrak{m}, \mathfrak{m}'$, 则 $\mathfrak{m} + \mathfrak{m}' = R$, 由中国剩余定理 1.1.2 可得 $a \in R$ 使得 $a \in \mathfrak{m}$ 而 $a - 1 \in \mathfrak{m}'$; 然而这导致 a 和 $1 - a$ 俱不可逆. □

在 [7, 定义 6.12.3] 对未必交换的环也定义了局部环的概念, 其定义基于 (iv) 的变体, 因而与定义 1.11.1 兼容.

例 1.11.4 设 R 为环而 $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R)$, 则 (1.7.3) 表明局部化 $R_{\mathfrak{p}}$ (定义 1.7.7) 是以 $\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}$ 为唯一极大理想的局部环.

注记 1.11.5 对局部环 R 及其极大理想 $\mathfrak{m}$ 作局部化不会产生新的环. 何以故? 考虑乘性子集 $U := R \smallsetminus \mathfrak{m} = R^\times$, 在相应的局部化的泛性质中可代入恒等同态 $R \to R[U^{-1}] := R$, 这就说明局部化带有的同态 $R \to R_\mathfrak{m}$ 实为同构.

以下考虑一般的 R, 以及对素理想 $\mathfrak{p}$ 作局部化得到的局部环 $R_\mathfrak{p}$.

定义–命题 1.11.6 设 R 为环, $\mathfrak{p}$ 为 R 的素理想, 记 $\kappa(\mathfrak{p}) := R_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}R_\mathfrak{p}$. 环同态 $R \to R_\mathfrak{p}$ 诱导单同态 $R/\mathfrak{p} \to \kappa(\mathfrak{p})$, 并将 $\kappa(\mathfrak{p})$ 等同于 $R/\mathfrak{p}$ 的分式域, 称为 R 在 $\mathfrak{p}$ 处的**剩余类域**.

证明 考虑自然同态 $R \to R_\mathfrak{p}$. 由 (1.7.3) 知 $\mathfrak{p}R_\mathfrak{p}$ 的原像是 $\mathfrak{p}R_\mathfrak{p} \cap R = \mathfrak{p}$, 由此立见 $R \to R_\mathfrak{p}$ 诱导环的单同态 $R/\mathfrak{p} \to \kappa(\mathfrak{p})$.

其次, 将 $\kappa(\mathfrak{p})$ 的元素写作 $\frac{r}{u} + \mathfrak{p}R_\mathfrak{p}$ 的形式, $r \in R$ 而 $u \notin \mathfrak{p}$, 则它也等于 $\frac{r}{1} + \mathfrak{p}R_\mathfrak{p}$ 除以 $\frac{u}{1} + \mathfrak{p}R_\mathfrak{p}$. 因此 $\kappa(\mathfrak{p})$ 的元素都能写作 $R_\mathfrak{p}$ 的像之商, 这足以将 $\kappa(\mathfrak{p})$ 等同于 $R_\mathfrak{p}$ 的分式域. □

分式域是局部化的特例. 剩余类域可置入交换图表

$$\begin{tikzcd} R_\mathfrak{p} \arrow[r, "商"] & \kappa(\mathfrak{p}) \\ R \arrow[u, "局部化"] \arrow[r, "商"'] & R/\mathfrak{p}. \arrow[u, "局部化"'] \end{tikzcd} \tag{1.11.1}$$

两路合成都映 $r \in R$ 为 $\frac{r}{1} + \mathfrak{p}R_\mathfrak{p}$.

设 $(R, \mathfrak{m})$ 和 $(S, \mathfrak{n})$ 为局部环. 所有环同态 $\varphi : R \to S$ 皆满足 $\varphi^{-1}(\mathfrak{n}) \subset \mathfrak{m}$, 鉴于引理 1.11.3 (iii), 这是因为满足 $\varphi(r) \in \mathfrak{n} = S \smallsetminus S^\times$ 的 $r \in R$ 必然属于 $R \smallsetminus R^\times = \mathfrak{m}$; 然而一般而言 $\varphi^{-1}(\mathfrak{n})$ 未必等于 $\mathfrak{m}$.

定义 1.11.7 设 $(R, \mathfrak{m})$ 和 $(S, \mathfrak{n})$ 为局部环. 如果环同态 $\varphi : R \to S$ 满足 $\mathfrak{m} = \varphi^{-1}(\mathfrak{n})$ (或等价的 $\varphi(\mathfrak{m}) \subset \mathfrak{n}$), 则称 φ 为**局部同态**, 写作 $\varphi : (R, \mathfrak{m}) \to (S, \mathfrak{n})$.

恒等同态是局部的, 局部同态的合成仍是局部的, 因此局部环连同局部同态构成一个范畴 LocRing. 进一步, 局部同态 $\varphi : (R, \mathfrak{m}) \to (S, \mathfrak{n})$ 诱导剩余类域之间的同态 $R/\mathfrak{m} \to S/\mathfrak{n}$, 故取剩余类域给出从 LocRing 到域范畴 Field 的函子.

剩余类域的功能之一是描述素谱之间的映射纤维. 以下陈述中的 R 和 S 不再要求为局部环.

命题 1.11.8 (纤维的描述) 设 $\varphi : R \to S$ 为环同态, 相应地有连续映射 $\mathrm{Spec}(\varphi) : \mathrm{Spec}(S) \to \mathrm{Spec}(R)$, 映 $\mathfrak{q}$ 为 $\varphi^{-1}(\mathfrak{q})$. 设 $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R)$. 对 R-代数同态 $S \to S \underset{R}{\otimes} \kappa(\mathfrak{p})$ 取 $\mathrm{Spec}(\cdot)$ 给出同胚

$$\mathrm{Spec}\left(S \underset{R}{\otimes} \kappa(\mathfrak{p})\right) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Spec}(\varphi)^{-1}(\mathfrak{p}) \subset \mathrm{Spec}(S).$$

证明 将 $S \to S \underset{R}{\otimes} \kappa(\mathfrak{p})$ 分解为两步: 先取商 $S \to S/\varphi(\mathfrak{p})S$, 再对乘性子集 $\varphi(R \smallsetminus \mathfrak{p})$ 的像取局部化. 将两段同态代入推论 1.10.11, 可见它们诱导同胚

$$\operatorname{Spec}\left(S \underset{R}{\otimes} \kappa(\mathfrak{p})\right) \xrightarrow{\sim} \left\{ \mathfrak{q} \in \operatorname{Spec}(S) \;\middle|\; \begin{array}{l} \mathfrak{q} \supset \varphi(\mathfrak{p}) \text{ 而且} \\ \mathfrak{q} \cap \varphi(R \smallsetminus \mathfrak{p}) = \varnothing \end{array} \right\},$$

右侧带来自 $\operatorname{Spec}(S)$ 的诱导拓扑. 易见 $\mathfrak{q}$ 的条件等价于 $\varphi^{-1}(\mathfrak{p}) = \mathfrak{q}$. □

命题 1.11.9 设 $\varphi : R \to S$ 为环同态. 当 $\varphi^{-1}(\mathfrak{q}) = \mathfrak{p}$ 时有局部同态

$$\begin{aligned} \varphi_{\mathfrak{p},\mathfrak{q}} : R_{\mathfrak{p}} &\to S_{\mathfrak{q}} \\ \frac{r}{u} &\mapsto \frac{\varphi(r)}{\varphi(u)} \end{aligned} \quad \text{使图表} \quad \begin{tikzcd} R_{\mathfrak{p}} \arrow[r, "\varphi_{\mathfrak{p},\mathfrak{q}}"] & S_{\mathfrak{q}} \\ R \arrow[u] \arrow[r, "\varphi"'] & S \arrow[u] \end{tikzcd} \quad \text{交换,}$$

其中 $r \in R$ 而 $u \in R \smallsetminus \mathfrak{p}$, 因此 φ 诱导剩余类域的嵌入 $\kappa(\varphi) : \kappa(\mathfrak{p}) \to \kappa(\mathfrak{q})$.

证明 由条件知 $\varphi(R \smallsetminus \mathfrak{p}) \subset S \smallsetminus \mathfrak{q}$, 故 $R \to S \to S_{\mathfrak{q}}$ 的合成映 $R \smallsetminus \mathfrak{p}$ 的元素为可逆元, 局部化的泛性质遂给出所求之 $\varphi_{\mathfrak{p},\mathfrak{q}}$. 为了证明 $\varphi_{\mathfrak{p},\mathfrak{q}}$ 是局部的, 考虑 $\frac{r}{u} \in \mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}$, 其中 $r \in \mathfrak{p}$ 而 $u \in R \smallsetminus \mathfrak{p}$. 从 $\varphi(r) \in \varphi(\mathfrak{p}) \subset \mathfrak{q}$ 可得 $\varphi_{\mathfrak{p},\mathfrak{q}}(\frac{r}{u}) = \frac{\varphi(r)}{\varphi(u)} \in \mathfrak{q}S_{\mathfrak{q}}$. 图表的交换性是显然的. □

命题 1.11.9 中的 $\varphi_{\mathfrak{p},\mathfrak{q}}$ 和 $\kappa(\varphi)$ 能够兼容地拆成两段. 首先, 对 $(R, \mathfrak{p})$ 和 $(S, \mathfrak{q})$ 都能构造交换图表 (1.11.1). 将 S 通过 φ 视作 R-模, 则 $S_{\mathfrak{q}}$, $S/\mathfrak{q}$ 和 $\kappa(\mathfrak{q})$ 也成为 R-模.

其次, φ, $\varphi_{\mathfrak{p},\mathfrak{q}}$, 由 φ 诱导的 $R/\mathfrak{p} \to S/\mathfrak{q}$ 和 $\kappa(\varphi)$ 都成为 R-模同态. 四者使得关于 $(R, \mathfrak{p})$ 的交换图表 (1.11.1) 整体地映向其 $(S, \mathfrak{q})$ 版本, 呈现为 R-Mod 中的立方体交换图表. 根据命题 1.3.3 的伴随性质, 交换图表之间的这一态射通过

$$\begin{tikzcd} S \underset{R}{\otimes} R_{\mathfrak{p}} \arrow[r] & S \underset{R}{\otimes} \kappa(\mathfrak{p}) \\ S \underset{R}{\otimes} R \arrow[u] \arrow[r] & S \underset{R}{\otimes} (R/\mathfrak{p}) \arrow[u] \end{tikzcd} \quad \simeq \quad \begin{tikzcd} S_{\mathfrak{p}} \arrow[r] & S \underset{R}{\otimes} \kappa(\mathfrak{p}) \\ S \arrow[u] \arrow[r] & S/\mathfrak{p}S \arrow[u] \end{tikzcd} \tag{1.11.2}$$

典范地分解; 此处 $S/\mathfrak{p}S$ 既是作为 R-模的商, 也可以理解为环 S 对理想 $\varphi(\mathfrak{p})S$ 的商,

详见命题 1.8.2 的解释. 相关讨论总结为交换图表:

$$\begin{tikzcd}
 & R_{\mathfrak{p}} \arrow[rr] \arrow[dd, "\varphi_{\mathfrak{p}}"'] & & \kappa(\mathfrak{p}) \arrow[dd, "t\mapsto 1\otimes t"] \\
R \arrow[ur] \arrow[rr] \arrow[dd, "\varphi"'] & & R/\mathfrak{p} \arrow[ur] \arrow[dd, "\varphi \bmod \mathfrak{p}"' near start] & \\
 & S_{\mathfrak{p}} \arrow[rr] \arrow[dd] & & S \underset{R}{\otimes} \kappa(\mathfrak{p}) \arrow[dd, "s\otimes w\mapsto s\kappa(\varphi)(w)"] \\
S \arrow[ur] \arrow[rr] \arrow[dd, equal] & & S/\mathfrak{p}S \arrow[ur] \arrow[dd] & \\
 & S_{\mathfrak{q}} \arrow[rr] & & \kappa(\mathfrak{q}) \\
S \arrow[ur] \arrow[rr] & & S/\mathfrak{q} \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

其顶层和底层均来自 (1.11.1), 中层则是 (1.11.2). 此外,

- ◇ $R_{\mathfrak{p}} \to S_{\mathfrak{p}} \to S_{\mathfrak{q}}$ 合成为命题 1.11.9 的 $\varphi_{\mathfrak{p},\mathfrak{q}}$,
- ◇ $\kappa(\mathfrak{p}) \to S \underset{R}{\otimes} \kappa(\mathfrak{p}) \to \kappa(\mathfrak{q})$ 合成为 $\kappa(\varphi)$.

习题

1. 设 I 和 J 为环 R 的理想. 说明若 $I + J = R$, 则对所有 $m, n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ 都有 $I^m + J^n = R$.

2. 设 $I_1, \ldots I_m$ 为环 R 的理想, $\mathfrak{p}$ 为 R 的素理想. 说明若 $\mathfrak{p} = \bigcap_{i=1}^m I_i$, 则存在 i 使得 $\mathfrak{p} = I_i$.

3. 设 F 为无穷域, V 为 F-向量空间, 而 $V_1, \ldots, V_r$ 为 V 的子空间 ($r \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$). 证明若 $V = \bigcup_{i=1}^r V_i$, 则存在 $1 \leq i \leq r$ 使得 $V = V_i$. 这是命题 1.1.3 证明中用到的性质.

提示 先考虑 $V \simeq F^n$ 的情形 ($n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$). 若每个 V_i 皆为真子空间, 则存在 $\lambda_i \in \mathrm{Hom}_F(V, F) \smallsetminus \{0\}$ 使得 $V_i \subset \ker(\lambda_i)$. 然而 F 无穷导致非零多项式所定义的函数 $\prod_{i=1}^r \lambda_i$ 不恒为零, 见 [7, 命题 5.6.11], 故 $V \neq \bigcup_{i=1}^r V_i$.

采取反证法处理一般情形. 设 $V = \bigcup_{i=1}^r V_i$, 而且对每个 i 皆存在 $v_i \in V \smallsetminus V_i$. 以 $v_1, \ldots, v_r$ 生成的子空间 V' 代 V, 以 $V_i' := V' \cap V_i$ 代 V_i, 则 $V' = \bigcup_{i=1}^r V_i'$, 然而每个 V_i' 皆为真子空间, 矛盾.

4. 在引理 1.4.2 和定义–命题 1.4.8 的基础上, 说明命题 1.4.3 中实际有 (iv) $\implies$ (i) 和 (iv)' $\implies$ (i)'.

5. 举例说明注记 1.3.4 中的 Ξ_{M_1,M_2} 一般未必是同构.

6. 举例说明有限展示模的子模未必有限生成, 而且有限生成模未必是有限展示模. 提示 最简单的取法是考虑具有非有限生成理想的环 R.

7. 设 M 是有限展示投射 R-模, 证明命题 1.5.5 的同态

$$\varinjlim \mathrm{Hom}_R(M,\alpha) \to \mathrm{Hom}_R(M, \varinjlim \alpha)$$

对所有小范畴 I 和函子 $\alpha : I \to R\text{-}\mathsf{Mod}$ 皆为同构.

提示 用已知的滤过情形说明 $\mathrm{Hom}_R(M,\cdot)$ 保持任意小直和, 再用投射性质说明它保持所有小 $\varinjlim$.

8. 考虑环 $R = \mathbb{F}_2[X,Y]/(X,Y)^2$, 它作为 $\mathbb{F}_2$-向量空间有基 $1, X, Y \mod (X,Y)^2$. 说明 (X,Y) 在 R 中的像 $\mathfrak{m}$ 是 R 的唯一素理想, 并且 $\mathfrak{m}$ 能表作三个严格包含于 $\mathfrak{m}$ 的理想之并.

9. 举例说明局部环之间的同态未必是局部同态.

10. 对于环 R 的乘性子集 U, 给出以下典范环同构:

(i) $(R[X_1,\ldots,X_n])[U^{-1}] \simeq R[U^{-1}][X_1,\ldots,X_n]$,

(ii) $R[U^{-1}] \underset{R}{\otimes} R[U^{-1}] \simeq R[U^{-1}]$.

11. 对于环 R 及其乘性子集 U, 将 $R[U^{-1}]$-模 M 通过 $R \to R[U^{-1}]$ 视同 R-模, 作局部化 $M[U^{-1}]$. 说明有 $R[U^{-1}]$-模的典范同构 $M \xrightarrow{\sim} M[U^{-1}]$. 提示 利用引理 1.6.4 或其论证.

12. 承上题, 定义 $R\text{-}\mathsf{Mod}$ 的全子范畴 $R\text{-}\mathsf{Mod}_U$ 如下: $M \in \mathrm{Ob}(R\text{-}\mathsf{Mod}_U)$ 当且仅当每个 $u \in U$ 对 M 的乘法作用皆可逆; 此时可对 $x \in M$ 定义 $u^{-1}x \in M$ 为满足 $u \cdot u^{-1}x = x$ 的唯一元素.

(i) 说明 $\frac{r}{u}x := u^{-1}(rx)$ 使 $M \in \mathrm{Ob}(R\text{-}\mathsf{Mod}_U)$ 成为 $R[U^{-1}]$-模, 而且它典范地同构于 $M[U^{-1}]$.

(ii) 说明上述构造给出的函子 $R\text{-}\mathsf{Mod}_U \to R[U^{-1}]\text{-}\mathsf{Mod}$ 是范畴等价.

13. 举例说明对于环同态 $\varphi : R \to S$, 素谱之间的映射 $\mathrm{Spec}(\varphi) : \mathrm{Spec}(S) \to \mathrm{Spec}(R)$ 未必映极大理想为极大理想.

14. 设 R 为非零环, 命

$$\mathcal{S} := \left\{ I \subset R : \text{理想, 其元素全是零因子} \right\}.$$

(i) 证明每个 $I \in \mathcal{S}$ 都包含于偏序集 $(\mathcal{S}, \subset)$ 的某个极大元, 而且这些极大元必为素理想.

(ii) 以此说明 R 的零因子集可表成一族素理想的并.

提示 对于 (i), Zorn 引理说明极大元存在. 设 $\mathfrak{p}$ 为极大元而 $x, x' \in R \smallsetminus \mathfrak{p}$. 假如 $xx' \in \mathfrak{p}$, 则存在 $a, a' \in R$ 和 $b, b' \in \mathfrak{p}$ 使得 $ax + b$ 和 $a'x' + b'$ 均非零因子, 但 $yy' \in \mathfrak{p}$ 导致矛盾.

第二章　根基理论

2.1　幂零根基

本节选定环 R.

定义 2.1.1　对 R 的所有理想 I, 记

$$\sqrt{I} := \{x \in R : \exists n \in \mathbb{Z}_{\geq 1},\ x^n \in I\}.$$

它满足 $\sqrt{I} \supset I$, 而且仍是 R 的理想: 对 R 的乘法封闭性显然, 至于加法封闭性, 对 $x, y \in I$ 可取足够大的 n 使得 $x^n, y^n \in I$, 则

$$(x+y)^{2n-1} = \sum_{k=0}^{2n-1} \binom{2n-1}{k} x^k y^{2n-1-k} \in I.$$

特例 $\sqrt{0}$ 也称为 R 的**幂零根基**, 另记为

$$\mathrm{nil}(R) := \sqrt{0} = \{R \text{ 中的所有幂零元}\}.$$

定义 2.1.2　若 $\mathrm{nil}(R) = 0$, 则称环 R 为**既约**的, 这也等价于 R 不含非零幂零元. 另记 $R_{\mathrm{red}} := R/\mathrm{nil}(R)$.

注记 2.1.3　既约环 R 作局部化 $R[U^{-1}]$ 仍是既约的, 直接论证如下. 设 $\left(\frac{r}{u}\right)^n = 0$, 则存在 $v \in U$ 使得 $vr^n = 0$, 继而有 $(vr)^n = 0$, 然而这蕴涵 $\frac{r}{u} = \frac{vr}{vu} = \frac{0}{vu}$.

引理 2.1.4　前述构造满足以下性质:

(i) 设 $\varphi : R \to S$ 为环同态, 则 $\varphi^{-1}(\mathrm{nil}(S)) = \sqrt{\ker(\varphi)}$, 特别地 $\varphi(\mathrm{nil}(R)) \subset \mathrm{nil}(S)$;

(ii) 若 $I \subset J \implies \sqrt{I} \subset \sqrt{J}$;

(iii) $\sqrt{\sqrt{I}} = \sqrt{I}$;

(iv) 环 R_{red} 是既约的, 并且满足如下泛性质: 若 S 是既约环而 $f: R \to S$ 是同态, 则 f 唯一地分解为 $R \xrightarrow{\text{商}} R_{\mathrm{red}} \xrightarrow{f_{\mathrm{red}}} S$;

(v) $\sqrt{I}$ 等于 $\mathrm{nil}(R/I)$ 在商同态 $R \to R/I$ 之下的原像.

证明 (i) 和 (ii) 为显然.

对于 (iii), 从 $I \subset \sqrt{I}$ 可得 $\sqrt{I} \subset \sqrt{\sqrt{I}}$. 反之设 $x \in \sqrt{\sqrt{I}}$, 存在 $n \geq 1$ 使得 $x^n \in \sqrt{I}$, 继而存在 $m \geq 1$ 使得 $x^{mn} = (x^n)^m \in I$, 故 $x \in \sqrt{I}$.

对于 (iv), 先来说明 R_{red} 既约. 设 $\bar{x} \in R_{\mathrm{red}}$ 是 $x \in R$ 的像. 若有 $n \geq 1$ 使得 $\bar{x}^n = \bar{0}$, 则 $x^n \in \mathrm{nil}(R) = \sqrt{0}$; 由 (ii) 知 $x \in \sqrt{\sqrt{0}} = \sqrt{0}$, 故 $\bar{x} = \bar{0}$.

考虑映向既约环 S 的同态 f. 从 $\mathrm{nil}(S) = 0$ 和 (i) 可知 f 唯一地通过 R_{red} 分解.

对于 (v), 记 x 在 R/I 中的像为 $\bar{x}$, 则 $x^n \in I \iff \bar{x}^n = 0$ 对所有 n 成立. □

引理 2.1.4 (iv) 的泛性质使得 $R \mapsto R_{\mathrm{red}}$ 成为函子, 称为 R 的既约化.

命题 2.1.5 若 I 是环 R 的理想, 则 $\sqrt{I} = \bigcap_{\mathfrak{p} \in V(I)} \mathfrak{p}$; 右式的交在 $V(I) = \varnothing$ 时规定为 R.

证明 不妨设 $I \neq R$, 否则断言是平凡的. 基于 R 和 R/I 的理想 (或素理想) 之间的对应关系 (1.1.1) 和引理 2.1.4 (v), 容易以 R/I 代 I, 将问题化到 $I = 0 \subsetneq R$ 的情形.

若 $x \in \mathrm{nil}(R)$, 则 $x^n = 0$ 导致对所有 $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R)$ 皆有 $x^n \in \mathfrak{p}$, 从而 $x \in \mathfrak{p}$, 因此 $\mathrm{nil}(R) \subset \bigcap_{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R)} \mathfrak{p}$.

反之设 x 非幂零元, 相应的局部化 $R[x^{-1}]$ (约定 1.7.2) 非零环, 故引理 1.10.4 确保 $R[x^{-1}]$ 有素理想, 而命题 1.7.6 (ii) 说明此素理想来自某个与 $\{1, x, x^2, \ldots\}$ 无交之 $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R)$; 无交性等价于 $x \notin \mathfrak{p}$, 于是 $x \notin \bigcap_{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R)} \mathfrak{p}$. □

推论 2.1.6 设 I 为 R 的理想, 则 $V(I) = \mathrm{Spec}(R) \iff I \subset \mathrm{nil}(R)$. 此外若 $f \in R$, 则 $D(f) = \varnothing \iff f$ 幂零.

证明 可设 R 非零. 命题 2.1.5 说明 $\mathrm{nil}(R) = \bigcap_{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R)} \mathfrak{p}$; 它包含 I 当且仅当所有素理想 $\mathfrak{p}$ 都包含 I, 亦即 $V(I) = \mathrm{Spec}(R)$.

此外, 引理 1.10.3 (iv) 表明 $D(f) = \varnothing \iff V(f) = \mathrm{Spec}(R)$, 而上一段表明后者等价于 $f \in \mathrm{nil}(R)$. □

定义 2.1.7 满足 $\sqrt{I} = I$ 的理想 I 称为**根理想**.

推论 2.1.8 设 I 为环 R 的理想, 则 $V(I)=V(\sqrt{I})$. 进一步, 我们有互逆双射

$$\begin{array}{ccc}
\{I \subset R : \text{根理想}\} & \xleftrightarrow{1:1} & \{Z \subset \operatorname{Spec}(R) : \text{闭子集}\} \\
I & \longmapsto & V(I) \\
\bigcap_{\mathfrak{p}\in Z}\mathfrak{p} & \longleftarrow\!\shortmid & Z;
\end{array}$$

若以 $\subset$ 赋予两边偏序, 则双射是反序的.

证明 对于第一部分, 设 $\mathfrak{p}\in V(I)$, 则命题 2.1.5 蕴涵 $\mathfrak{p}\supset\bigcap_{\mathfrak{p}'\in V(I)}\mathfrak{p}'=\sqrt{I}$. 因此 $V(I)\subset V(\sqrt{I})$. 另一方面, $I\subset\sqrt{I}$ 蕴涵 $V(I)\supset V(\sqrt{I})$.

对于第二部分, $V(I)$ 总是 $\operatorname{Spec}(R)$ 的闭子集, 故右向映射有定义. 其次, 左向映射亦有定义: 给定 Z, 命 $I:=\bigcap_{\mathfrak{p}\in Z}\mathfrak{p}$, 若 $x^n\in I$ 则 $x^n\in\mathfrak{p}$ 对所有 $\mathfrak{p}\in Z$ 成立, 故 $x\in\mathfrak{p}$, 由此可见 $I=\sqrt{I}$.

接着讨论更广泛的双向映射

$$\begin{array}{ccc}
\{I \subset R : \text{理想}\} & \rightleftarrows & \{\mathcal{S} \subset \operatorname{Spec}(R) : \text{任意子集}\} \\
I & \longmapsto & V(I) \\
\bigcap_{\mathfrak{p}\in \mathcal{S}}\mathfrak{p} & \longleftarrow\!\shortmid & \mathcal{S}.
\end{array}$$

先看 $\circlearrowright$ 方向的合成: 它映 I 为 $\bigcap_{\mathfrak{p}\supset I}\mathfrak{p}=\sqrt{I}$. 其次, 引理 1.10.8 说明 $\circlearrowleft$ 方向的合成映 $\mathcal{S}$ 为 $V\left(\bigcap_{\mathfrak{p}\in\mathcal{S}}\mathfrak{p}\right)=\overline{\mathcal{S}}$.

现在可以将上述映射的左右两边分别限制到根理想 I 和闭子集 Z, 则双向合成皆为恒等. 反序性质属显然. □

推论 2.1.9 设 $f,g\in R$, 则 $D(f)\subset D(g)$ 当且仅当存在 $n\geq 1$ 使得 $g\mid f^n$; 注意到这正是 (1.7.1) 的预序.

证明 引理 1.10.3 (iv) 说明 $D(f)\subset D(g)$ 等价于 $V(f)\supset V(g)$, 推论 2.1.8 说明这又等价于 $(f)\subset\sqrt{(g)}$, 亦即 $f\in\sqrt{(g)}$. □

推论 2.1.10 设 $\varphi: R\to S$ 为环同态, 记 $I:=\ker(\varphi)$, 则闭包 $\overline{\operatorname{im}(\operatorname{Spec}(\varphi))}\subset\operatorname{Spec}(R)$ 等于 $V(I)$.

证明 引理 1.10.8 表明 $\overline{\operatorname{im}(\operatorname{Spec}(\varphi))}=V(J)$, 其中

$$\begin{aligned}
J &:= \bigcap_{\mathfrak{p}\in\operatorname{im}(\operatorname{Spec}(\varphi))}\mathfrak{p} = \bigcap_{\mathfrak{q}\in\operatorname{Spec}(S)}\varphi^{-1}(\mathfrak{q}) = \varphi^{-1}\left(\bigcap_{\mathfrak{q}\in\operatorname{Spec}(S)}\mathfrak{q}\right) \\
&= \varphi^{-1}(\operatorname{nil}(S)) \quad (\text{命题 } 2.1.5) \\
&= \sqrt{I} \quad (\text{引理 } 2.1.4\ (\mathrm{i}));
\end{aligned}$$

然而 $V(\sqrt{I})=V(I)$. □

2.2 局部幂零理想

设 R 为环, I 为其理想.

定义 2.2.1 (幂零理想) 若存在 $n \geq 1$ 使得 $I^n = 0$, 则称 I 为幂零理想.

定义 2.2.2 (局部幂零理想) 设 I 为 R 的理想, 若每个 $r \in I$ 皆为幂零元, 换言之若 $I \subset \operatorname{nil}(R)$, 则称 I 为局部幂零理想.

例 2.2.3 考虑有无穷多个变元的多项式环 $\mathbb{Z}[X_1, X_2, \ldots]$ 及其商环

$$R := \mathbb{Z}[X_1, X_2, X_3, \ldots] \big/ \left(X_1, X_2^2, X_3^3, \ldots\right),$$

则 $(X_1, X_2, X_3, \ldots)$ 在 R 中的像是局部幂零理想; 事实上, 每个 X_i 的像都是幂零元. 然而这并非幂零理想, 因为 X_i^{i-1} 在 R 中的像非零.

因此幂零强于局部幂零, 但之后的命题 3.2.7 将说明两者对于 Noether 环是等价的.

命题 2.2.4 设 $I \subset R$ 为局部幂零理想, 则商同态 $R \to R/I$ 诱导同胚 $\operatorname{Spec}(R/I) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Spec}(R)$.

证明 结合推论 1.10.11 和 2.1.6. □

以下结论称为幂等元的提升性质.

命题 2.2.5 设 $I \subset R$ 为局部幂零理想, 则商同态 $R \to R/I$ 诱导双射

$$\{e \in R : \text{幂等元}\} \xrightarrow{1:1} \{\bar{e} \in R/I : \text{幂等元}\}.$$

证明 商同态显然映幂等元为幂等元. 先说明映射为单. 设 $e_1, e_2 \in R$ 为幂等元, 则

$$(e_1 - e_2)^3 = e_1^3 - 3e_1^2 e_2 + 3e_1 e_2^2 - e_2^3 = e_1 - e_2,$$

递归推得 $(e_1 - e_2)^{3^k} = e_1 - e_2$ 对所有 $k \geq 1$ 成立. 若 e_1 和 e_2 在 R/I 中的像相同, 则 $e_1 - e_2 \in I$ 是幂零元, 取 $k \gg 0$ 即知 $e_1 - e_2 = 0$.

接着说明映射为满. 给定幂等元 $\bar{e}$ 及其原像 $r \in R$, 条件相当于说 $x := r^2 - r \in I$; 为了证明存在幂等元 $e \in R$ 使得 $e \mapsto \bar{e}$, 不妨以 (x) 代 I, 从而将关于 I 的条件强化为存在 $n \geq 1$ 使得 $I^n = 0$.

对 n 递归地论证存在所求之 e. 可设 $n \geq 2$. 将商同态分解为 $R \to R/I^2 \to R/I$, 然后分段考虑幂等元的提升; 注意到当 n 为偶数时 $(I^2)^{\frac{n}{2}} = 0$, 奇数时 $(I^2)^{\frac{n+1}{2}} = 0$, 但总有 $\frac{n+1}{2} < n$. 综上, 问题进一步化到 $I^2 = 0$ 的情形.

取 $e := r + f(r)(r^2 - r)$, 其中 $f \in \mathbb{Z}[X]$ 待定, 则 e 映至 $\bar{e}$, 且

$$e^2 - e = r^2 - r + (2r - 1)(r^2 - r)f(r) = (r^2 - r)(1 + (2r - 1)f(r));$$

取 $f = 1 - 2X$ 则 $X^2 - X \mid 1 + (2X-1)f$, 使右式为零. $\square$

注记 2.2.6 设 A 是 R-代数, 容许 A 非交换, 则 IA 是 A 的理想; 在 $I \subset R$ 局部幂零的前提下, 命题 2.2.5 的双射推广为

$$\{e \in A : \text{中心幂等元}\} \xrightarrow{1:1} \{\bar{e} \in A/IA : \text{中心幂等元}\},$$

论证是类似的. 进一步, 满足 §1.2 的条件 **E.1—E.3** 的中心幂等元列也能唯一地从 A/IA 提升到 A. 细节谨留给读者.

2.3 Jacobson 根基和中山引理

命题 2.1.5 将环 R 的幂零根基描述为所有素理想之交. 本节将以类似手法定义另一种重要的理想, 称为 Jacobson 根基; 值得一提的是它在非交换环的理论中也扮演要角.

定义 2.3.1 环 R 的 **Jacobson 根基**定义为所有极大理想之交, 记作

$$\mathrm{rad}(R) := \bigcap_{\mathfrak{m} \in \mathrm{MaxSpec}(R)} \mathfrak{m};$$

右式在 R 为零环时规定为 R. 因此总有 $\mathrm{nil}(R) \subset \mathrm{rad}(R)$.

例如定义 1.11.1 的局部环 $(R, \mathfrak{m})$ 显然满足 $\mathrm{rad}(R) = \mathfrak{m}$.

命题 2.3.2 对于 R 的所有理想 I, 记 $1 + I := \{1 + x : x \in I\}$, 则:

(i) $1 + \mathrm{rad}(R) \subset R^\times$;

(ii) $I \subset \mathrm{rad}(R)$ 当且仅当 $1 + I \subset R^\times$;

(iii) 对所有 $x \in R$, 记 $\bar{x}$ 为它在 R/I 中的像, 当 $I \subset \mathrm{rad}(R)$ 时, $\bar{x} \in (R/I)^\times \iff x \in R^\times$.

证明 先处理 (i). 设 $x \in \mathrm{rad}(R)$, 则 $1 + x$ 不可能属于 R 的任何极大理想, 故引理 1.10.4 蕴涵此时 $(1 + x) = R$, 亦即 $1 + x \in R^\times$.

对于 (ii), "仅当" 方向由 (i) 确保. 对另一方向, 设 $I \not\subset \mathrm{rad}(R)$, 则存在极大理想 $\mathfrak{m}$ 满足 $I \not\subset \mathfrak{m}$, 因而 $I + \mathfrak{m} = R$, 可取 $x \in I$ 和 $y \in \mathfrak{m}$ 使得 $x + y = 1$; 然而 $1 - x = y \notin R^\times$, 故 $1 + I \not\subset R^\times$.

对于 (iii), 证 $\Longrightarrow$ 即可. 设 $\bar{x} \in (R/I)^\times$, 则存在 $y \in R$ 使得 $xy \in 1 + I$; 于是 (ii) 蕴涵 $xy \in R^\times$, 进而 $x \in R^\times$. $\square$

对所有理想 $I \subset R$ 和 R-模 M, 取子模 IM 如约定 1.1.5.

引理 2.3.3 设 I 为 R 的理想, M 为 R-模. 若 M 有生成元 $x_1, \ldots, x_n$ 而 $\varphi \in \mathrm{End}_R(M)$ 满足 $\varphi(M) \subset IM$, 则存在多项式

$$f = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_0 \in R[X], \quad a_0, \ldots, a_{n-1} \in I,$$

使得 $f(\varphi) = 0 \in \mathrm{End}_R(M)$.

证明 取 $a_{ij} \in I$ 使得 $\varphi(x_i) = \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j$ 对所有 $1 \leq i \leq n$ 成立, 并考虑相应的 $n \times n$ 矩阵 $A = (a_{ij})_{i,j}$. 通过 $g \cdot x = g(\varphi)(x)$ 使 M 成为 $R[X]$-模, 其中 $g \in R[X]$, 则 A 的定义相当于 $M^{\oplus n}$ 中以矩阵表达的方程

$$(X \cdot 1_{n\times n} - A)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

取 $f = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_0 \in R[X]$ 为 A 的特征多项式, 则 $a_0, \ldots, a_{n-1} \in I$. 将上式两边左乘以经典伴随矩阵 $(X \cdot 1_{n\times n} - A)^\vee \in \mathrm{M}_{n\times n}(R[X])$, 此操作是合理的, 给出

$$\begin{pmatrix} f & & \\ & \ddots & \\ & & f \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

矩阵留白部分为零. 于是 $f(\varphi)(x_i) = 0$ 对所有 $1 \leq i \leq n$ 在 M 中成立, 故由 $x_1, \ldots, x_n$ 生成 M 可知 $f(\varphi) = 0$. □

以下结论常被称为中山引理.

定理 2.3.4 (中山正) 设 M 为有限生成 R-模, 而理想 $I \subset R$ 满足 $IM = M$, 则存在 $a \in I$ 使得 $(1+a)M = 0$; 若进一步要求 $I \subset \mathrm{rad}(R)$, 则 $M = 0$.

证明 在引理 2.3.3 中可取 $\varphi = \mathrm{id}_M$, 相应的多项式 f 满足 $f(\mathrm{id}_M) = (1+a)\mathrm{id}_M$, 其中 $a := a_0 + \cdots + a_{n-1} \in I$. 于是 $f(\mathrm{id}_M) = 0$ 便导致 $(1+a)M = 0$. 若进一步要求 $I \subset \mathrm{rad}(R)$, 则命题 2.3.2 (ii) 蕴涵 $1+a$ 可逆, 故 $M = 0$. □

本书将频繁应用以下推论.

推论 2.3.5 设 I 为 R 的理想, $I \subset \mathrm{rad}(R)$, 而 M 为 R-模.

(i) 若 N 和 N' 为 M 的子模, N' 有限生成而 $M = N + IN'$, 则 $M = N$.

(ii) 若 M 有限生成, $f : L \to M$ 为模同态, 而 f 诱导的同态 $\bar{f} : L/IL \to M/IM$ 为满, 则 f 为满.

(iii) 设 M 有限生成, $x_1, \ldots, x_n \in M$ 在 M/IM 中的像为生成元, 则 $x_1, \ldots, x_n$ 是 M 的生成元.

证明 对于 (i), 注意到 $\bar{M} := M/N$ 由 N' 的像生成, 因而 $\bar{M}$ 是有限生成的; 此外显然有 $I\bar{M} = \bar{M}$, 代入定理 2.3.4 即得 $\bar{M} = 0$, 亦即 $M = N$.

对于 (ii), 条件蕴涵 $M = \mathrm{im}(f) + IM$. 将 (i) 中的 N (或 N') 取为 $\mathrm{im}(f)$ (或 M), 便得到 $M = \mathrm{im}(f)$.

对于 (iii), 考虑 $x_1, \ldots, x_n$ 所确定的模同态 $f : R^{\oplus n} \to M$, 代入 (ii) 可知 f 满, 亦即 $x_1, \ldots, x_n$ 生成 M. □

当 I 为幂零理想时, 定理 2.3.4 和推论 2.3.5 的前提可以放宽, 论证也大大简化.

命题 2.3.6 设 I 为环 R 的幂零理想, M 为 R-模. 若 $IM = M$, 则 $M = 0$. 此外 I 还有以下性质.

(i) 若 N 和 N' 为 M 的子模, $M = N + IN'$, 则 $M = N$.

(ii) 若 $f : L \to M$ 为模同态, 而 f 诱导的同态 $\bar{f} : L/IL \to M/IM$ 为满, 则 f 为满.

(iii) 设 M 的一族元素 $\{x_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ 在 M/IM 中的像为生成元, 则 $\{x_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ 是 M 的生成元.

证明 取 $n \gg 0$ 使得 $I^n = 0$. 若 $M = IM$ 则 $M = I^n M = 0$. 在此基础上, 断言 (i) — (iii) 的论证和推论 2.3.5 无异. □

以下是定理 2.3.4 的另一则有趣应用.

推论 2.3.7 (W. V. Vasconcelos) 设 M 为有限生成 R-模, $\varphi \in \mathrm{End}_R(M)$ 为满, 则 φ 是 M 的自同构.

证明 引进变元 X, 以 $g \cdot x = g(\varphi)(x)$ 赋 M 以 $R[X]$-模结构, 其中 $g \in R[X]$. 在定理 2.3.4 中以 $R[X]$ 代 R, 再取 $I = (X)$, 则因 φ 满导致 $IM = M$, 故存在 $h \in R[X]$ 使得 $(1 + Xh)M = 0$, 亦即 $\mathrm{id}_M + \varphi h(\varphi) = 0$. 因此 $-h(\varphi) \in \mathrm{End}_R(M)$ 是 φ 的逆. □

最后, 我们对多项式环 $R[X]$ 明确幂零根基和 Jacobson 根基的关系. 对所有理想 $I \subset R$, 记 $I[X] := I \cdot R[X]$.

定理 2.3.8 (E. Snapper) 设 R 为环, 则 $\mathrm{rad}(R[X]) = \mathrm{nil}(R)[X] = \mathrm{nil}(R[X])$.

证明 易见 $\mathrm{rad}(R[X]) \supset \mathrm{nil}(R[X]) \supset \mathrm{nil}(R)[X]$. 以下证明 $\mathrm{nil}(R)[X] \supset \mathrm{rad}(R[X])$.

考虑 $f = \sum_{n \geq 0} a_n X^n \in \mathrm{rad}(R[X])$. 命题 2.3.2 (i) 蕴涵 $1 + Xf \in R[X]^\times$. 对 R 的所有素理想 $\mathfrak{p}$ 考虑 $1 + Xf = 1 + a_0 X + a_1 X^2 + \cdots$ 在 $(R/\mathfrak{p})[X]$ 中的像. 整环 $R/\mathfrak{p}$ 上的多项式若可逆则是零次的, 故 $a_n \in \bigcap_{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R)} \mathfrak{p} = \mathrm{nil}(R)$ 对所有 $n \geq 0$ 成立, 从而 $f \in \mathrm{nil}(R)[X]$. 明所欲证. □

2.4 模的支集

本节将频繁应用 (1.1.2) 和 (1.1.3) 的符号.

给定 R-模 M. 对于 $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R)$, 按定义 1.7.7 考虑 M 的局部化 $M_{\mathfrak{p}}$. 对元素 $x \in M$ (或同态 $f \in \mathrm{Hom}_R(M, M')$), 相应地有 $x_{\mathfrak{p}} := \frac{x}{1} \in M_{\mathfrak{p}}$ (或 $f_{\mathfrak{p}} \in \mathrm{Hom}_{R_{\mathfrak{p}}}(M_{\mathfrak{p}}, M'_{\mathfrak{p}})$).

引理 2.4.1 设 M 为 R-模.

1. 对于所有元素 $x \in M$, 以下陈述等价:
   (i) $x = 0$;
   (ii) 对所有 $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R)$ 皆有 $x_{\mathfrak{p}} = 0$;
   (iii) 对所有 $\mathfrak{m} \in \mathrm{MaxSpec}(R)$ 皆有 $x_{\mathfrak{m}} = 0$.
2. 以下陈述等价:
   (i) $M = 0$;
   (ii) 对所有 $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R)$ 皆有 $M_{\mathfrak{p}} = 0$;
   (iii) 对所有 $\mathfrak{m} \in \mathrm{MaxSpec}(R)$ 皆有 $M_{\mathfrak{m}} = 0$.
3. 对于 R-模的复形 $M^{\bullet} = \left[\cdots \xrightarrow{f^{n-1}} M^n \xrightarrow{f^n} M^{n+1} \xrightarrow{f^{n+1}} \cdots \right]$, 以下陈述等价:
   (i) $M^{\bullet}$ 正合;
   (ii) 对所有 $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R)$, 复形 $M^{\bullet}$ 对函子 $(\cdot)_{\mathfrak{p}}$ 的像正合;
   (iii) 对所有 $\mathfrak{m} \in \mathrm{MaxSpec}(R)$, 复形 $M^{\bullet}$ 对函子 $(\cdot)_{\mathfrak{m}}$ 的像正合.
4. 对于所有同态 $f : M \to M'$, 以下陈述等价:
   (i) f 为零同态 (或为单, 或为满, 或为同构);
   (ii) 对所有 $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R)$ 皆有 $f_{\mathfrak{p}}$ 为零同态 (或为单, 或为满, 或为同构);
   (iii) 对所有 $\mathfrak{m} \in \mathrm{MaxSpec}(R)$ 皆有 $f_{\mathfrak{m}}$ 为零同态 (或为单, 或为满, 或为同构).

证明 先考虑第一部分. 显然 (i) $\implies$ (ii) $\implies$ (iii). 以下将证明 (iii) $\implies$ (i) 的逆否命题. 设 $x \neq 0$ 则 $\mathrm{ann}(x) \subsetneq R$, 故存在 $\mathfrak{m} \in \mathrm{MaxSpec}(R)$ 使得 $\mathrm{ann}(x) \subset \mathfrak{m}$ (引理 1.10.4); 于是从引理 1.6.3 (i) 易得 $x \notin \ker[M \to M_{\mathfrak{m}}]$, 亦即 $x_{\mathfrak{m}} \neq 0$.

对所有 $x \in M$ 应用上述结论, 即得第二部分.

对于第三部分, 回忆到局部化保持所有正合列 (引理 1.6.3 (iii)), 特别地它保持核, 商与像. 因此将第二部分的结论施于所有 $\mathrm{H}^n(M^{\bullet}) := \ker(f^n)/\mathrm{im}(f^{n-1})$ 即可.

对于第四部分, 分别对复形

$$M \xrightarrow{\mathrm{id}} M \to M', \quad 0 \to M \to M', \quad M \to M' \to 0, \quad 0 \to M \to M' \to 0$$

应用第三部分的等价即可. □

引理 2.4.1 提示了子集 $\{\mathfrak{p} : M_{\mathfrak{p}} \neq 0\}$ 值得悉心探究.

定义 2.4.2 (支集) 设 M 为 R-模, 其支集定义为

$$\mathrm{Supp}(M) = \mathrm{Supp}_R(M) := \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R) : M_{\mathfrak{p}} \neq 0\}.$$

例 2.4.3 取 I 为 R 的理想. 基于局部化的正合性, 对所有 $\mathfrak{p}$ 皆有

$$(R/I)_{\mathfrak{p}} = 0 \iff R_{\mathfrak{p}}/I_{\mathfrak{p}} = 0 \iff I_{\mathfrak{p}} = R_{\mathfrak{p}} \iff I \not\subset \mathfrak{p};$$

最后一步是命题 1.7.6 (i). 由此立见 $\mathrm{Supp}(R/I) = V(I)$.

一般而言, 模的支集未必形如 $V(I)$, 但依然向上封闭.

引理 2.4.4 若 $\mathfrak{p} \in \mathrm{Supp}(M)$ 而 $\mathfrak{p}' \supset \mathfrak{p}$, 则 $\mathfrak{p}' \in \mathrm{Supp}(M)$.

证明 设 $M_{\mathfrak{p}} \neq 0$, 则局部化的传递性 (1.7.4) 蕴涵 $M_{\mathfrak{p}'} \neq 0$. □

引理 2.4.5 我们有 $\mathrm{Supp}(M) \subset V(\mathrm{ann}(M))$. 若要求 M 是有限生成 R-模, 则 $\mathrm{Supp}(M) = V(\mathrm{ann}(M))$, 因而此时 $\mathrm{Supp}(M)$ 是 $\mathrm{Spec}(R)$ 的闭子集.

证明 设 $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R)$ 满足 $M_{\mathfrak{p}} \neq 0$. 根据引理 1.6.3 (ii), 存在 $x \in M$ 使得对所有 $u \in R \smallsetminus \mathfrak{p}$ 皆有 $ux \neq 0$, 换言之 $\mathrm{ann}(x) \subset \mathfrak{p}$. 于是 $\mathrm{ann}(M) \subset \mathfrak{p}$.

现在假设 M 有限生成. 设 $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R) \smallsetminus \mathrm{Supp}(M)$, 则 $M_{\mathfrak{p}} = 0$ 而引理 1.6.3 (ii) 给出 $u \in R \smallsetminus \mathfrak{p}$ 使得 $u \in \mathrm{ann}(M)$, 故 $\mathrm{ann}(M) \not\subset \mathfrak{p}$. 证毕. □

命题 2.4.6 设 $M' \to M \to M''$ 为 R-模的正合列, 则

$$\mathrm{Supp}(M) \subset \mathrm{Supp}(M') \cup \mathrm{Supp}(M'');$$

设 $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ 为 R-模的短正合列, 则

$$\mathrm{Supp}(M) = \mathrm{Supp}(M') \cup \mathrm{Supp}(M'').$$

证明 对所有 $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R)$, 引理 1.6.3 (iii) 表明在两种前提下分别有正合列 $M'_{\mathfrak{p}} \to M_{\mathfrak{p}} \to M''_{\mathfrak{p}}$ 和短正合列 $0 \to M'_{\mathfrak{p}} \to M_{\mathfrak{p}} \to M''_{\mathfrak{p}} \to 0$. 问题化为以下观察: 对于任意正合列 $N' \to N \to N''$ (或短正合列 $0 \to N' \to N \to N'' \to 0$) 都有 $N' = 0 = N'' \implies N = 0$ (或 $N' = 0 = N'' \iff N = 0$). □

引理 2.4.7 设 I 为 R 的理想, M 为 R-模, 则 M/IM 作为 R-模的支集包含于 $V(I)$, 并且在推论 1.10.11 的同胚 $\mathrm{Spec}(R/I) \simeq V(I)$ 之下等同于它作为 R/I-模的支集.

证明 以引理 1.7.9 将 $(IM)_{\mathfrak{p}} \subset M_{\mathfrak{p}}$ 等同于 $IR_{\mathfrak{p}} \cdot M_{\mathfrak{p}}$. 命题 1.7.6 (i) 说明 $\mathfrak{p} \not\supset I$ 时 $IR_{\mathfrak{p}} = R_{\mathfrak{p}}$. 因此 M/IM 作为 R-模的支集包含于 $V(I)$.

设 $\mathfrak{p} \in V(I)$, 它对应到 $\mathfrak{p}/I \in \mathrm{Spec}(R/I)$. 应用局部化的描述, 关于 R-模的等式 $(M/IM)_{\mathfrak{p}} = 0$ 等价于: 对所有 $x \in M$ 存在 $u \in R \smallsetminus \mathfrak{p}$ 使得 $ux \in IM$.

另一方面, R/I-模的等式 $(M/IM)_{\mathfrak{p}/I} = 0$ 等价于: 对所有 $\bar{x} \in M/IM$ 存在 $\bar{u} \in (R/I) \smallsetminus (\mathfrak{p}/I)$ 使得 $\bar{u}\bar{x} = 0$. 任取 $\bar{u}$ (或 $\bar{x}$) 的代表元 $u \in R$ (或 $x \in M$), 关于 $\bar{u}$ 的条件化为 $u \notin \mathfrak{p}$, 而先前的陈述等价于 $ux \in IM$.

因此对所有 $\mathfrak{p} \in V(I)$ 得到 $(M/IM)_{\mathfrak{p}} = 0 \iff (M/IM)_{\mathfrak{p}/I} = 0$, 证毕. □

引理 2.4.8 设 M 为有限生成 R-模.

(i) 沿用定义–命题 1.11.6 的符号, $\mathrm{Supp}(M) = \left\{ \mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R) : M \underset{R}{\otimes} \kappa(\mathfrak{p}) \neq 0 \right\}$.

(ii) 给定环同态 $R \to S$, 考虑 S-模 $M_S := M \underset{R}{\otimes} S$, 则 $\mathrm{Supp}(M_S)$ 是 $\mathrm{Supp}(M)$ 对 $\mathrm{Spec}(S) \to \mathrm{Spec}(R)$ 的原像.

(iii) 设 I 为 R 的理想, 则 $\mathrm{Supp}(M/IM) = \mathrm{Supp}(M) \cap V(I)$.

(iv) 进一步设 M 是有限展示的, 则存在 $k \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ 和 $h_1, \ldots, h_k \in R$ 使得 $\mathrm{Supp}(M) = V(h_1, \ldots, h_k)$.

证明 对于 (i), 先循 (1.11.1) 将 $R \to \kappa(\mathfrak{p})$ 分解为 $R \to R_{\mathfrak{p}} \to \kappa(\mathfrak{p})$. 鉴于命题 1.3.5, 1.3.7 和 1.6.6,

$$M \underset{R}{\otimes} \kappa(\mathfrak{p}) \simeq M \underset{R}{\otimes} R_{\mathfrak{p}} \underset{R_{\mathfrak{p}}}{\otimes} \kappa(\mathfrak{p}) \simeq M_{\mathfrak{p}} \underset{R_{\mathfrak{p}}}{\otimes} \kappa(\mathfrak{p}) \simeq M_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}M_{\mathfrak{p}}.$$

因为 M 有限生成, 定理 2.3.4 蕴涵

$$M_{\mathfrak{p}} \neq 0 \iff \mathfrak{p}M_{\mathfrak{p}} \neq M_{\mathfrak{p}}.$$

对于 (ii), 取 $\mathfrak{q} \in \mathrm{Spec}(S)$ 及其像 $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R)$, 则 $R \to S$ 依照命题 1.11.9 诱导域嵌入 $\kappa(\mathfrak{p}) \to \kappa(\mathfrak{q})$. 在典范同构

$$M_S \underset{S}{\otimes} \kappa(\mathfrak{q}) \simeq M \underset{R}{\otimes} \kappa(\mathfrak{q}) \simeq \left(M \underset{R}{\otimes} \kappa(\mathfrak{p}) \right) \underset{\kappa(\mathfrak{p})}{\otimes} \kappa(\mathfrak{q})$$

中, 最右的外层张量积是在域 $\kappa(\mathfrak{p})$ 上取的, 故

$$M_S \underset{S}{\otimes} \kappa(\mathfrak{q}) \neq 0 \iff M \underset{R}{\otimes} \kappa(\mathfrak{p}) \neq 0,$$

应用 (i) 遂有 $\mathfrak{p} \in \mathrm{Supp}(M) \iff \mathfrak{q} \in \mathrm{Supp}(M_S)$.

对于 (iii), 引理 2.4.7 确保 $\mathrm{Supp}(M/IM)$ 可以作为 R/I-模的支集来处理; 另一方面 $M/IM \simeq (R/I) \underset{R}{\otimes} M$ 是 R/I-模同构. 运用 (ii) 遂可将 $\mathrm{Supp}(M/IM)$ 等同于 $\mathrm{Supp}(M)$ 对 $\mathrm{Spec}(R/I) \to \mathrm{Spec}(R)$ 的原像, 即 $\mathrm{Supp}(M) \cap V(I)$.

对于 (iv), 取定正合列 $R^{\oplus m} \xrightarrow{f} R^{\oplus n} \to M \to 0$; 不失一般性可设 $m \geq n$. 将 f 用 R 上的 $n \times m$ 矩阵表达, 再记 $I \subset R$ 为其所有 n 阶子行列式生成的理想. 对所有 $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R)$, 沿 $R \to \kappa(\mathfrak{p})$ 作张量积得到 $\kappa(\mathfrak{p})$-向量空间的正合列

$$\kappa(\mathfrak{p})^{\oplus m} \xrightarrow{f \otimes \kappa(\mathfrak{p})} \kappa(\mathfrak{p})^{\oplus n} \to M \underset{R}{\otimes} \kappa(\mathfrak{p}) \to 0,$$

由此可知 $M \underset{R}{\otimes} \kappa(\mathfrak{p}) \neq 0$ 等价于 $f \otimes \kappa(\mathfrak{p})$ 的秩 $< n$, 等价于相应矩阵的 n 阶子行列式全为 0, 也等价于 $\mathfrak{p} \supset I$. 由 (i) 遂有 $\mathrm{Supp}(M) = V(I)$. 按构造, I 可表作 $(h_1, \ldots, h_k)$ 之形, 其中 $k \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$. □

引理 2.4.9 设 R 为环, M_1 和 M_2 为有限生成 R-模, 则

$$\mathrm{Supp}\left(M_1 \underset{R}{\otimes} M_2\right) = \mathrm{Supp}(M_1) \cap \mathrm{Supp}(M_2).$$

证明 基于 (1.3.2), 证以下断言即可: 设 $(R, \mathfrak{m})$ 为局部环, 则 $M_1 \underset{R}{\otimes} M_2 = 0$ 当且仅当 $M_1 = 0$ 或 $M_2 = 0$. 对 $i = 1, 2$ 设 $M_i \neq 0$, 则定理 2.3.4 说明 $\kappa(\mathfrak{m}) \underset{R}{\otimes} M_i \neq 0$. 然而 (1.3.2) 蕴涵

$$\kappa(\mathfrak{m}) \underset{R}{\otimes} \left(M_1 \underset{R}{\otimes} M_2\right) \simeq \left(\kappa(\mathfrak{m}) \underset{R}{\otimes} M_1\right) \underset{\kappa(\mathfrak{m})}{\otimes} \left(\kappa(\mathfrak{m}) \underset{R}{\otimes} M_1\right);$$

非零 $\kappa(\mathfrak{m})$-向量空间的张量积非零, 故右式非零. 证毕. □

2.5 素谱的其它拓扑性质

在幂零根基的理论基础上, 本节承 §1.10 的余绪, 进一步梳理素谱的基本拓扑性质; 这些性质也涉及附录 A 的内容.

本节的 R 均代表选定的环.

命题 2.5.1 拓扑空间 $\mathrm{Spec}(R)$ 对 Zariski 拓扑是拟紧 (定义 A.1.4) 而且拟分离 (定义 A.1.5) 的; 它有一组由拟紧开子集构成的基.

证明 先说明拟紧性质. 设有一族开子集 $\mathcal{U}$ 使得 $\mathrm{Spec}(R) = \bigcup \mathcal{U}$, 今将说明它有有限子覆盖. 由于形如 $D(f)$ 的开子集构成基, 将覆盖加细后不妨设 $\mathcal{U} = \{D(f) : f \in \Sigma\}$, 其中 Σ 是 R 的子集.

推论 1.10.6 说明存在 $f_1, \ldots, f_m \in \Sigma$ 和 $r_1, \ldots, r_m \in R$ 使得 $\sum_{i=1}^m r_i f_i = 1$, 但同一推论又说明这给出有限子覆盖 $\mathrm{Spec}(R) = D(f_1) \cup \cdots \cup D(f_m)$.

其次, 推论 1.10.11 给出同胚 $D(f) \simeq \mathrm{Spec}(R[f^{-1}])$, 因此 $\{D(f)\}_{f \in R}$ 是一组由拟紧开子集构成的基.

最后说明拟分离性质. 考虑拟紧开子集 U 和 V. 存在 R 的元素 $f_1, \ldots, f_m$ 和 $g_1, \ldots, g_n$ 使得 $U = \bigcup_{i=1}^m D(f_i)$ 而 $V = \bigcup_{j=1}^n D(g_j)$. 引理 1.10.3 (ii) 蕴涵

$$U \cap V = \bigcup_{i,j} D(f_i) \cap D(g_j) = \bigcup_{i,j} D(f_i g_j).$$

然而已知 $D(f_i g_j)$ 拟紧, 而拟紧子集的有限并仍是拟紧的. □

命题 2.5.2 设 $\varphi : R \to S$ 为环同态, 则 $\mathrm{Spec}(\varphi) : \mathrm{Spec}(S) \to \mathrm{Spec}(R)$ 是拟紧映射 (定义 A.1.4).

证明 设 U 为 $\mathrm{Spec}(R)$ 的拟紧开子集, 则存在 $f_1, \ldots, f_n \in R$ 使得 $U = \bigcup_{i=1}^n D(f_i)$, 故命题 1.10.10 给出 $\mathrm{Spec}(\varphi)^{-1}(U) = \bigcup_{i=1}^n \mathrm{Spec}(\varphi)^{-1}(D(f_i)) = \bigcup_{i=1}^n D(\varphi(f_i))$. 推论 1.10.11 (iii) 给出同胚 $D(\varphi(f_i)) \simeq \mathrm{Spec}\, S[\varphi(f_i)^{-1}]$, 而命题 2.5.1 确保后者拟紧, 故 $\mathrm{Spec}(\varphi)^{-1}(U)$ 拟紧. □

引理 2.5.3 如果 $e \in R$ 是幂等元, 则 $\mathrm{Spec}(R) \smallsetminus D(e) = D(1-e)$. 我们有双射

$$\begin{aligned} \{e \in R : \text{幂等元}\} &\xrightarrow{1:1} \{U \subset \mathrm{Spec}(R) : \text{既开又闭}\} \\ e &\longmapsto D(e). \end{aligned}$$

证明 若 e 是幂等元, 记 $e' := 1 - e$, 则 $ee' = 0$ 导致 $D(e) \cap D(e') = \varnothing$, 而 $e + e' = 1$ 导致 $D(e) \cup D(e') = \mathrm{Spec}(R)$. 因此 $\mathrm{Spec}(R) \smallsetminus D(e) = D(e')$, 而 $D(e)$ 既开又闭.

设 $e_1 \neq e_2$ 为幂等元. 易验证

$$0 \neq e_1 - e_2 = e_1(e_2 + e_2') - (e_1 + e_1')e_2 = e_1 e_2' - e_1' e_2.$$

不失一般性, 设 $e_1 e_2' \neq 0$. 由于 $e_1 e_2'$ 仍是幂等元, 它不是幂零元, 故推论 2.1.6 蕴涵存在素理想 $\mathfrak{p}$ 使得 $e_1 e_2' \notin \mathfrak{p}$. 由此可见 $\mathfrak{p} \in D(e_1)$ 而 $\mathfrak{p} \notin D(e_2) = \mathrm{Spec}(R) \smallsetminus D(e_2')$.

综上, 所示映射是良定义的单射. 以下证其满.

设 $U \subset \mathrm{Spec}(R)$ 既开又闭. 命 $V := \mathrm{Spec}(R) \smallsetminus U$, 则命题 2.5.1 和拓扑常识 (引理 A.1.6) 表明 U 与 V 皆拟紧. 它们可写成

$$U = \bigcup_{i=1}^m D(f_i), \quad V = \bigcup_{j=1}^n D(g_j).$$

于是 $\varnothing = U \cap V = \bigcup_{i,j} D(f_i g_j)$ (引理 1.10.3 (ii)). 从 $D(f_i g_j) = \varnothing$ 和推论 2.1.6 推得 $f_i g_j$ 对所有 (i, j) 皆幂零.

记 $I := (f_1, \ldots, f_m)$, $J := (g_1, \ldots, g_n)$. 上一步说明存在 $N \gg 0$ 使得 $(IJ)^N = 0$. 引理 1.10.3 (iii) 给出 $\mathrm{Spec}(R) \smallsetminus U = V(I)$ 和 $\mathrm{Spec}(R) \smallsetminus V = V(J)$, 故

$$\mathrm{Spec}(R) = V(I) \sqcup V(J), \quad \varnothing = V(I + J);$$

后者相当于说 $I+J=R$. 两边取 $2N$ 次幂, 可见存在 $x\in I^N$ 和 $y\in J^N$ 使得 $x+y=1$. 注意到 $xy=0$. 由此可得 x 是属于 I 的幂等元, $y=1-x$ 是属于 J 的幂等元.

现在有 $\mathrm{Spec}(R)=D(x)\sqcup D(y)$, 而 $U=\mathrm{Spec}(R)\smallsetminus V(I)$ 蕴涵 $D(x)\subset U$, 同理 $D(y)\subset V$. 综上可得 $U=D(x)$ 和 $V=D(y)$. 映射的满性得证. □

注记 2.5.4 命题 1.2.2 表明幂等元 $e\in R$ 给出环的直积分解 $R\xrightarrow{\sim}eR\times(1-e)R$, 映法是 $r\mapsto(er,(1-e)r)$; 此外, 命题 1.2.3 之下的讨论说明 R 的素理想必形如 $\mathfrak{p}\times(1-e)R$ 或 $eR\times\mathfrak{p}'$. 在引理 2.5.3 的情景中, 易见前者正是 $D(e)$ 的元素, 后者正是 $D(1-e)$ 的元素.

命题 2.5.5 设 R 为非零环, 则 $\mathrm{Spec}(R)$ 连通当且仅当 R 没有 0 和 1 以外的幂等元, 当且仅当 R 不同构于两个非零环的直积.

证明 运用 §1.2 和引理 2.5.3, 并注意到以下性质: 对所有幂等元 $e\in R$, 推论 1.10.5 (ii) 表明 $D(e)=\mathrm{Spec}(R)$ 等价于 $e\in R^\times$, 而因为 $e(e-1)=0$, 这也等价于 $e=1$. □

引理 2.5.6 设 $\mathfrak{p},\mathfrak{q}\in\mathrm{Spec}(R)$, 则 $\mathfrak{p}\subset\mathfrak{q}$ 当且仅当 $\mathfrak{p}$ 是 $\mathfrak{q}$ 在拓扑空间 $\mathrm{Spec}(R)$ 中的泛化, 或等价地说 $\mathfrak{q}$ 是 $\mathfrak{p}$ 的特化 (定义 A.5.1).

证明 按定义, $\mathfrak{p}$ 是 $\mathfrak{q}$ 的泛化相当于说 $\mathfrak{q}\in\overline{\{\mathfrak{p}\}}$, 而引理 1.10.8 表明 $\overline{\{\mathfrak{p}\}}=V(\mathfrak{p})$. □

命题 2.5.7 回忆不可约子集的定义 A.4.1. 我们有双射

$$\begin{aligned}\mathrm{Spec}(R)&\xrightarrow{1:1}\{\mathrm{Spec}(R)\text{ 的不可约闭子集}\}\\ \mathfrak{p}&\longmapsto V(\mathfrak{p}),\end{aligned}$$

而且双射是严格反序的: $\mathfrak{p}\subset\mathfrak{q}\iff V(\mathfrak{p})\supset V(\mathfrak{q})$.

证明 可设 R 非零. 对所有素理想 $\mathfrak{p}$, 先前已见 $V(\mathfrak{p})=\overline{\{\mathfrak{p}\}}$, 这总是不可约闭子集 (引理 A.4.5 (ii)). 另一方面, 若 $\overline{\{\mathfrak{p}_1\}}=\overline{\{\mathfrak{p}_2\}}$ 则 $\mathfrak{p}_1$ 和 $\mathfrak{p}_2$ 互为泛化, 引理 2.5.6 遂表明 $\mathfrak{p}_1=\mathfrak{p}_2$. 综上, 所示映射是良定义的单射, 以下说明满性.

推论 2.1.8 表明 $\mathrm{Spec}(R)$ 的闭子集形如 $V(I)$, 其中 I 是根理想. 以下论证若 $I=\sqrt{I}$ 非素理想, 则 $V(I)$ 非不可约. 取 $x,y\in R\smallsetminus I$ 使得 $xy\in I$. 考虑理想 (I,x) 和 (I,y), 我们有 $I^2\subset(I,x)(I,y)\subset I$, 特别地 $\sqrt{(I,x)(I,y)}=I$, 故

$$V(I,x)\cup V(I,y)=V((I,x)(I,y))=V(I).$$

必有 $V(I,x)\subsetneq V(I)$, 否则 $I=\sqrt{(I,x)}\supset(I,x)$ 将导致 $x\in I$, 矛盾. 同理 $V(I,y)\subsetneq V(I)$.

最后, 反序性质是显然的. □

推论 2.5.8 拓扑空间 $\mathrm{Spec}(R)$ 不可约的充要条件是 $\mathrm{nil}(R)$ 为素理想.

证明 应用命题 2.5.7: 注意到 $\mathrm{nil}(R)$ 和任意素理想 $\mathfrak{p}$ 都是根理想, 而根据闭子集和根理想的对应 (推论 2.1.8), $V(\mathfrak{p}) = \mathrm{Spec}(R)$ 当且仅当 $\mathfrak{p} = \mathrm{nil}(R)$. □

命题 2.5.9 空间 $\mathrm{Spec}(R)$ 是定义 A.6.1 所谓的朴素空间; 换言之, 其中每个不可约闭子集都有唯一泛点.

证明 设 $Z \subset \mathrm{Spec}(R)$ 为不可约闭子集. 命题 2.5.7 表明 $Z = V(\mathfrak{p}) = \overline{\{\mathfrak{p}\}}$, 其中素理想 $\mathfrak{p}$ 由 Z 唯一确定, 因而 $\mathfrak{p}$ 是 Z 的唯一泛点. □

既知 $\mathrm{Spec}(R)$ 朴素, 命题 2.5.7 的双射遂对应到引理 A.6.2 中的双射 cl.

能翻译为环论语言的另一个重要拓扑概念是 Jacobson 空间 (定义 A.8.2), 这是 §2.6 的主题.

2.6 Jacobson 环和零根定理

本节将涉及 §A.8 的一些拓扑概念.

定义 2.6.1 (Jacobson 环) 若环 R 的所有素理想 $\mathfrak{p}$ 都满足

$$\mathfrak{p} = \bigcap_{\substack{\mathfrak{m} \in \mathrm{MaxSpec}(R) \\ \mathfrak{m} \supset \mathfrak{p}}} \mathfrak{m},$$

则称 R 为 Jacobson 环.

等价的定义是要求对所有素理想 $\mathfrak{p}$ 皆有 $\mathrm{rad}(R/\mathfrak{p}) = 0$, 其中 $\mathrm{rad}(\cdots)$ 是定义 2.3.1 的 Jacobson 根基.

举例明之, 域总是 Jacobson 环. 至于非 Jacobson 环的例子, 取任意整环 R 及非零素理想 $\mathfrak{p}$, 则局部化 $R_{\mathfrak{p}}$ 仍是整环, 并满足 $\mathrm{rad}(R_{\mathfrak{p}}) = \mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}} \neq 0$.

零环显然是 Jacobson 环. 今后的讨论中省略这种平凡例子.

例 2.6.2 以下说明一个主理想环 R 是 Jacobson 环的充要条件是它有无穷多个极大理想 (例如 $\mathbb{Z}$). 首先注意到主理想环的素理想分两类: (a) 由素元生成的理想, 它们本身已是极大理想; (b) 零理想. 因此 Jacobson 环的条件仅需对 (b) 的情形检验. 设 $r \in R \smallsetminus \{0\}$, 则极大理想 (π) 包含 r 等价于 $\pi \mid r$; 唯一分解性表明存在被所有素元整除的 r 当且仅当 R 仅有有限个素元, 精确到 $R^{\times}$, 而这也等价于 R 仅有有限多个极大理想.

引理 2.6.3 设 R 为 Jacobson 环, $I \subset R$ 为理想, 则

$$\sqrt{I} = \bigcap_{\substack{\mathfrak{m}:\ \text{极大理想} \\ \mathfrak{m} \supset I}} \mathfrak{m}.$$

证明 命题 2.1.5 给出 $\sqrt{I} = \bigcap_{\mathfrak{p} \in V(I)} \mathfrak{p}$. 以 Jacobson 性质将每个 $\mathfrak{p}$ 表作包含它的极大理想 $\mathfrak{m}$ 之交, 便有

$$\sqrt{I} = \bigcap_{\mathfrak{p} \in V(I)} \bigcap_{\mathfrak{m} \supset \mathfrak{p}} \mathfrak{m} = \bigcap_{\mathfrak{m} \supset I} \mathfrak{m}.$$

明所欲证. □

引理 2.6.4 环 R 是 Jacobson 环当且仅当 $\mathrm{Spec}(R)$ 是 Jacobson 空间 (定义 A.8.2).

证明 设 R 是 Jacobson 环. 考虑 $\mathrm{Spec}(R)$ 的闭子集 $V(I)$. 设开子集 $\mathcal{U}$ 满足 $\mathcal{U} \cap V(I) \neq \varnothing$, 目标是证 $\mathcal{U}$ 含 $V(I)$ 的闭点, 亦即 R 的极大理想 (命题 1.10.9); 为此, 不妨设 $\mathcal{U} = D(f)$, 其中 $f \in R \smallsetminus I$.

存在 $\mathfrak{p} \in V(I)$ 使得 $f \notin \mathfrak{p}$. 基于 Jacobson 环的性质, 存在极大理想 $\mathfrak{m} \supset \mathfrak{p}$ 使得 $f \notin \mathfrak{m}$, 于是闭点 $\mathfrak{m} \in D(f) \cap V(I)$.

反之设 $\mathrm{Spec}(R)$ 是 Jacobson 空间. 对所有素理想 $\mathfrak{p}$, 目标是证

$$\mathfrak{p} = \bigcap_{\substack{\mathfrak{m} \in \mathrm{MaxSpec}(R) \\ \mathfrak{m} \supset \mathfrak{p}}} \mathfrak{m};$$

包含关系 $\subset$ 显然. 今设 $f \in R$ 属于右式, 则 $D(f)$ 不含 $V(\mathfrak{p})$ 的任何闭点, 故由 Jacobson 空间的定义可知 $D(f) \cap V(\mathfrak{p}) = \varnothing$; 特别地, $\mathfrak{p} \notin D(f)$, 亦即 $f \in \mathfrak{p}$. □

命题 2.6.5 若 Jacobson 环 R 仅有有限个极大理想, 则 $\mathrm{Spec}(R)$ 是离散拓扑空间.

证明 已知极大理想对应到闭点. 引理 2.6.4 说明 $\mathrm{Spec}(R)$ 是 Jacobson 空间, 故可代入命题 A.8.3. □

命题 2.6.6 设 R 为 Jacobson 环.

(i) 若 I 是 R 的理想, 则 R/I 是 Jacobson 环.

(ii) 若 $f \in R$, 则 $R[f^{-1}]$ 是 Jacobson 环.

证明 将推论 1.10.11 与引理 A.8.5 搭配. □

引理 2.6.7 设 A 为整环, R 为 A 的子环, 使得 A 成为有限生成 R-代数. 若 $\mathrm{rad}(R) = 0$ 则 $\mathrm{rad}(A) = 0$.

证明 处理 A 作为 R-代数由单个元素 $a \in A$ 生成的情况即可; 这相当于要求有 R-代数的满同态

$$R[X] \twoheadrightarrow A, \quad X \mapsto a.$$

若上述同态为单, 则 $A \simeq R[X]$, 而定理 2.3.8 给出 $\mathrm{rad}(R[X]) \simeq \mathrm{nil}(R[X]) = 0$; 最后一段等号是因为 R 是整环.

若上述同态非单, 则存在 $f=\sum_{i=0}^{n} r_i X^i \in R[X]$ 使得 $r_n \neq 0$ 而 $f(a)=0$. 以下使用反证法, 设 $b \in \mathrm{rad}(A) \smallsetminus \{0\}$. 将 A 视为 $\mathrm{Frac}(A)$ 的子环, 相应地将 $K := \mathrm{Frac}(R)$ 嵌为 $\mathrm{Frac}(A)$ 的子域. 由于 a 是 K 上的代数元, 故 $b \in R[a] \subset K[a]$ 亦然 [7, 推论 7.2.3]. 通分后不妨取 $g=\sum_{i=0}^{m} s_i X^i \in R[X]$ 使得 $s_m \neq 0$ 而 $g(b)=0$; 取 g 使得 m 尽可能小, 则因为 A 是整环而 $b \neq 0$, 必有 $s_0 \neq 0$.

由于 $\mathrm{rad}(R)=0$, 存在 R 的极大理想 $\mathfrak{m}$ 使得 $s_0 r_n \notin \mathfrak{m}$. 考虑 A 在 $\mathfrak{m}$ 处的局部化

$$A' := A \underset{R}{\otimes} R_{\mathfrak{m}} \simeq A[(R \smallsetminus \mathfrak{m})^{-1}] \subset \mathrm{Frac}(A);$$

严格来说, 以上的环同构基于定义–命题 1.8.3. 注意到 A' 作为 $R_{\mathfrak{m}}$-代数由 a 的像 a' 生成, $f(a')=0$, 而 f 的最高次系数 r_n 在 $R_{\mathfrak{m}}$ 中可逆, 从而 $A'=\sum_{i=0}^{n-1} R_{\mathfrak{m}}(a')^i$ 是有限生成 $R_{\mathfrak{m}}$-模.

然而 A' 非零环, 定理 2.3.4 确保 $\mathfrak{m}(R_{\mathfrak{m}})A' \subsetneq A'$, 从而 $\mathfrak{m}A \subsetneq A$. 于是 A 有极大理想 $\mathfrak{m}_A$ 使得 $\mathfrak{m}_A \supset \mathfrak{m}$; 又因为 $\mathfrak{m}$ 是 R 的极大理想, 必有 $R \cap \mathfrak{m}_A = \mathfrak{m}$, 故 $s_0 \notin \mathfrak{m}_A$. 然而 $s_0 = -\sum_{i=1}^{m} s_i b^i \in \mathrm{rad}(R)$, 矛盾. □

以下结论是著名的 **Hilbert 零根定理**的一种广义形式.

定理 2.6.8 设 R 为 Jacobson 环, A 是有限生成 R-代数.

(i) 此时 A 是 Jacobson 环.

(ii) 从 $R \to A$ 诱导的映射 $\mathrm{Spec}(A) \to \mathrm{Spec}(R)$ 限制为 $\mathrm{MaxSpec}(A) \to \mathrm{MaxSpec}(R)$.

(iii) 设 $\mathfrak{n} \in \mathrm{MaxSpec}(A)$ 映至 $\mathfrak{m} \in \mathrm{MaxSpec}(R)$, 则诱导同态 $R/\mathfrak{m} \to A/\mathfrak{n}$ 使得 $A/\mathfrak{n}$ 成为域 $R/\mathfrak{m}$ 的有限扩域.

证明 对于 (i), 首先记 $I=\ker[R \to A]$; 命题 2.6.6 确保商环 R/I 仍是 Jacobson 环. 因此不妨以 R/I 代 R, 设 R 为 A 的子环. 我们的目标是对 A 的所有素理想 $\mathfrak{q}$ 证 $\mathrm{rad}(A/\mathfrak{q})=0$. 注意到:

- 基于前述理由, $R/(\mathfrak{q} \cap R)$ 仍是 Jacobson 整环, 特别地 $\mathrm{rad}(R/(\mathfrak{q} \cap R))=0$;
- $A/\mathfrak{q}$ 是有限生成 $R/(\mathfrak{q} \cap R)$-代数, 也是整环.

代入引理 2.6.7 立得 $\mathrm{rad}(A/\mathfrak{q})=0$.

对于 (ii) 和 (iii), 不失一般性可设 A 作为 R-代数由单个元素 a 生成. 给定 $\mathfrak{n} \in \mathrm{MaxSpec}(A)$, 记其像为 $\mathfrak{m} \in \mathrm{Spec}(R)$. 这给出单同态 $R/\mathfrak{m} \hookrightarrow A/\mathfrak{n}$. 基于 (i), 这仍是 Jacobson 环之间的同态, 仍给出由单个元素生成的代数. 因此不妨进一步要求 $\mathfrak{m}$ 和 $\mathfrak{n}$ 都是零理想, R 是域 A 的子环, 而存在 a 使得 $A=R[a]$.

由 a 确定的 R-代数满同态 $R[X] \twoheadrightarrow A$ 不能是单的, 否则 $R[X] \simeq A$, 然而 $R[X]$ 非域. 因此必有 $f=\sum_{i=0}^{n} c_i X^i \in R[X]$ 使得 $c_n \neq 0$ 而 $f(a)=0$.

现在起可以沿用引理 2.6.7 的证法. 因为 $\mathrm{rad}(R)=0$, 存在 R 的极大理想 $\mathfrak{k}$ 使得 $c_n \notin \mathfrak{k}$; 对 A 在 $\mathfrak{k}$ 处作局部化, 可得有限生成 $R_{\mathfrak{k}}$-模 A', 继而推得 $\mathfrak{k}A \subsetneq A$. 差异在于此处 A 是域, 故 $\mathfrak{k}=0$ 而 R 是域. 既然 $A=R[a]$ 而 $f(a)=0$, 故 A 是 R 的有限扩域. 综上证得 (ii) 和 (iii). □

2.7　代数集与理想的对应

本节旨在从定理 2.6.8 推导 Hilbert 零根定理的经典形式. 选定域 F 和 $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$, 我们将 F^n 的元素记作 $x=(x_1,\ldots,x_n)$ 的形式.

定理 2.7.1 (D. Hilbert)　设 F 为域. 对所有 $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ 皆有单射

$$\begin{aligned} F^n &\hookrightarrow \mathrm{MaxSpec}\left(F[X_1,\ldots,X_n]\right) \\ x &\longmapsto \mathfrak{m}_x := (X_1-x_1,\ldots,X_n-x_n). \end{aligned}$$

若要求 F 代数闭, 则上述映射还是双射.

证明　对所有 $x \in F^n$, 考虑求值同态

$$\begin{aligned} \mathrm{ev}_x : F[X_1,\ldots,X_n] &\twoheadrightarrow F \\ f &\mapsto f(x_1,\ldots,x_n), \end{aligned}$$

则 $\mathfrak{m}_x = \ker(\mathrm{ev}_x)$, 因而 $\mathfrak{m}_x$ 是极大理想.

设 $x,y \in F^n$ 满足 $\mathfrak{m}_x=\mathfrak{m}_y$, 则 $y_i - x_i = \mathrm{ev}_y(X_i - x_i) = 0$ 对所有 $1 \leq i \leq n$ 成立, 故 $x=y$. 所示映射为单射.

以下设 F 代数闭来论证满性. 设 $\mathfrak{n}$ 是 $F[X_1,\ldots,X_n]$ 的极大理想. 在定理 2.6.8 中代入 $A=F[X_1,\ldots,X_n]$ 和 $R=F$ 可得 $F[X_1,\ldots,X_n]/\mathfrak{n}$ 是 F 的有限扩域, 代数闭条件遂说明有 F-代数的同构 $F[X_1,\ldots,X_n]/\mathfrak{n} \xrightarrow{\sim} F$. 记 x_i 为 $X_i+\mathfrak{n}$ 对此同构的像, 则 $X_i - x_i \in \mathfrak{n}$, 从而 $x:=(x_1,\ldots,x_n)$ 满足 $\mathfrak{m}_x \subset \mathfrak{n}$. 已知 $\mathfrak{m}_x$ 极大, 故 $\mathfrak{n}=\mathfrak{m}_x$. □

后续讨论涉及一些定义.

- 对所有理想 $I \subset F[X_1,\ldots,X_n]$, 定义 F^n 的子集

$$Z(I) := \left\{x \in F^n : \forall f \in I,\ f(x)=0\right\}.$$

- 对 F^n 的所有子集 Z, 定义

$$I(Z) := \left\{f \in F[X_1,\ldots,X_n] : \forall x \in Z,\ f(x)=0\right\};$$

易见 $I(Z)$ 是 $F[X_1,\ldots,X_n]$ 的理想.

显然地, $I \subset J \implies Z(I) \supset Z(J)$ 而 $Z \subset W \implies I(Z) \supset I(W)$.

定义 2.7.2 (代数子集) 对于 F^n 的子集 Z, 若存在理想 I 使得 $Z = Z(I)$, 则称 Z 为 F^n 中的代数子集.

对于 $F[X_1, \ldots, X_n]$ 的任意理想 I, 按定义有

$$x \in Z(I) \iff \mathfrak{m}_x \supset I \iff \mathfrak{m}_x \in V(I) \cap \mathrm{MaxSpec}(F[X_1, \ldots, X_n]). \tag{2.7.1}$$

素谱 $\mathrm{Spec}(F[X_1, \ldots, X_n])$ 上的 Zariski 拓扑可以限制到其子集, 再搬运到 F^n 上. 由 (2.7.1) 立见 F^n 的代数子集等同于其中的 Zariski 闭子集. 此外, 引理 1.10.2 即刻给出

$$\begin{gathered} I \subset J \implies Z(I) \supset Z(J), \\ Z(\sum_\alpha I_\alpha) = \bigcap_\alpha Z(I_\alpha), \\ Z(I) \cup Z(J) = Z(I \cap J) = Z(IJ). \end{gathered} \tag{2.7.2}$$

引理 2.7.3 设 I 为 $F[X_1, \ldots, X_n]$ 的理想, 则 $Z(\sqrt{I}) = Z(I)$.

证明 由 $\sqrt{I}$ 的定义 2.1.1 立见 $x \in Z(I)$ 等价于 $x \in Z(\sqrt{I})$. 另一种观点则是运用 $V(I) = V(\sqrt{I})$ 和 (2.7.1). □

引理 2.7.4 设 F 为代数闭域, I 为 $F[X_1, \ldots, X_n]$ 的理想, 则 $I(Z(I)) = \sqrt{I}$.

作为推论, 若 $Z \subset F^n$ 是代数子集, 则 $I(Z)$ 为根理想 (定义 2.1.7).

证明 对于 $\supset$, 注意到若 $f \in F[X_1, \ldots, X_n]$ 满足 $f^N \in I$, 其中 $N \geq 1$, 则 $f(x)^N = f^N(x) = 0$ 对所有 $x \in Z(I)$ 成立, 因而 $f \in I(Z(I))$.

对于 $\subset$, 设 f 在 $Z(I)$ 上的取值恒为零. 既然 $x \in Z(I) \iff \mathfrak{m}_x \supset I$, 条件相当于

$$\forall x \in F^n, \ \mathfrak{m}_x \supset I \implies f \in \mathfrak{m}_x.$$

定理 2.7.1 确保 $F[X_1, \ldots, X_n]$ 的极大理想都形如 $\mathfrak{m}_x$, 于是引理 2.6.3 导致

$$f \in \bigcap_{\substack{\mathfrak{m}: \text{极大理想} \\ \mathfrak{m} \supset I}} \mathfrak{m} = \sqrt{I}.$$

引理 2.1.4 (iii) 给出最后的推论部分. □

命题 2.7.5 设 F 为代数闭域, 则有双射

$$\begin{aligned} \{I \subset R : \text{根理想}\} &\xleftrightarrow{1:1} \{Z \subset F^n : \text{代数子集}\} \\ I &\longmapsto Z(I) \\ I(Z) &\longleftarrow\!\shortmid Z \end{aligned}$$

证明 对任意理想 J, 引理 2.7.3 给出 $Z(J) = Z(\sqrt{J})$; 然而 $\sqrt{J}$ 总是根理想, 故右向映射 $Z(\cdot)$ 为满.

引理 2.7.4 进一步说明右向映射有左逆 $I(\cdot)$, 因而为单. 结合上一步可知断言中的映射为互逆双射. □

2.8 极小素理想

定理 2.6.8 对于 Jacobson 环 R 上的有限生成代数 A 证明了 $\mathrm{Spec}(A) \to \mathrm{Spec}(R)$ 限制为 $\mathrm{MaxSpec}(A) \to \mathrm{MaxSpec}(R)$, 而 §2.7 则初步解释了极大理想在几何中的意义: 它们对应到 "点". 本节旨在探讨问题的另一端: 极小素理想, 它们同样在几何中起作用.

设 R 为环, 偏序集 $(\mathrm{Spec}(R), \subset)$ 的极小元称为 R 的**极小素理想**.

举例明之, 整环的极小素理想无非是 0.

引理 2.8.1 设 R 为环, I 为 R 的真理想, 则:

(i) $\mathrm{Spec}(R)$ 的子集 $V(I)$ 对偏序 $\subset$ 有极小元 $\mathfrak{p}$, 这些极小元通过 $\mathfrak{p} \mapsto V(\mathfrak{p})$ 一一对应于 $V(I)$ 的不可约分支 (定义 A.4.4);

(ii) 若 $\mathfrak{p}'$ 是 $V(I)$ 的任意元素, 则可进一步取到 $(V(I), \subset)$ 的极小元 $\mathfrak{p}$ 使得 $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{p}'$.

特别地, 取 $I = 0$ 可见非零环总有极小素理想.

证明 以 R/I 代 R, 问题立刻化约到特例 $I = 0$. 取定 R 的素理想 $\mathfrak{p}'$. 基于命题 2.5.7 的反序双射, 我们有

$$\begin{gathered}\left\{\mathfrak{p} \subset R : \text{极小素理想, 满足 } \mathfrak{p} \subset \mathfrak{p}'\right\} \\ \Big\updownarrow{\scriptstyle 1:1} \\ \left\{C \subset \mathrm{Spec}(R) : \text{极大不可约闭子集, 满足 } C \supset V(\mathfrak{p}')\right\}.\end{gathered}$$

已知 $V(\mathfrak{p}')$ 不可约, 故引理 A.4.5 (iii) 和 (iv) 确保该第二行的集合非空, 而且极大不可约闭子集正是不可约分支. 该处的拓扑论证在此可用代数语言改述, 此处不赘. □

下面探讨极小素理想在环同态之下的原像.

引理 2.8.2 设有环的单同态 $\varphi : R \hookrightarrow S$, 则 $\mathrm{Spec}(\varphi) : \mathrm{Spec}(S) \to \mathrm{Spec}(R)$ 的像集包含 R 的所有极小素理想.

证明 通过 φ 将 R 视同 S 的子环. 考虑 R 的极小素理想 $\mathfrak{p}$. 视 S 为 R-模作局部化, 其产物 $S_{\mathfrak{p}}$ 等同于环的局部化 $S[(R \smallsetminus \mathfrak{p})^{-1}]$; 见定义–命题 1.8.3. 分别有环与拓扑空间

的交换图表

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, hook] \arrow[d] & S \arrow[d] \\ R_{\mathfrak{p}} \arrow[r, hook] & S_{\mathfrak{p}} \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathrm{Spec}(R) & \mathrm{Spec}(S) \arrow[l] \\ \mathrm{Spec}(R_{\mathfrak{p}}) \arrow[u] & \mathrm{Spec}(S_{\mathfrak{p}}). \arrow[l] \arrow[u] \end{tikzcd}$$

局部化的正合性导致 $R_{\mathfrak{p}} \to S_{\mathfrak{p}}$ 为单. 观察到 $R_{\mathfrak{p}}$ 非零环, 故 $S_{\mathfrak{p}}$ 亦然; 因此有 $\mathrm{Spec}(S_{\mathfrak{p}}) \neq \varnothing$.

由 (1.7.3) 可见 $R_{\mathfrak{p}}$ 恰有一个素理想 $\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}$, 沿 $\uparrow\!\!\llcorner$ 方向追右图遂知 $\mathrm{Spec}(S_{\mathfrak{p}})$ 的任意元素都被映为 $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R)$. 沿 $\leftarrow\!\urcorner$ 方向追右图可得 $\mathfrak{p} \in \mathrm{im}(\mathrm{Spec}(\varphi))$. □

引理 2.8.3 *考虑环同态 $\varphi : R \to S$. 若 $\mathfrak{p}$ 是 R 的极小素理想, 且 $\mathfrak{p}$ 属于 $\mathrm{Spec}(\varphi) : \mathrm{Spec}(S) \to \mathrm{Spec}(R)$ 的像, 则存在 S 的极小素理想 $\mathfrak{q}$ 使得 $\mathfrak{p} = \mathrm{Spec}(\varphi)(\mathfrak{q})$.*

证明 设 $\mathfrak{p} = \varphi^{-1}(\mathfrak{q}')$, 其中 $\mathfrak{q}' \in \mathrm{Spec}(S)$. 以引理 2.8.1 取 S 的极小素理想 $\mathfrak{q}$ 使得 $\mathfrak{q} \subset \mathfrak{q}'$, 则有 $\varphi^{-1}(\mathfrak{q}) \subset \varphi^{-1}(\mathfrak{q}') = \mathfrak{p}$. 然而 $\mathfrak{p}$ 极小, 故 $\varphi^{-1}(\mathfrak{q}) = \mathfrak{p}$. □

对于一般的同态 φ, 未必所有极小素理想都属于 $\mathrm{Spec}(\varphi)$ 的像; 我们有以下充要条件.

命题 2.8.4 *对于环同态 $\varphi : R \to S$, 以下陈述等价:*

(i) *$\ker(\varphi)$ 是局部幂零理想 (定义 2.2.2);*

(ii) *$\mathrm{Spec}(\varphi) : \mathrm{Spec}(S) \to \mathrm{Spec}(R)$ 的像对 Zariski 拓扑稠密;*

(iii) *R 的所有极小素理想皆属于 $\mathrm{Spec}(\varphi)$ 的像.*

证明 (i) $\iff$ (ii): 结合推论 2.1.6 与 2.1.10.

(iii) $\implies$ (ii): 对任意 $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R)$, 以引理 2.8.1 取 R 的极小素理想 $\mathfrak{p}_0$ 使得 $\mathfrak{p}_0 \subset \mathfrak{p}$, 则 $\mathfrak{p} \in V(\mathfrak{p}_0) = \overline{\{\mathfrak{p}_0\}}$ (引理 1.10.8). 配合 (iii) 可知 $\mathfrak{p} \in \overline{\mathrm{im}(\mathrm{Spec}(\varphi))}$.

(i) $\implies$ (iii): 记 $I := \ker(\varphi)$. 注意到 φ 诱导单同态 $R/I \to S$, 而 (i) 确保以 R/I 代 R 既不影响作为拓扑空间的素谱 (命题 2.2.4), 也不影响关于极小素理想的讨论, 故问题化约到 φ 单的情形. 应用引理 2.8.2. □

2.9 全分式环

例 1.6.1 回顾了整环的分式域. 本节将对任意非零环 R 探究相应的构造, 称为 R 的全分式环. 以下定义见诸 [7, 引理 5.3.11].

定义 2.9.1 (全分式环) *若 R 是非零环, 则 R 中的所有非零因子 (见 [7, §5.2]) 构成乘性子集, 对应的局部化称为 R 的全分式环, 记作 $\mathrm{Frac}(R)$; 相应的 $R \to \mathrm{Frac}(R)$ 是单射.*

当 R 是整环时, 所有非零元均非零因子, 此时 R 的全分式环即其分式域, 因此符号 $\mathrm{Frac}(R)$ 无歧义. 今后将 R 视同 $\mathrm{Frac}(R)$ 的子环.

引理 2.9.2 设 R 为既约环, 则局部化给出的典范环同态 $R \to \prod_{\mathfrak{p}:\text{极小}} R_{\mathfrak{p}}$ 为单, 其中每个 $R_{\mathfrak{p}}$ 都是域, 而且 R 的所有极小素理想之并等于 R 的零因子集.

证明 对所有极小素理想 $\mathfrak{p}$, 回忆 (1.7.3) 知 $\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}$ 既是 $R_{\mathfrak{p}}$ 的唯一极大理想, 又是其极小素理想, 故 $\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}} = \mathrm{nil}(R_{\mathfrak{p}})$. 由于 $R_{\mathfrak{p}}$ 既约 (注记 2.1.3), 此时 $\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}} = 0$ 而 $R_{\mathfrak{p}}$ 为域.

基于上一段, 典范环同态 $R \to \prod_{\mathfrak{p}:\text{极小}} R_{\mathfrak{p}}$ 的核是 $\bigcap_{\mathfrak{p}:\text{极小}} \mathfrak{p} = \mathrm{nil}(R) = 0$; 此处用到命题 2.1.5 和引理 2.8.1.

环嵌入诱导零因子集的嵌入, 故上一段立即说明 R 的零因子集包含于所有极小素理想之并. 反之设 r 属于某个极小素理想 $\mathfrak{p}$, 则 r 在 $R_{\mathfrak{p}} = R_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}$ 中的像为 0, 故存在 $u \in R \smallsetminus \mathfrak{p}$ 使得 $ru = 0$. □

回忆 (1.11.1) 可知 $R_{\mathfrak{p}}$ 是域蕴涵 $R_{\mathfrak{p}} \simeq \mathrm{Frac}(R/\mathfrak{p})$ 和 $\ker[R \to R_{\mathfrak{p}}] = \mathfrak{p}$.

这些结论足以对一大类既约环 R 确定全分式环 $\mathrm{Frac}(R)$ 的结构.

定理 2.9.3 设 R 为既约环, 而且仅有有限多个相异极小素理想 $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_m$, 则全分式环 $\mathrm{Frac}(R)$ 典范地同构于 $\prod_{i=1}^m R_{\mathfrak{p}_i}$.

证明 由于 R 的零因子集是 $\bigcup_{i=1}^m \mathfrak{p}_i$ (引理 2.9.2), 局部化给出 $\Phi : \mathrm{Frac}(R) \to \prod_{i=1}^m R_{\mathfrak{p}_i}$. 如果 R 的素理想 $\mathfrak{p}$ 非极小, 则素避性质 (命题 1.1.3) 蕴涵 $\mathfrak{p} \not\subset \bigcup_{i=1}^m \mathfrak{p}_i = \{\text{零因子}\}$, 由此知 $\mathrm{Frac}(R)$ 的素理想恰是 $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_m$ 的局部化, 它们在 $\mathrm{Frac}(R)$ 中也是极大理想.

于是 $\mathrm{Spec}(\mathrm{Frac}(R))$ 有限, 而且由注记 2.1.3 看出 $\mathrm{Frac}(R)$ 既约, 故为 Jacobson 环. 命题 2.6.5 遂蕴涵 $\mathrm{Spec}(\mathrm{Frac}(R))$ 离散.

将 $\mathrm{Spec}(\mathrm{Frac}(R))$ 写作 m 个独点集的无交并, 引理 2.5.3 相应地给出直积分解 $R \simeq \prod_{i=1}^m R_{\mathfrak{p}_i}$, 所用同构正是由局部化定义的 Φ. □

推论 2.9.4 设 R 为既约环, 而且仅有有限多个相异极小素理想, 则对于任意乘性子集 U 皆有典范同构 $\mathrm{Frac}(R)[U^{-1}] \simeq \mathrm{Frac}(R[U^{-1}])$.

证明 将 R 的极小素理想列为 $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_m$, 取 $0 \leq k \leq m$ 使得 $\mathfrak{p}_i \cap U = \varnothing$ 当且仅当 $1 \leq i \leq k$, 则 $R[U^{-1}]$ 的极小素理想是 $\mathfrak{p}_1[U^{-1}], \ldots, \mathfrak{p}_k[U^{-1}]$, 而注记 2.1.3 表明 $R[U^{-1}]$ 既约.

记 U 在 $R_{\mathfrak{p}_i}$ 中的像为 U_i, 定理 2.9.3 给出

$$\mathrm{Frac}(R)[U^{-1}] \simeq \prod_{i=1}^m R_{\mathfrak{p}_i}[U_i^{-1}] \quad (\text{推论 } 1.8.4),$$

$$\mathrm{Frac}(R[U^{-1}]) \simeq \prod_{i=1}^k R[U^{-1}]_{\mathfrak{p}_i[U^{-1}]} \simeq \prod_{i=1}^k R_{\mathfrak{p}_i} \quad (\text{引理 } 1.7.8).$$

然而 $R_{\mathfrak{p}_i}$ 是域而 $\ker[R \to R_{\mathfrak{p}_i}] = \mathfrak{p}_i$, 这蕴涵当 $i > k$ 时 $0 \in U_i$, 因而 $R_{\mathfrak{p}_i}[U_i^{-1}] = 0$; 当 $1 \leq i \leq k$ 时 $R_{\mathfrak{p}_i}[U_i^{-1}] = R_{\mathfrak{p}_i}$. 证毕. $\square$

当 R 是 Noether 环时, 定理 2.9.3 和推论 2.9.4 中关于极小素理想的有限条件成立, 见命题 3.4.6 和 3.4.8.

习题

1. 所有既约环构成 CRing 的全子范畴 $\mathsf{CRing}_{\mathrm{red}}$. 证明定义 2.1.2 的构造 $R \mapsto R_{\mathrm{red}}$ 给出包含函子 $\mathsf{CRing}_{\mathrm{red}} \to \mathsf{CRing}$ 的左伴随.

2. 补全注记 2.2.6 的论证.

3. 对于理想 $I, J \subset R$, 证明 $I \subset J$ 当且仅当对所有极大理想 $\mathfrak{m}$ 都有 $IR_{\mathfrak{m}} \subset JR_{\mathfrak{m}}$.

4. 设 R 为非零环.

(i) 说明在 R 的所有局部化 $R \to R[U^{-1}]$ 中, 定义 2.9.1 的全分式环 $\mathrm{Frac}(R)$ 是使得 $R \to R[U^{-1}]$ 为单的最大选法; 试明确其意涵.

(ii) 给出典范同构 $\mathrm{Frac}(\mathrm{Frac}(R)) \simeq \mathrm{Frac}(R)$. 提示 先论证以下性质: 若 $\frac{r}{u}$ 是 $\mathrm{Frac}(R)$ 的非零因子, 则 r 是 R 的非零因子.

第三章 Noether 环基础

3.1 链条件

且先回顾关于环和模的 Noether (或 Artin) 条件 [7, 定义 6.10.1].

定义 3.1.1 (Noether 和 Artin 条件) *考虑 R-模 M. 如果对任意子模升链*

$$M_0 \subset M_1 \subset M_2 \subset \cdots$$

皆存在 k 使得 $i \geq k \implies M_i = M_k$, 则称 M 为 Noether 模或 M 满足升链条件. 如果对任意子模降链

$$M_0 \supset M_1 \supset M_2 \cdots$$

皆存在 k 使得 $i \geq k \implies M_i = M_k$, 则称 M 为 Artin 模或 M 满足降链条件.

若环 R 本身作为 R-模是 Noether (或 Artin) 模, 则称 R 是 Noether (或 Artin) 环.

例 3.1.2 主理想环是 Noether 环的标准例子 [7, 引理 5.7.4]. 有限环既是 Noether 的也是 Artin 的. 若 F 是域而 R 是有限维 F-代数, 则基于维数的理由, R 既是 Noether 的也是 Artin 的. 稍后的定理 3.2.4 将提供构造 Noether 环的广泛手段.

关于 R-模 M 的 Noether (或 Artin) 条件相当于说 M 是范畴 R-Mod 中的 Noether (或 Artin) 对象, 见 [8, 定义 2.4.12]. 我们有以下的标准事实.

- 设有模的短正合列 $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$, 则 M 是 Noether (或 Artin) 模当且仅当 M' 和 M'' 皆然 [7, 引理 6.10.2].
- 若 R 是 Noether (或 Artin) 环, 则每个有限生成 R-模都是 Noether (或 Artin) 模 [7, 命题 6.10.3].

- ◇ 模 M (或环 R) 是 Noether 的当且仅当它的所有子模 (或理想) 皆有限生成 [7, 引理 6.10.4].
- ◇ 模 M 是 Noether (或 Artin) 的当且仅当 M 的任一子模族 $\mathcal{S} \neq \varnothing$ 都有相对于偏序 $\subset$ 的极大 (或极小) 元 [7, 注记 6.10.5].

命题 3.1.3 Noether (或 Artin) 环 R 对任意乘性子集 U 的局部化仍是 Noether (或 Artin) 环.

证明 应用 (1.7.2), 将 $R[U^{-1}]$ 的理想升链 (或降链) 映至 R 中考察; R 中的链最终是稳定的, 故在 $R[U^{-1}]$ 中亦然. □

定义 3.1.4 (有限长度模) 如果 R-模 M 既是 Noether 模又是 Artin 模, 则称 M 为有限长度的.

定义 3.1.5 (单模) 如果 R-模 M 非零, 而且除 0 和 M 无其它子模, 则称 M 为单模.

引理 3.1.6 单 R-模的同构类与 R 的极大理想一一对应: 极大理想 $\mathfrak{m}$ 对应到单 R-模 $R/\mathfrak{m}$.

证明 单模 M 总能由一个元素生成, 故存在理想 I 使得 $M \simeq R/I$, 而且 $I = \mathrm{ann}(M)$ 仅依赖于 M 的同构类. 若 I 是任意理想, 则 R/I 是单 R-模当且仅当 I 是极大理想. □

根据例行的论证 [7, 引理 6.10.9], 有限长度条件等价于说存在 $\ell \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ 及一列子模

$$M = M_0 \supsetneq \cdots \supsetneq M_\ell = \{0\},$$

使得每个子商 M_i/M_{i+1} 都是单模 $(0 \leq i < \ell)$; 这种子模列称为 M 的**合成列**. 有限长度模的合成列不唯一, 但有以下基本事实.

定义–定理 3.1.7 (Jordan–Hölder) 设 M 为有限长度 R-模, 则精确到同构和重排, 其合成列中的单子商 M_i/M_{i+1} (计重数) 不依赖合成列的选取. 这些单模的同构类称为 M 的 **Jordan–Hölder 因子**或**合成因子**, 构成带重数的集合 $\mathrm{JH}(M)$, 其元素个数 (计重数) 亦即 ℓ 称为 M 的**长度**, 记为 $\ell(M) = \ell_R(M)$.

证明 见 [7, 定理 6.10.10]. 此外, 这一事实同样适用于一般 Abel 范畴, 见 [8, 定义–定理 2.7.4]. □

显然 $\ell(M) = 0 \iff M = 0$, 而 $\ell(M) = 1 \iff M$ 单.

前引书中还有以下性质: 设有短正合列 $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$, 则 M 是有限长度的当且仅当 M' 和 M'' 亦然, 这点直接来自 Noether 模和 Artin 模的相应性质. 进一步, 在有限长度的前提下对 M'' 的合成列取 M 中的原像, 然后和 M' 的合成列衔接, 立见

$$\begin{aligned} \mathrm{JH}(M) &= \mathrm{JH}(M') \cup \mathrm{JH}(M'') \quad (\text{计重数取并}), \\ \ell(M) &= \ell(M') + \ell(M''). \end{aligned} \tag{3.1.1}$$

命题 3.1.8 设 M 为有限长度 R-模, $\mathfrak{m}$ 为 R 的极大理想, 则 $R/\mathfrak{m}$ 在 $\mathrm{JH}(M)$ 中的重数等于 $\ell_{R_\mathfrak{m}}(M_\mathfrak{m})$.

证明 引理 3.1.6 说明 $\mathrm{JH}(M)$ 的元素形如 $R/\mathfrak{m}'$, 其中 $\mathfrak{m}'$ 是 R 的极大理想; 同理 $\mathrm{JH}(M_\mathfrak{m})$ 的元素都是 $R_\mathfrak{m}/\mathfrak{m}R_\mathfrak{m}$. 对于任意理想 $\mathfrak{m}'$, 由于 $\mathfrak{m}' \cap (R \smallsetminus \mathfrak{m}) = \varnothing \iff \mathfrak{m}' \subset \mathfrak{m} \iff \mathfrak{m}' = \mathfrak{m}$, 应用引理 1.6.3 (ii) 即得

$$(R/\mathfrak{m}')_\mathfrak{m} = \begin{cases} R_\mathfrak{m}/\mathfrak{m}R_\mathfrak{m}, & \mathfrak{m} = \mathfrak{m}', \\ 0, & \mathfrak{m} \neq \mathfrak{m}'. \end{cases}$$

因为局部化保持正合列, 将 M 的合成列对 $\mathfrak{m}$ 作局部化即得所求断言. □

以下观察将用于 §6.9.

引理 3.1.9 设 R-模 M 是一族子模 $(M_i)_{i\in I}$ 的滤过并; 换言之 $(I, \leq)$ 是滤过偏序集, $i \leq j \implies M_i \subset M_j$, 而且 $M = \bigcup_{i\in I} M_i$. 若每个 M_i 都是有限长度模, 而且它们的长度有一致上界 $\ell \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, 则 M 也是有限长度模, 而且 $\ell(M) \leq \ell$.

证明 使用反证法说明 M 不含严格降链 $N_0 \supsetneq \cdots \supsetneq N_{\ell+1}$: 设若不然, 对每个 $0 \leq k \leq \ell$ 存在 $x_k \in N_k \smallsetminus N_{k+1}$, 以滤过性质取 $i \in I$ 使得 $x_k \in N_k \cap M_i$ 对所有 k 成立, 则 $N_0 \cap M_i \supsetneq \cdots \supsetneq N_{\ell+1} \cap M_i$, 与 $\ell(M_i) \leq \ell$ 矛盾. □

3.2 Noether 环和 Noether 模

经典代数几何学中面临的环经常是 Noether 环, 其上的模也往往是有限生成的. 对之宜作更细致的考察.

命题 3.2.1 若 R 是 Noether 环, 则 $\operatorname{Spec} R$ 是 Noether 空间 (定义 A.3.1).

证明 根据推论 2.1.8, 闭子集降链对应于根理想升链. □

推论 3.2.2 若 R 是非零 Noether 环, 则 $\operatorname{Spec}(R)$ 仅有有限多个连通分支 $C_1, \ldots, C_m$, 每个 C_i 皆开; 它们来自环的直积分解 $R \simeq \prod_{i=1}^m R_i$, 对所有 $1 \leq i \leq m$ 满足 $\operatorname{Spec}(R_i) \simeq C_i$, 而且 R_i 没有非平凡的直积分解.

证明 应用命题 A.3.5 可得连通分支的有限性和开性. 直积分解部分涉及引理 2.5.3, 注记 2.5.4 和命题 2.5.5. □

引理 3.2.3 设 R 为 Noether 环. 对所有 R-模 M, 以下条件等价:

(i) M 是 Noether 模,

(ii) M 有限展示,

(iii) M 有限生成.

证明 (i) $\implies$ (ii): 已知 Noether 模的所有子模皆有限生成, 特别地, 存在 $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ 和满同态 $f: R^{\oplus n} \to M$. 此外 $R^{\oplus n}$ 作为有限生成 R-模也是 Noether 的, 故其子模 $\ker(f)$ 亦然, 从而存在 $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ 和满同态 $g: R^{\oplus m} \to \ker(f) \to 0$. 由此得到正合列 $R^{\oplus m} \xrightarrow{g} R^{\oplus} \xrightarrow{f} M \to 0$.

(ii) $\implies$ (iii): 平凡.

(iii) $\implies$ (i): 已包含于之前回顾的事实. □

如果一个 R-代数 S 作为环是 Noether 的, 则称 S 为 Noether R-代数. 以下是 Hilbert 基定理 [7, 定理 6.10.6] 的结论.

定理 3.2.4 设 R 为 Noether 环, S 为有限生成 R-代数 (定义 1.9.1), 则 S 是有限展示的 Noether R-代数.

证明 首先考虑多项式 R-代数 $S = R[X_1, \ldots, X_n]$, 此时 S 的 Noether 性质正是前引的 Hilbert 基定理.

接着考虑 $S = R/I$, 其中 I 是 R 的理想; 这般的 S 当然是有限生成 R-代数. 基于商环理想的对应关系 (1.1.1), 显然 S 从 R 继承理想的升链性质.

对于一般的有限生成 R-代数 S, 我们有 $S \simeq R[X_1, \ldots, X_n]/I$, 其中 I 是某个理想. 结合前两个情形可知 S 是 Noether 环. 此外, 既然 I 是 Noether 环 $R[X_1, \ldots, X_n]$ 的理想, 它总是有限生成的, 故 S 是有限展示的 R-代数. □

作为特例, 域或主理想环上的有限生成代数总是有限展示 Noether 代数.

注记 3.2.5 Hilbert 基定理也有形式幂级数版本 [7, 定理 6.10.7]: 若 R 是 Noether 环, 则 $R[\![X_1, \ldots, X_n]\!]$ 亦然. 这也是推论 8.4.6 的特例.

接着讨论环的变换.

命题 3.2.6 设 S 是 Noether R-代数, R' 是有限生成 R-代数, 则 R'-代数 $S' := R' \underset{R}{\otimes} S$ 是 Noether 的.

证明 将 S' 通过 $S \xrightarrow{s \mapsto 1 \otimes s} S'$ 视为 S-代数. 对环同态 $R \to S$ 应用命题 1.9.6 可知 S' 是有限生成 S-代数. 代入定理 3.2.4. □

命题 3.2.7 设 I 是 Noether 环 R 的局部幂零理想 (定义 2.2.2), 则 I 是幂零的.

证明 Noether 环的理想皆有限生成, 故存在 $a_1, \ldots, a_k \in I$ 使得 $I = (a_1, \ldots, a_k)$. 对每个 $1 \leq i \leq k$ 取 $N_i \geq 1$ 使得 $a_i^{N_i} = 0$, 易见 $I^{N_1 + \cdots + N_k} = 0$. □

3.3 Artin 环的刻画

相较于常见的 Noether 条件, Artin 条件对环结构的限制更强. 首先回忆有限长度模的定义 3.1.4.

定理 3.3.1 非零环 R 是 Artin 环当且仅当 R 作为 R-模是有限长度的. 此外, Artin 环 R 总有以下性质:

- ◇ R 是半局部环 (定义 1.11.2),
- ◇ 存在 k 使得 $\mathrm{rad}(R)^k = 0$ (定义 2.3.1),
- ◇ R 的所有素理想皆为极大理想.

证明 有限长度性质蕴涵理想的降链条件, 故证明另一方向, 亦即证 Artin 环 R 必有列出的性质, 并且是有限长度 R-模即可.

首先证明 R 是半局部环. 设有一列相异极大理想 $\mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_2, \ldots$, 考虑理想降链

$$\mathfrak{m}_1 \supset \mathfrak{m}_1\mathfrak{m}_2 \supset \mathfrak{m}_1\mathfrak{m}_2\mathfrak{m}_3 \supset \cdots,$$

这必然是严格降链, 因为若 $\mathfrak{m}_1 \cdots \mathfrak{m}_k = \mathfrak{m}_1 \cdots \mathfrak{m}_k\mathfrak{m}_{k+1}$, 则 $\mathfrak{m}_{k+1} \supset \mathfrak{m}_1 \cdots \mathfrak{m}_k$, 从而素理想的性质蕴涵存在 $1 \leq i \leq k$ 使得 $\mathfrak{m}_k \supset \mathfrak{m}_i$, 与 $\mathfrak{m}_i$ 极大矛盾. 于是 Artin 性质确保 R 的极大理想个数有限.

其次证明对于任意理想 $I \subset \mathrm{rad}(R)$, 存在 k 使得 $I^k = 0$. 考虑理想降链 $I \supset I^2 \supset \cdots$ 可知存在 $k \geq 1$ 使得 $I^k = I^{k+1}$. 兹断言 $I^k = 0$.

取理想 $J := \{r \in R : rI^k = 0\}$; 证 $J = R$ 即可. 设若不然, Artin 性质确保在所有严格包含 J 的理想中有极小元 J'. 任取 $x \in J' \smallsetminus J$, 则 $J' = J + Rx$; 在推论 2.3.5 (ii) 中代入 $M = J'$, $N = J$ 和 $N' = Rx$, 可得 $Ix + J \subsetneq J'$.

于是 J' 的极小性蕴涵 $J = Ix + J$, 故 $Ix \subset J$, 亦即 $I^{k+1}x = 0$. 然而 $I^{k+1} = I^k$ 进一步导致 $x \in J$, 矛盾. 断言 $I^k = 0$ 得证.

现在列出 R 的所有极大理想 $\mathfrak{m}_1, \ldots, \mathfrak{m}_n$, 命

$$I := \mathfrak{m}_1 \cdots \mathfrak{m}_n.$$

留意到 $I \subset \mathrm{rad}(R)$, 故存在 k 使得 $I^k = 0$. 由此推得所有素理想 $\mathfrak{p}$ 皆满足 $\mathfrak{p} \supset (\mathfrak{m}_1 \cdots \mathfrak{m}_n)^k$; 素理想的性质进一步蕴涵存在 $1 \leq i \leq n$ 使得 $\mathfrak{p} \supset \mathfrak{m}_i$, 故 $\mathfrak{p} = \mathfrak{m}_i$. 综上, R 的所有素理想都是极大理想.

最后, 考虑理想或 R-模的有限降链

$$\begin{aligned} R \supset \mathfrak{m}_1 \supset \mathfrak{m}_1\mathfrak{m}_2 \supset \cdots \supset \mathfrak{m}_1 \cdots \mathfrak{m}_n = I \\ \supset I\mathfrak{m}_1 \supset I\mathfrak{m}_1\mathfrak{m}_2 \supset \cdots \supset I\mathfrak{m}_1 \cdots \mathfrak{m}_n = I^2 \\ \supset \cdots \supset I^k = 0. \end{aligned}$$

设 L 为此降链的某一段子商, 则存在 $1 \leq i \leq n$ 使得 $\mathfrak{m}_i L = 0$; 又因为 L 从 R 继承 Artin 性质, L 是对子空间满足降链条件的 $R/\mathfrak{m}_i$-向量空间, 这般向量空间是有限维的. 综上可见每一段子商 L 都是有限长度 R-模, 故 R 作为 R-模是有限长度的. □

特别地, Artin 环自动是 Noether 环.

推论 3.3.2 设 R 为 Artin 环, 依照定理 3.3.1 记其极大理想为 $\mathfrak{m}_1, \ldots, \mathfrak{m}_n$, 则局部化带有的典范同态 $\ell_i : R \to R_{\mathfrak{m}_i}$ 给出环同构

$$(\ell_1, \ldots, \ell_n) : R \xrightarrow{\sim} \prod_{i=1}^{n} R_{\mathfrak{m}_i}.$$

证明 我们有 $\mathrm{rad}(R) = \bigcap_{i=1}^{n} \mathfrak{m}_i$, 中国剩余定理 1.1.2 遂给出 $R/\mathrm{rad}(R) \xrightarrow{\sim} \prod_{i=1}^{n} R/\mathfrak{m}_i$. 此分解对应到 $R/\mathrm{rad}(R)$ 的一族幂等元 $\bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_n$ (命题 1.2.2).

定理 3.3.1 表明 R 的素理想皆极大, 故 $\mathrm{rad}(R) = \mathrm{nil}(R)$ 而命题 2.2.5 给出幂等元族 $\bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_n$ 的唯一提升 $e_1, \ldots, e_n \in R$, 使得它们对应到 R 的直积分解

$$(d_1, \ldots, d_n) : R \xrightarrow{\sim} \prod_{i=1}^{n} e_i R, \quad d_i(r) = e_i r;$$

每个 $e_i R$ 皆非零. 由于 R 恰有 n 个极大理想, 理想的对应关系 (命题 1.2.3) 导致每个 $e_i R$ 都是局部环; R 中相应的极大理想记为 $\mathfrak{m}'_i$. 它们是 $\mathfrak{m}_1, \ldots, \mathfrak{m}_n$ 的重排, 且有 $e_i \notin \mathfrak{m}'_i$, 而 $i \neq j$ 时 $e_j \in \mathfrak{m}'_i$.

因为 e_i 是 $\bar{e}_i$ 的提升, 当 $i = j$ 时它在 $R/\mathfrak{m}_j$ 中的像是 1, 否则为 0; 对照上一步结论, 立得 $\mathfrak{m}_i = \mathfrak{m}'_i$.

今对选定的 i 考虑局部化 $R_{\mathfrak{m}_i}$. 基于上一步, 如就 $\prod_{j=1}^{n} e_j R$ 来观照, 对应的乘性子集是由满足 $x_i \notin \mathrm{rad}(e_i R)$ (亦即 $x_i \in (e_i R)^{\times}$) 的元素 $(x_j)_{j=1}^{n}$ 构成的, 故局部化给出 $e_i R$. 于是有交换图表

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, "\ell_i"] \arrow[dr, "d_i"'] & R_{\mathfrak{m}_i} \arrow[d, "\wr"] \\ & e_i R, \end{tikzcd}$$

由此得到 $(\ell_1, \ldots, \ell_n) : R \xrightarrow{\sim} \prod_{i=1}^{n} R_{\mathfrak{m}_i}$. □

Artin 环的以下刻画也颇有用.

定理 3.3.3 (秋月康夫) 环 R 是 Artin 环当且仅当下述条件皆成立:

(i) R 是 Noether 环,

(ii) R 的素理想都是极大理想.

证明 不妨设 R 非零环. 鉴于定理 3.3.1, "仅当" 方向已知, 以下证 "当" 的方向. 设 R 满足 (i) 和 (ii). 使用反证法, 设 R 作为 R-模并非有限长度, 则集合

$$\mathcal{S} := \left\{ \text{理想 } I \subset R : R/I \text{ 非有限长度} \right\}$$

包含 0 故非空, 从而条件 (i) 导致 $\mathcal{S}$ 对 $\subset$ 有极大元, 记为 $\mathfrak{p}$. 以下论证 $\mathfrak{p}$ 为素理想.

设 $xy \in \mathfrak{p}$. 假若 $x, y \notin \mathfrak{p}$, 则一方面 $R/(\mathfrak{p} + Rx)$ 必须是有限长度的, 另一方面 $I := \{r \in R : xr \in \mathfrak{p}\}$ 是严格包含 $\mathfrak{p}$ 的理想 (因为 $y \in I$), 故 R/I 也是有限长度的; 考虑短正合列

$$R/I \xrightarrow{\text{乘以 } x} R/\mathfrak{p} \xrightarrow{\text{商}} R/(\mathfrak{p} + Rx) \to 0,$$

左右两项都是有限长度模, 故中项亦然. 这与 $\mathfrak{p} \in \mathcal{S}$ 矛盾.

根据上一步和条件 (ii), $\mathfrak{p}$ 是极大理想, 然而这导致 $R/\mathfrak{p}$ 是域, 从而是单 R-模, 这也与 $\mathfrak{p} \in \mathcal{S}$ 矛盾. 综上可知 R 为有限长度 R-模, 亦即为 Artin 环. □

推论 3.3.4 设 $(R, \mathfrak{m})$ 为局部环, 则 R 是 Artin 环当且仅当 $\mathfrak{m}$ 有限生成且存在 k 使得 $\mathfrak{m}^k = 0$.

证明 设 $(R, \mathfrak{m})$ 是 Artin 局部环, 则定理 3.3.1 给出 k 使得 $\mathfrak{m}^k = \mathrm{rad}(R)^k = 0$; 定理 3.3.3 (i) 表明 R 是 Noether 环, 故 $\mathfrak{m}$ 有限生成.

反之设 $(R, \mathfrak{m})$ 是满足 $\mathfrak{m}^k = 0$ 的局部环, 而且 $\mathfrak{m}$ 有限生成. 考虑 R-子模列

$$R \supset \mathfrak{m} \supset \cdots \supset \mathfrak{m}^k = 0.$$

每一段子商 $\mathfrak{m}^i/\mathfrak{m}^{i+1}$ 都是有限生成的, 也是 $R/\mathfrak{m}$-向量空间. 由此立见 $\mathfrak{m}^i/\mathfrak{m}^{i+1}$ 是有限长度 R-模, 故 R 亦然; 定理 3.3.1 遂蕴涵 R 是 Artin 环. □

3.4 相伴素理想

本节前半部内容适用于一般的环 R, 但后半部将要求 Noether 条件. 以下涉及 (1.1.2) 的记号.

定义 3.4.1 (相伴素理想) 设 $\mathfrak{p}$ 为环 R 的素理想, M 为 R-模. 如果存在 $x \in M$ 使得 $\mathrm{ann}(x) = \mathfrak{p}$, 则称 $\mathfrak{p}$ 为 M 的相伴素理想. 由 M 的相伴素理想构成的集合记为 $\mathrm{Ass}(M) = \mathrm{Ass}_R(M)$.

要求 $\mathfrak{p}$ 是 M 的相伴素理想相当于要求存在单同态 $f : R/\mathfrak{p} \hookrightarrow M$, 因为指定这般同态 f 相当于指定 $x := f(1 + \mathfrak{p}) \in M$, 使得 $\mathrm{ann}(x) = \mathfrak{p}$ 成立.

例 3.4.2 取 $R = \mathbb{Z}$ 而 $M = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, 其中 $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$, 则 $\mathrm{Ass}(M) = \left\{ p\mathbb{Z} \,\middle|\, p \text{ 素数}, p \mid n \right\}$.

例 3.4.3 设 $\mathfrak{p}$ 是 R 的素理想, 则 $R/\mathfrak{p}$ 的所有非零元 x 皆满足 $\mathrm{ann}(x) = \mathfrak{p}$. 因此定义给出 $\mathrm{Ass}(R/\mathfrak{p}) = \{\mathfrak{p}\}$.

引理 3.4.4 设 R 为任意环.

(i) 对 R 的所有乘性子集 U 和 R-模 M 皆有

$$\mathrm{Ass}_{R[U^{-1}]}(M[U^{-1}]) \supset \left\{\mathfrak{p}[U^{-1}] : \mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}_R(M),\ \mathfrak{p} \cap U = \varnothing\right\}.$$

(ii) 对所有 R-模 M 皆有 $\mathrm{Ass}(M) \subset \mathrm{Supp}(M)$.

(iii) 设有 R-模的正合列 $0 \to M' \to M \to M''$, 则

$$\mathrm{Ass}(M') \subset \mathrm{Ass}(M) \subset \mathrm{Ass}(M') \cup \mathrm{Ass}(M'').$$

(iv) 若 $M = M' \oplus M''$, 则 $\mathrm{Ass}(M) = \mathrm{Ass}(M') \cup \mathrm{Ass}(M'')$.

(v) 设有环同态 $\varphi : R \to S$, 而 M 是 S-模, 通过 φ 也成为 R-模, 则 $\mathrm{Spec}(\varphi) : \mathrm{Spec}(S) \to \mathrm{Spec}(R)$ 满足

$$\mathrm{Spec}(\varphi)\left(\mathrm{Ass}_S(M)\right) \subset \mathrm{Ass}_R(M).$$

证明 对于 (i), 设素理想 $\mathfrak{p}$ 满足 $\mathfrak{p} \cap U = \varnothing$ 且存在单同态 $R/\mathfrak{p} \hookrightarrow M$, 则局部化的正合性与命题 1.7.6 (i) 给出

$$0 \neq R[U^{-1}]/\mathfrak{p}[U^{-1}] \simeq (R/\mathfrak{p})[U^{-1}] \hookrightarrow M[U^{-1}],$$

故 $\mathfrak{p}[U^{-1}] \in \mathrm{Ass}_{R[U^{-1}]}(M[U^{-1}])$.

对于 (ii), 设 $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(M)$, 在 (i) 中取 $U = R \smallsetminus \mathfrak{p}$ 可见 $\mathfrak{p}[U^{-1}] = \mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}} \in \mathrm{Ass}_{R_{\mathfrak{p}}}(M_{\mathfrak{p}})$; 特别地, $M_{\mathfrak{p}} \neq 0$, 亦即 $\mathfrak{p} \in \mathrm{Supp}(M)$.

对于 (iii), 先将 M' 等同于 $\ker[M \to M'']$. 第一个 $\subset$ 是缘于对所有 $x \in M'$, 在 M' 和 M 中考虑 $\mathrm{ann}(x)$ 并无差别.

至于第二个 $\subset$, 设有素理想 $\mathfrak{p}$ 和子模 $N \subset M$ 使得 $N \simeq R/\mathfrak{p}$. 若 $N \cap M' = 0$ 则也有 $N \hookrightarrow M''$, 故 $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(M'')$. 若 $N \cap M'$ 含非零元 x, 则因为 R-模 $R/\mathfrak{p}$ 的所有非零元 y 皆满足 $\mathrm{ann}(y) = \mathfrak{p}$, 故也有 $\mathrm{ann}(x) = \mathfrak{p}$. 综上, $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(N \cap M') \subset \mathrm{Ass}(M')$.

对于 (iv), 只需注意到 M'' 同构于 $M' \oplus M''$ 的子模, 故 (iii) 导致 $\mathrm{Ass}(M'') \subset \mathrm{Ass}(M' \oplus M'')$.

对于 (v), 设 $\mathfrak{q} \in \mathrm{Ass}_S(M)$, 取 $x \in M$ 使得 $\mathrm{ann}_S(x) = \mathfrak{q}$, 则显然有 $\mathrm{ann}_R(x) = \varphi^{-1}(\mathfrak{q}) =: \mathrm{Spec}(\varphi)(\mathfrak{q})$. □

引理 3.4.5 设 M 为 R-模, 命 $\mathcal{S} := \{\mathrm{ann}(x) : x \in M,\ x \neq 0\}$, 则偏序集 $(\mathcal{S}, \subset)$ 的极大元都属于 $\mathrm{Ass}(M)$.

证明 留意到 $\mathcal{S}$ 的元素都是真理想. 设 $\mathfrak{p} = \mathrm{ann}(x)$ 为 $(\mathcal{S}, \subset)$ 的极大元, 而 $ab \in \mathfrak{p}$. 若 $b \notin \mathfrak{p}$, 则极大条件和

$$bx \neq 0, \quad abx = 0, \quad \mathrm{ann}(bx) \supset \mathrm{ann}(x) = \mathfrak{p}$$

表明 $a \in \mathrm{ann}(bx) = \mathfrak{p}$. 因此 $\mathfrak{p}$ 是素理想. □

命题 3.4.6 设 R 为 Noether 环, M 为 R-模.

(i) 我们有 $M = 0 \iff \mathrm{Ass}(M) = \varnothing$.

(ii) 所有 $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(M)$ 之并等于 M 的零因子集 (定义 1.1.7).

(iii) 对 R 的所有乘性子集 U 皆有

$$\mathrm{Ass}(M[U^{-1}]) = \left\{\mathfrak{p}[U^{-1}] : \mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(M),\ \mathfrak{p} \cap U = \varnothing\right\}.$$

(iv) 我们有 $\mathrm{Supp}(M) = \bigcup_{\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(M)} V(\mathfrak{p})$, 右式在 $\mathrm{Ass}(M) = \varnothing$ 时规定为 $\varnothing$.

(v) 若 $\mathfrak{p}$ 是偏序集 $(\mathrm{Supp}(M), \subset)$ 的极小元, 则 $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(M)$.

(vi) 设有环同态 $\varphi : R \to S$, 而 M 是 S-模, 则 $\mathrm{Spec}(\varphi)\,(\mathrm{Ass}_S(M)) = \mathrm{Ass}_R(M)$.

证明 对于 (i), 要点是证 $M \neq 0 \implies \mathrm{Ass}(M) \neq \varnothing$. 考虑引理 3.4.5 中的理想集 $\mathcal{S}$, 从 $M \neq 0$ 可得 $\mathcal{S}$ 非空, 又由 R 的 Noether 条件知其有极大元 $\mathfrak{p}$, 故引理 3.4.5 蕴涵 $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(M)$.

对于 (ii), 当 $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(M)$ 给定, 由相伴素理想的定义可知 $\mathfrak{p}$ 的元素都是 M 的零因子. 反之设 r 是 M 的零因子, 取 $x \in M \smallsetminus \{0\}$ 使得 $r \in \mathrm{ann}(x)$, 则 $\mathrm{ann}(x)$ 属于上一段的 $\mathcal{S}$. 由于 R 是 Noether 环, 在 $\mathcal{S}$ 中存在包含 $\mathrm{ann}(x)$ 的极大元 $\mathfrak{p}$; 引理 3.4.5 蕴涵 $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(M)$, 而 $r \in \mathfrak{p}$.

以下处理 (iii). 包含关系 $\supset$ 来自引理 3.4.4 (i). 对于 $\subset$, 将 $\mathrm{Ass}(M[U^{-1}])$ 的元素按命题 1.7.6 (ii) 表作 $\mathfrak{p}[U^{-1}]$, 其中 $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R)$ 满足 $\mathfrak{p} \cap U = \varnothing$. 根据 $M[U^{-1}]$ 的具体构造, 存在 $x \in M$ 和 $u \in U$ 使得

$$\mathfrak{p}[U^{-1}] = \mathrm{ann}_{R[U^{-1}]}\left(\frac{x}{u}\right) = \mathrm{ann}_{R[U^{-1}]}\left(\frac{x}{1}\right).$$

由于 $\mathfrak{p} = R \cap \mathfrak{p}[U^{-1}]$, 上式蕴涵 $a \in \mathfrak{p}$ 当且仅当存在 $u \in U$ 使得 $uax = 0$. 又因为 R 是 Noether 环, 故 $\mathfrak{p}$ 有限生成, 从而存在 $t \in U$ 使得 $\mathfrak{p} \subset \mathrm{ann}_R(tx)$. 以下证 $\mathfrak{p} \supset \mathrm{ann}_R(tx)$. 诚然: 若 $a \in R$ 满足 $atx = 0$, 则 $\frac{a}{1} \in \mathrm{ann}_{R[U^{-1}]}(\frac{x}{1}) = \mathfrak{p}[U^{-1}]$, 故 $a \in R \cap \mathfrak{p}[U^{-1}] = \mathfrak{p}$.

综上, $\mathfrak{p} = \mathrm{ann}_R(tx) \in \mathrm{Ass}_R(M)$.

至于 (iv), 对所有 $\mathfrak{q} \in \mathrm{Spec}(R)$, 已知

$$\begin{aligned} \mathfrak{q} \in \mathrm{Supp}(M) \overset{\text{定义}}{\iff} M_{\mathfrak{q}} \neq 0 \overset{\text{(i)}}{\iff} \mathrm{Ass}_{R_{\mathfrak{q}}}(M_{\mathfrak{q}}) \neq \varnothing \\ \overset{\text{(iii)}}{\iff} \exists \mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R),\ \mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}_R(M) \text{ 且 } \mathfrak{p} \cap (R \smallsetminus \mathfrak{q}) = \varnothing; \end{aligned}$$

最后的条件相当于说 $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}_R(M)$ 且 $\mathfrak{q} \in V(\mathfrak{p})$.

断言 (v) 是 (iv) 的直接结论.

断言 (vi) 的 $\subset$ 部分已包含于引理 3.4.4 (v). 对于 $\supset$, 设 $\mathfrak{p} = \mathrm{ann}_R(x) \in \mathrm{Ass}_R(M)$. 命 $I := \mathrm{ann}_S(x)$. 对 φ 诱导的单同态 $\bar{\varphi} : R/\mathfrak{p} \hookrightarrow S/I$ 应用引理 2.8.2 和 2.8.3, 可得 $(V(I), \subset)$ 的极小元 $\mathfrak{q}$ (对应到 S/I 的极小理想), 使得 $\mathrm{Spec}(\varphi)(\mathfrak{q}) = \mathfrak{p}$ (对应到整环 $R/\mathfrak{p}$ 的零理想). 从 $V(I) = \mathrm{Supp}(S/I)$ (例 2.4.3) 和 (v) 立得 $\mathfrak{q} \in \mathrm{Ass}_S(S/I) \subset \mathrm{Ass}_S(M)$. 明所欲证. □

注记 3.4.7 如果 $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(M)$ 而 $\mathfrak{p}$ 非 $(\mathrm{Ass}(M), \subset)$ 的极小元, 则称 $\mathfrak{p}$ 为 M 的**嵌入素理想**. 这种素理想对许多 M 确实存在, 因而命题 3.4.6 (v) 的逆未必成立; 后续探讨见 §3.5.

命题 3.4.8 设 R 为 Noether 环, M 为有限生成 R-模, 则存在子模升链 $0 = M_0 \subset \cdots \subset M_n = M$ 使得

(i) 每个 $1 \leq i \leq n$ 都存在 $\mathfrak{p}_i \in \mathrm{Spec}(R)$ 使得 $M_i/M_{i-1} \simeq R/\mathfrak{p}_i$;

(ii) $\mathrm{Ass}(M) \subset \{\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_n\}$.

作为推论, $\mathrm{Ass}(M)$ 是有限集.

证明 注意到 M 总是 Noether 模 (引理 3.2.3). 不妨设 $M \supsetneq M_0 := 0$. 命题 3.4.6 (i) 给出 $\mathfrak{p}_1 \in \mathrm{Ass}(M)$ 连同 $M_1 \subset M$ 使得 $M_1/M_0 = M_1 \simeq R/\mathfrak{p}_1$. 此外 $\mathrm{Ass}(M_1) = \mathrm{Ass}(R/\mathfrak{p}_1) = \{\mathfrak{p}_1\}$ (例 3.4.3), 因此引理 3.4.4 (iii) 给出 $\mathrm{Ass}(M) \subset \{\mathfrak{p}_1\} \cup \mathrm{Ass}(M/M_1)$.

若 $M_1 = M$ 则论证结束, 否则对 M/M_1 递归地操作, 可得素理想 $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots$ 以及子模升链 $0 = M_0 \subset M_1 \subset \cdots$, 使得 $\mathrm{Ass}(M_i/M_{i-1}) = \{\mathfrak{p}_i\}$. Noether 条件蕴涵升链必止于某个 $M_n = M$, 从而也有

$$\mathrm{Ass}(M) \subset \{\mathfrak{p}_1\} \cup \mathrm{Ass}(M/M_1) \subset \{\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2\} \cup \mathrm{Ass}(M/M_2) \subset \cdots \subset \{\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_n\}.$$

明所欲证. □

推论 3.4.9 设 R 为 Noether 环, 则 $\mathrm{Ass}(R)$ 有限, 而 R 的极小素理想 (见 §2.8) 个数亦有限.

证明 在命题 3.4.8 中代入 $M = R$ 可见 $\mathrm{Ass}(R)$ 有限. 命题 3.4.6 (v) 蕴涵极小素理想皆属于 $\mathrm{Ass}(R)$, 故其个数有限. □

命题 3.4.10 设 R 为 Noether 环, M 为 R-模, 则由局部化同态 $M \to M_{\mathfrak{p}}$ 诱导的 $M \to \prod_{\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(M)} M_{\mathfrak{p}}$ 是单同态.

证明 设 $x \in M \smallsetminus \{0\}$. 鉴于命题 3.4.6 (i), 存在 $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(Rx) \subset \mathrm{Ass}(M)$. 从 $\mathrm{Ass}(Rx) \subset \mathrm{Supp}(Rx)$ (引理 3.4.4 (iii)) 和局部化的正合性可得 $0 \neq (Rx)_{\mathfrak{p}} \hookrightarrow M_{\mathfrak{p}}$, 由此可见 x 在 $M_{\mathfrak{p}}$ 中的像非零. □

作为本节理论的一则应用, 我们来刻画 Noether 环上的有限长度模.

推论 3.4.11 设 R 为 Noether 环, M 为有限生成 R-模. 以下陈述等价:

(i) M 是有限长度模;

(ii) $\mathrm{Ass}(M)$ 的元素都是极大理想;

(iii) $\mathrm{Supp}(M)$ 的元素都是极大理想.

当以上任一条件成立时, $\mathrm{Supp}(M) = \mathrm{Ass}(M)$.

证明 对于 (i) $\implies$ (ii), 若 $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(M)$ 则有嵌入 $R/\mathfrak{p} \hookrightarrow M$, 故 $R/\mathfrak{p}$ 仍是有限长度模; 等价地说, $R/\mathfrak{p}$ 是 Artin 环 (定理 3.3.1). 然而定理 3.3.1 还说明 Artin 环的素理想都是极大的, 因此 $\mathfrak{p}$ 必为 R 的极大理想.

(ii) $\implies$ (iii) 是命题 3.4.6 (iv) 的直接结论; 该命题还蕴涵此时 $\mathrm{Supp}(M) = \mathrm{Ass}(M)$.

(iii) $\implies$ (i): 取 M 的生成元 $x_1, \ldots, x_n$, 则 M 是 $Rx_1 \oplus \cdots \oplus Rx_n$ 的商模, 而 $\mathrm{Supp}(Rx_i) \subset \mathrm{Supp}(M)$, 问题按此化约到 $M = R/I$ 的情形, 其中 $I \subsetneq R$ 是理想. 既然 $\mathrm{Supp}(R/I) = \mathrm{ann}(R/I) = V(I)$ (引理 2.4.5), 条件相当于说 $\mathrm{Spec}(R/I)$ 的元素都是极大的, 故定理 3.3.3 蕴涵 R/I 是 Artin 环, 从而 R/I 是有限长度 R-模. □

最后考虑定义 2.9.1 的全分式环 $\mathrm{Frac}(R)$.

命题 3.4.12 设 R 为 Noether 环, 嵌入于 $\mathrm{Frac}(R)$. 设 $\alpha \in \mathrm{Frac}(R)$, 则 $\alpha \in R$ 当且仅当对于所有非零因子 $t \in R$ 和 $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}_R(R/(t))$, 若将 R-代数的局部化 $\mathrm{Frac}(R)_\mathfrak{p}$ 等同于 $\mathrm{Frac}(R_\mathfrak{p})$ (推论 2.9.4), 则 α 在 $\mathrm{Frac}(R_\mathfrak{p})$ 中的像属于 $R_\mathfrak{p}$.

证明 说明 "当" 的方向即可. 将 α 表为 $\frac{x}{t}$, 其中 $x \in R$ 而 $t \in R$ 非零因子. 假如 $\alpha \notin R$, 则 $x \notin (t)$, 亦即 x 在 $R/(t)$ 中的像非零. 根据命题 3.4.10, 存在 $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}_R(R/(t))$ 使得 x 在 $(R/(t))_\mathfrak{p} \simeq R_\mathfrak{p}/(t)$ 中的像非零, 但这也相当于说 α 在 $\mathrm{Frac}(R_\mathfrak{p})$ 中的像不属于 $R_\mathfrak{p}$. □

3.5 准素分解

准素分解属于代数几何学的经典工具, 它可以在模的层次表述.

定义 3.5.1 (余准素模和准素模) 考虑 R-模 M 和 R 的素理想 $\mathfrak{p}$.

- 如果 $\mathrm{Ass}(M) = \{\mathfrak{p}\}$, 则称 M 为 $\mathfrak{p}$-余准素模, 或简称余准素模;
- 如果 N 是 M 的真子模, M/N 是 $\mathfrak{p}$-余准素模, 则称 N 为 M 的 $\mathfrak{p}$-准素子模, 或简称准素模.

引理 3.5.2 设 R 为 Noether 环. 对于非零 R-模 M, 以下陈述等价.

(i) M 是余准素模,

(ii) 若 $r \in R$ 是 M 的零因子, $x \in M$, 则存在 $n \geq 1$ 使得 $r^n x = 0$.

陈述 (ii) 中关于 r 的条件也称为 r 在 M 上作用的局部幂零条件.

证明 (i) $\implies$ (ii). 设 $\mathrm{Ass}(M) = \{\mathfrak{p}\}$ 而 $x \in M \smallsetminus \{0\}$. 引理 3.4.4 (iii) 和命题 3.4.6 (i) 给出 $\varnothing \neq \mathrm{Ass}(Rx) \subset \mathrm{Ass}(M)$, 因此 $\mathrm{Ass}(Rx) = \{\mathfrak{p}\}$. 命题 3.4.6 (iv) 遂导致

$$V(\mathrm{ann}(Rx)) = \mathrm{Supp}(Rx) = V(\mathfrak{p}).$$

代入推论 2.1.8 得 $\mathfrak{p} = \sqrt{\mathrm{ann}(Rx)}$; 因为 $\mathfrak{p}$ 恰是 M 的零因子集, 见命题 3.4.6 (ii), 这又给出 (ii).

(ii) $\implies$ (i). 先定义

$$\mathfrak{p} := \{r \in R : \forall x \in M,\ \exists n \geq 1,\ r^n x = 0\}.$$

基于二项式展开易见 $\mathfrak{p}$ 是 R 的理想. 对所有 $\mathfrak{q} \in \mathrm{Ass}(M)$, 取 $x \in M$ 使得 $\mathfrak{q} = \mathrm{ann}(x)$; 每个 $r \in \mathfrak{p}$ 的充分高次幂都落在 $\mathfrak{q}$ 中, 故 $r \in \mathfrak{q}$, 由此知 $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{q}$. 另一方面, $\mathfrak{q}$ 的元素总是 M 的零因子, 故 $\mathfrak{p}$ 的定义和 (ii) 导致 $\mathfrak{q} \subset \mathfrak{p}$.

综上, $\mathfrak{q} = \mathfrak{p}$. 既然 $\mathfrak{q} \in \mathrm{Ass}(M) \neq \varnothing$ 是任意的, 故 $\mathrm{Ass}(M) = \{\mathfrak{p}\}$. □

将准素子模的定义应用于 $M = R$, 便得到准素理想的概念. 下面是准素理想的经典刻画, 它是素理想定义的变奏.

定义–命题 3.5.3 设 I 是 Noether 环 R 的真理想, 则 I 是 R 的准素子模的充要条件是

$$\forall a, b \in R,\ (ab \in I) \wedge (a \notin I) \implies b \in \sqrt{I};$$

此时必有 $\mathrm{Ass}(R/I) = \{\sqrt{I}\}$. 当上述等价条件成立时, 也称 I 为 R 的**准素理想**.

证明 元素 $b \in R$ 是模 R/I 的零因子当且仅当存在 $a \in R \smallsetminus I$ 使得 $ab \in I$. 引理 3.5.2 表明 R/I 是余准素模当且仅当对于每个 $b \in R$, 若以上关于零因子的条件成立, 则对所有 $x \in R/I$ 都存在 $n \geq 1$ 使得 $b^n x = 0$; 然而最后的条件仅需对 $x = 1 + I$ 检验, 因而等价于存在 $n \geq 1$ 使得 $b^n \in I$. 这便给出使得 I 为准素子模的充要条件.

设 I 是 R 的准素子模, $\mathrm{Ass}(R/I) = \{\mathfrak{p}\}$. 引理 3.5.2 的证明业已给出

$$\begin{aligned}\mathfrak{p} &= \{r \in R : \forall x \in R/I,\ \exists n \geq 1,\ r^n x = 0\}\\ &= \{r \in R : \exists n \geq 1,\ r^n \in I\} =: \sqrt{I},\end{aligned}$$

第二个等式是因为条件 $\exists n \geq 1,\ r^n x = 0$ 仅需对 $x = 1 + I$ 检验. □

因此素理想是准素理想的特例.

引理 3.5.4 设 R 为 Noether 环, N_1, N_2 是 M 的 $\mathfrak{p}$-准素子模, 则 $N_1 \cap N_2$ 亦然.

证明 对单同态 $M/(N_1 \cap N_2) \hookrightarrow M/N_1 \oplus M/N_2$ 应用引理 3.4.4 (iii) 可得 $\mathrm{Ass}(M/N_1 \cap N_2) \subset \{\mathfrak{p}\}$. 又由 $N_1, N_2 \subsetneq M$ 可得 $N_1 \cap N_2 \subsetneq M$, 故命题 3.4.6 给出 $\mathrm{Ass}(M/N_1 \cap N_2) = \{\mathfrak{p}\}$. □

定义 3.5.5 (准素分解) 设 M 为 R-模. 子模 $N \subsetneq M$ 的准素分解意谓形如

$$N = M_1 \cap \cdots \cap M_n, \quad n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$$

的表达式, 其中每个 M_i 都是 M 的准素子模, 相应地记 $\mathrm{Ass}(M/M_i) = \{\mathfrak{p}_i\}$; 项数 n 称为此分解的长度.

- ◇ 若在分解中不能省略任何一项 M_i, 则称此分解无赘;
- ◇ 若 N 没有长度严格小于 n 的准素分解, 则称此分解极小.

极小准素分解自动是无赘的.

命题 3.5.6 设 R 为 Noether 环, 而子模 $N \subsetneq M$ 有准素分解 $N = M_1 \cap \cdots \cap M_n$.

(i) 我们有 $\mathrm{Ass}(M/N) \supset \{\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_n\}$, 若分解无赘则等号成立.

(ii) 若分解极小, 则对每个 $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(M/N)$ 皆存在唯一的 $1 \leq i \leq n$ 使得 $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_i$; 特别地, $|\mathrm{Ass}(M/N)|$ 等于 N 的极小准素分解的长度.

(iii) 对于 R 的乘性子集 U, 不失一般性可设有 $0 \leq m \leq n$ 使得

$$\mathfrak{p}_i \cap U = \varnothing \iff i \leq m$$

对所有 $1 \leq i \leq n$ 成立, 则 $N[U^{-1}] \subsetneq M[U^{-1}]$ 当且仅当 $m \geq 1$, 此时

$$N[U^{-1}] = M_1[U^{-1}] \cap \cdots \cap M_m[U^{-1}]$$

是准素分解; 若 $N = M_1 \cap \cdots \cap M_n$ 是极小准素分解且 $m \geq 1$, 则上述准素分解亦然.

证明 对于断言 (i), 先从显然的单同态 $M/N \hookrightarrow \bigoplus_{i=1}^{n} M/M_i$ 和引理 3.4.4 (iii), (iv) 推得

$$\mathrm{Ass}(M/N) \subset \bigcup_{i=1}^{n} \mathrm{Ass}(M/M_i) = \{\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_n\}.$$

若准素分解无赘, 则不能省略 M_1 项, 故有

$$\begin{aligned} 0 \neq \frac{M_2 \cap \cdots \cap M_n}{N} &= \frac{M_2 \cap \cdots \cap M_n}{M_1 \cap (M_2 \cap \cdots \cap M_n)} \\ &\simeq \frac{M_1 + (M_2 \cap \cdots \cap M_n)}{M_1} \hookrightarrow M/M_1. \end{aligned}$$

由此知 $\mathrm{Ass}(M/N) \supset \mathrm{Ass}\left((M_2 \cap \cdots \cap M_n)/N\right) = \{\mathfrak{p}_1\}$. 同理可知对所有 i 皆有 $\mathfrak{p}_i \in \mathrm{Ass}(M/N)$.

考虑断言 (ii). 设 $N = \bigcap_{i=1}^n M_i$ 极小, 因而无赘, 则 (i) 说明 $\mathrm{Ass}(M/N) = \{\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_n\}$. 若存在 $i \neq j$ 使得 $\mathfrak{p}_i = \mathfrak{p}_j$, 引理 3.5.4 将导致 $M_i \cap M_j$ 是 M 的准素子模, 并项对 N 得到长度更短的准素分解, 矛盾.

考虑断言 (iii). 对所有 i, 局部化的正合性与命题 3.4.6 (iii) 表明

$$\mathrm{Ass}_{R[U^{-1}]}\left(M[U^{-1}]/M_i[U^{-1}]\right) = \begin{cases} \{\mathfrak{p}_i[U^{-1}]\}, & i \leq m \\ \varnothing, & i > m; \end{cases}$$

而搭配命题 3.4.6 (i) 可见当 $i > m$ 时 $M[U^{-1}] = M_i[U^{-1}]$. 注意到局部化保持子模之交: 在 Abel 范畴中将子对象的交理解为纤维积, 则这点归结为正合性的形式结论, 可参见 [8, §2.6]. 综上, 对 $N = \bigcap_{i=1}^n M_i$ 取局部化即得 $N[U^{-1}] = \bigcap_{i=1}^m M_i[U^{-1}]$; 左式是 $M[U^{-1}]$ 的真子模当且仅当 $m \geq 1$, 此时得到 $N[U^{-1}]$ 的准素分解.

现在设 $N = \bigcap_{i=1}^n M_i$ 极小而 $m \geq 1$, 故 (i) 和 (ii) 说明 $\mathrm{Ass}_R(M/N) = \{\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_n\}$ 恰有 n 个元素. 命题 3.4.6 (iii) 和上一段的讨论表明

$$\begin{aligned} \mathrm{Ass}_{R[U^{-1}]}(M[U^{-1}]/N[U^{-1}]) &= \mathrm{Ass}_{R[U^{-1}]}\left((M/N)[U^{-1}]\right) \\ &= \left\{\mathfrak{p}_1[U^{-1}], \ldots, \mathfrak{p}_m[U^{-1}]\right\}, \end{aligned}$$

而此集合恰有 m 个元素; 鉴于 (ii), $N[U^{-1}] = \bigcap_{i=1}^m M_i[U^{-1}]$ 是极小准素分解. □

推论 3.5.7 设 R 为既约 Noether 环, 则 $\mathrm{Ass}(R)$ 的元素恰是 R 的极小素理想.

证明 根据命题 2.1.5 和引理 2.8.1, 所有极小素理想之交是 $\mathrm{nil}(R) = 0$; 因为极小素理想个数有限 (推论 3.4.9), 这给出 $0 \subset R$ 的准素分解. 代入命题 3.5.6 (i) 遂有 $\mathrm{Ass}(R) = \{$极小素理想$\}$. □

推论 3.5.8 选定 Noether 环 R 和 R-模 M. 设有 $N \subsetneq M$ 的极小准素分解 $N = M_1 \cap \cdots \cap M_n$. 设 $1 \leq i \leq n$ 满足 $\mathfrak{p}_i$ 是偏序集 $(\mathrm{Ass}(M/N), \subset)$ 的极小元, 则 M_i 等于 $N_{\mathfrak{p}_i}$ 在 $M \to M_{\mathfrak{p}_i}$ 之下的原像, 称之为 N 的 $\mathfrak{p}_i$-**准素成分**.

证明 不失一般性可设 $i = 1$, 记 $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_i$. 在命题 3.5.6 (iii) 中代入 $U = R \smallsetminus \mathfrak{p}$, 则由于 $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots, \mathfrak{p}_n$ 相异而 $\mathfrak{p}$ 极小, 在该结论中 $m = 1$, 且有 $N_{\mathfrak{p}} = M_{1,\mathfrak{p}} \subset M_{\mathfrak{p}}$.

以下论证 $M_{1,\mathfrak{p}}$ 在 $M \to M_{\mathfrak{p}}$ 之下的原像等于 M_1; 等价地说, $M/M_1 \to (M/M_1)_{\mathfrak{p}} \simeq M_{\mathfrak{p}}/M_{1,\mathfrak{p}}$ 是单射. 诚然, $\bar{x} \in M/M_1$ 被映为 0 当且仅当存在 $u \in R \smallsetminus \mathfrak{p}$ 使得 $u\bar{x} = 0$, 但命题 3.4.6 (ii) 表明 M/M_1 的零因子集是 $\mathfrak{p}$, 故必有 $\bar{x} = 0$. □

请注意: 此处的准素成分和 [7, 引理 6.7.6] 对主理想环上的模定义的准素部分是两回事.

推论 3.5.8 表明极小准素分解的唯一性仅对注记 3.4.7 所谓的嵌入素理想方成问题. 现在来探讨准素分解的存在性.

定理 3.5.9 (E. Lasker, E. Noether) 设 R 为 Noether 环, M 为有限生成 R-模, $N \subsetneq M$ 为子模, 则存在准素分解 $N = M_1 \cap \cdots \cap M_n$.

证明 以 M/N 代 M, 容易将问题化约到 N 为零子模的情形. 兹断言

$$\forall \mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(M),\ \exists Q(\mathfrak{p}) \subset M \text{ 使得 } \begin{cases} Q(\mathfrak{p}) \text{ 是 } \mathfrak{p}\text{-准素子模}, \\ \mathrm{Ass}(Q(\mathfrak{p})) = \mathrm{Ass}(M) \smallsetminus \{\mathfrak{p}\}. \end{cases} \tag{3.5.1}$$

承认 (3.5.1), 取 $L := \bigcap_{\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(M)} Q(\mathfrak{p})$, 则因为 $\mathrm{Ass}(M)$ 有限 (命题 3.4.8) 而 $\mathrm{Ass}(L) \subset \bigcap_{\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(M)} \mathrm{Ass}(Q(\mathfrak{p})) = \varnothing$, 这便给出 $L = 0$ 的准素分解.

为了确立 (3.5.1), 命 $\Psi = \{\mathfrak{p}\}$, 考虑包含关系 $\subset$ 给出的偏序集

$$\left\{ \text{子模 } Q \subset M : \mathrm{Ass}(Q) \subset \mathrm{Ass}(M) \smallsetminus \Psi \right\};$$

它包含 $Q = 0$ 故非空. 对之应用 M 的 Noether 性质, 可知此偏序集有极大元 $Q(\mathfrak{p})$, 此外 $Q(\mathfrak{p}) \neq M$. 应用短正合列得到

$$\mathrm{Ass}(Q(\mathfrak{p})) \subset \mathrm{Ass}(M) \subset \mathrm{Ass}(M/Q(\mathfrak{p})) \cup \mathrm{Ass}(Q(\mathfrak{p}));$$

已有 $\mathrm{Ass}(Q(\mathfrak{p})) \cap \Psi = \varnothing$, 如能说明 $\mathrm{Ass}(M/Q(\mathfrak{p})) \subset \Psi$ 即有 (3.5.1).

设 $\mathfrak{q} \in \mathrm{Ass}(M/Q(\mathfrak{p}))$, 则存在 $M \supset Q' \supset Q(\mathfrak{p})$ 使得 $Q'/Q(\mathfrak{p}) \simeq R/\mathfrak{q}$. 既然 $\mathrm{Ass}(Q') \subset \mathrm{Ass}(Q(\mathfrak{p})) \cup \mathrm{Ass}(R/\mathfrak{q}) = \mathrm{Ass}(Q(\mathfrak{p})) \cup \{\mathfrak{q}\}$, 极大元的条件蕴涵 $\mathfrak{q} \in \Psi$. 明所欲证. □

上述论证仅说明存在性. 当 R 是特征零的域上的有限元多项式环时, 已知有具体算法.

3.6 准素分解的例子

先介绍关于准素理想的一种简单判准.

引理 3.6.1 设 $\mathfrak{m}$ 为 Noether 环 R 的极大理想, 则理想 $I \subset R$ 是 $\mathfrak{m}$-准素理想当且仅当存在 $n \geq 1$ 使得 $\mathfrak{m}^n \subset I \subset \mathfrak{m}$.

证明 设 $\mathfrak{m}^n \subset I \subset \mathfrak{m}$, 则 $\sqrt{I} = \mathfrak{m}$. 我们有 $\mathrm{Supp}(R/I) = V(I) = V(\mathfrak{m}) = \{\mathfrak{m}\}$, 继而从命题 3.4.6 (iv) 推得 $\mathrm{Ass}(R/I) = \{\mathfrak{m}\}$.

反之设 $\mathrm{Ass}(R/I) = \{\mathfrak{m}\}$. 命题 3.4.6 (iv) 蕴涵 $\mathrm{Supp}(R/I) = V(\mathfrak{m})$, 配合推论 2.1.8 与 $\mathrm{Supp}(R/I) = V(I)$ 可得 $\sqrt{I} = \mathfrak{m}$. 由于 $\mathfrak{m}$ 有限生成, 存在 $n \geq 1$ 使 $\mathfrak{m}^n \subset I$. □

例 3.6.2 取 F 为域, 考虑 $R := F[X, Y]$ 及其理想 $I = (X^2, XY)$. 请读者对所有 $n \geq 2$ 验证

$$I = (X) \cap (X^2, XY, Y^n) = (X) \cap (X^2, Y).$$

注意到 (X) 是素理想, 而应用引理 3.6.1 可见 (X^2, XY, Y^n) 和 (X^2, Y) 都是 (X, Y)-准素理想; 由此得到 I 的两种准素分解, 易见它们皆无赘.

代入命题 3.5.6 (i) 和 (ii), 进一步得到 $\mathrm{Ass}(R/I) = \{(X), (X, Y)\}$, 且两种分准素解皆极小. 这点与推论 3.5.8 兼容, 因为 $(X, Y) \supset (X)$ 表明 (X, Y) 是 $\mathrm{Ass}(R/I)$ 中的嵌入素理想, 故分解中相应的准素理想未必唯一.

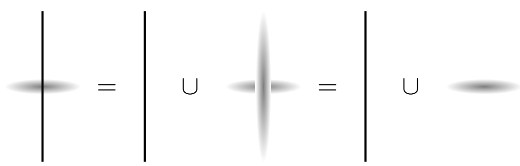
从几何的观点看, 考虑 I 给出的代数子集 $Z(I) \subset F^2$ (定义 2.7.2), 则上述准素分解和 (2.7.2) 给出

$$Z(I) = Z(X) \cup Z(X^2, XY, Y^n) = Z(X) \cup Z(X^2, Y);$$

对所有理想 J, 商代数 $F[X, Y]/J$ 等描述了多项式函数在代数子集 $Z(J)$ 上的限制, 但它们携带的信息不止于此. 设 F 代数闭. 受 Taylor 展开式的启发, 可以设想:

理想 J	$Z(J)$	商代数的基 (代表元)	商代数的信息
(X)	Y-轴	$1, Y, Y^2, \ldots$	$f(0, Y)$
(X^2, XY, Y^n)	原点	$1, X, Y, \ldots, Y^{n-1}$	X 方向 ≤ 1 阶无穷小
			Y 方向 $< n$ 阶无穷小
(X^2, Y)	原点	$1, X$	X 方向 ≤ 1 阶无穷小
$I = (X^2, XY)$	Y-轴	$1, X, Y, Y^2, \ldots$	$f(0, Y)$
			原点沿 X 方向 ≤ 1 阶无穷小

其中 $f \in F[X, Y]$. 有鉴于此, 不妨将 I 描述的几何对象理解为 Y-轴并上原点沿 X 方向的 "一阶无穷小加厚", 而准素分解的直观内涵如下图所示.



定义 3.6.3 (符号幂) 设 $\mathfrak{p}$ 为环 R 的素理想. 对所有 $s \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$, 定义 $\mathfrak{p}$ 的 s 次符号幂为

$$\mathfrak{p}^{(s)} := \ker \left[R \to R_{\mathfrak{p}} / \mathfrak{p}^s R_{\mathfrak{p}} \right].$$

由定义 3.6.3 立见

$$\mathfrak{p}^{(s)} \supset \mathfrak{p}^s, \quad \mathfrak{p}^{(s+1)} \subset \mathfrak{p}^{(s)}, \quad \mathfrak{q} \supset \mathfrak{p} \implies \mathfrak{q}^{(s)} \supset \mathfrak{p}^{(s)}.$$

为了说明符号幂与准素分解的联系, 以下设 R 是 Noether 环. 从 $\mathrm{Supp}(R/\mathfrak{p}^s) = V(\mathfrak{p}^s) = V(\mathfrak{p})$ 可见 $\mathfrak{p}$ 是 $(\mathrm{Ass}(R/\mathfrak{p}^s), \subset)$ 的极小元; 鉴于推论 3.5.8, 在 $\mathfrak{p}^s$ 的准素分解中取 $\mathfrak{p}$-准素成分, 产物正是 $\mathfrak{p}^{(s)}$.

以下结论有助于了解符号幂的应用.

引理 3.6.4 选定 Noether 环 R 的素理想 $\mathfrak{p}$. 设 I 为 R 的 $\mathfrak{p}$-准素理想, 则存在 $s \geq 1$ 使得 $I \supset \mathfrak{p}^{(s)}$.

证明 由命题 3.4.6 (iii) 与局部化的正合性可知 $I_{\mathfrak{p}} = IR_{\mathfrak{p}}$ 是 $R_{\mathfrak{p}}$ 的 $\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}$-准素理想. 引理 3.6.1 给出 $s \geq 1$ 使得 $I_{\mathfrak{p}} \supset \mathfrak{p}^s R_{\mathfrak{p}}$. 现在取包含关系两边对 $R \to R_{\mathfrak{p}}$ 的原像: 右式即 $\mathfrak{p}^{(s)}$, 而左式按约定 1.7.5 则是

$$R \cap I_{\mathfrak{p}} = \{a \in R : \exists u \in R \smallsetminus \mathfrak{p},\ ua \in I\},$$

然而定义–命题 3.5.3 对准素理想的刻画连同 $\sqrt{I} = \mathfrak{p}$ 即刻蕴涵 $R \cap I_{\mathfrak{p}} = I$. 证毕. □

命题 3.6.5 设 R 为 Noether 环, $0 = \bigcap_{i=1}^n I_i$ 是零理想在 R 中的极小准素分解, 其中 $\mathrm{Ass}(R/I_i) = \{\mathfrak{p}_i\}$, 则取 $s \gg 0$ 可得极小准素分解 $0 = \bigcap_{i=1}^n \mathfrak{p}_i^{(s)}$.

证明 选定 $1 \leq i \leq n$. 先设 $\mathfrak{p}_i$ 为 $(\mathrm{Ass}(R), \subset)$ 的极小元. 对所有 $s \geq 1$, 推论 3.5.8 蕴涵

$$I_i = \ker\left[R \to R_{\mathfrak{p}_i}\right] \subset \ker[R \to R_{\mathfrak{p}_i}/\mathfrak{p}_i^s R_{\mathfrak{p}_i}] = \mathfrak{p}_i^{(s)};$$

然而引理 3.6.4 蕴涵当 $s \gg 0$ 时 $I_i \supset \mathfrak{p}_i^{(s)}$. 综上, $s \gg 0$ 时 $I_i = \mathfrak{p}_i^{(s)}$.

若 $\mathfrak{p}_i$ 非 $(\mathrm{Ass}(R), \subset)$ 的极小元, 则存在 $j \neq i$ 使得 $\mathfrak{p}_i \supset \mathfrak{p}_j$, 而且 $\mathfrak{p}_j$ 是 $(\mathrm{Ass}(R), \subset)$ 的极小元. 引理 3.6.4 和上一步蕴涵当 $s \gg 0$ 时

$$I_i \supset \mathfrak{p}_i^{(s)} \supset \mathfrak{p}_j^{(s)} = I_j.$$

因此对所有 i 将 I_i 替换为 $\mathfrak{p}_i^{(s)}$, 取交仍是 0 的准素分解, 长度仍为 n, 故极小. □

3.7 应用: Krull 交定理

本节介绍经典的 Krull 交定理及其推论, 此处给出的证明基于准素分解; 稍后在 §4.6 将提供另一则基于 Artin–Rees 引理的论证.

定理 3.7.1 (W. Krull) 设 I 为 Noether 环 R 的理想, M 为有限生成 R-模; 命 $N := \bigcap_{n \geq 0} I^n M$, 则 $N = IN$, 且存在 $a \in I$ 使得 $(1+a)N = 0$.

特别地, 若 $I \subset \mathrm{rad}(R)$, 则 $N = 0$.

证明 关键在于证 $N = IN$: 承认此性质, 则定理 2.3.4 给出所需的 $a \in I$ 以及 $I \subset \mathrm{rad}(R) \implies N = 0$.

说明 $N \subset IN$ 即可. 以定理 3.5.9 取 IN 在 M 中的准素分解 $IN = Q_1 \cap \cdots \cap Q_k$, 其中 Q_i 是 M 的 $\mathfrak{p}_i$-准素子模. 以下考虑给定之 $1 \leq i \leq k$.

设存在 $r \in I \smallsetminus \mathfrak{p}_i$, 则 $rN \subset IN \subset Q_i$; 另一方面 $\mathrm{Ass}(M/Q_i) = \{\mathfrak{p}_i\}$ 和关于零因子的命题 3.4.6 (ii) 蕴涵 N 在 M/Q_i 中的像为零模, 于是此时 $N \subset Q_i$.

设 $I \subset \mathfrak{p}_i$, 则 $\mathrm{Ass}(M/Q_i) = \{\mathfrak{p}_i\}$ 蕴涵 $\mathfrak{p}_i$ 的元素都是 M/Q_i 的零因子, 故引理 3.5.2 (ii) 表明对所有 $x \in M$ 皆有 $n \gg 0 \implies \mathfrak{p}_i^n x \subset Q_i$; 又因为 M 有限生成, 故 $n \gg 0 \implies \mathfrak{p}_i^n M \subset Q_i$. 于是此时

$$N = \bigcap_{n \geq 0} I^n M \subset \bigcap_{n \geq 0} \mathfrak{p}_i^n M \subset Q_i.$$

综上, $N \subset \bigcap_{i=1}^k Q_i = IN$. 明所欲证. □

以下结论称为 Krull 交定理.

推论 3.7.2 (W. Krull) 设 R 为 Noether 整环, I 为 R 的真理想, 则 $\bigcap_{n \geq 0} I^n = 0$.

证明 在定理 3.7.1 中取 $M = R$, 则对于 $N := \bigcap_{n \geq 0} I^n$ 存在 $a \in I$ 使得 $1 + a \in \mathrm{ann}(N)$. 由于 $I \neq R$, 必有 $1 + a \neq 0$, 故整环的性质蕴涵 $N = 0$. □

3.8 Chevalley 可构造性定理

本节探讨素谱的可构造子集相对于有限展示环同态的像; 关于可构造子集的概念, 请见定义 A.7.1. 根据引理 A.7.2, 可构造子集的有限交, 有限并和补集仍是可构造子集.

以下处理环的素谱时, 考虑的拓扑默认为 Zariski 拓扑. 先来描述素谱中的可构造子集.

引理 3.8.1 设 R 为环, U 为 $\mathrm{Spec}(R)$ 的开子集. 以下陈述等价:

(i) $U \subset \mathrm{Spec}(R)$ 是回紧开子集 (定义 A.1.7);

(ii) U 拟紧;

(iii) 存在 $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ 和 $f_1, \ldots, f_n \in R$ 使得 $U = \bigcup_{i=1}^n D(f_i)$;

(iv) 存在 R 的有限生成理想 I 使得 $U = \mathrm{Spec}(R) \smallsetminus V(I)$.

证明 (i) $\implies$ (ii): 已知 $\mathrm{Spec}(R)$ 拟紧, 由回紧子集的定义知 $U \hookrightarrow \mathrm{Spec}(R)$ 是定义 A.1.4 所谓拟紧映射, 这导致 U 拟紧.

(ii) $\implies$ (iii): 这是因为形如 $D(f)$ 的子集构成 $\mathrm{Spec}(R)$ 的一组基.

(iii) $\iff$ (iv): 应用引理 1.10.3 (iii).

(iii) $\implies$ (i): 鉴于引理 A.1.9, 证形如 $D(f)$ 的开子集回紧即可, 但包含映射 $D(f) \hookrightarrow \mathrm{Spec}(R)$ 是对 $R \to R[f^{-1}]$ 取函子 $\mathrm{Spec}(\cdot)$ 的产物, 故命题 2.5.2 说明 $D(f) \hookrightarrow \mathrm{Spec}(R)$ 为拟紧映射. □

今后的论证用到一则常识: 对于任意映射 $f: X \to Y$ 和 X 的任一族子集 $(X_i)_i$, 总有 $f(\bigcup_i X_i) = \bigcup_i f(X_i)$.

引理 3.8.2 设 R 为环, 则 $\mathrm{Spec}(R)$ 的可构造子集恰是形如 $D(f) \cap V((g_1, \ldots, g_m))$ 的子集的有限并, 其中 $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ 而 $f, g_1, \ldots, g_m \in R$.

证明 按定义, 可构造子集恰是形如 $A \cap (\mathrm{Spec}(R) \smallsetminus B)$ 的子集之有限并, 其中 A 和 B 都是回紧开子集. 以引理 3.8.1 将 A (或 B) 写成 $\bigcup_{i=1}^n D(f_i)$ (或 $\bigcup_{j=1}^m D(g_j)$), 再将关于 A 的并对交分配, 即得所求结论. □

对于 Noether 环的情形, 以下性质特别常用.

命题 3.8.3 设 R 为 Noether 环, 则:

(i) $\mathrm{Spec}(R)$ 的可构造子集恰是局部闭子集 (定义 A.1.3) 的有限并,

(ii) 任何可构造子集 $E \subset \mathrm{Spec}(R)$ 皆包含其闭包 $\overline{E}$ 中的一个稠密开子集.

证明 命题 3.2.1 表明 $\mathrm{Spec}(R)$ 是 Noether 空间. 断言 (i) 既容易从引理 3.8.2 推导, 也可以归于更广泛的命题 A.7.3. 断言 (ii) 是推论 A.7.6 的应用. □

例 3.8.4 取任意域 F 上的多项式代数 $R = F[X,Y]$. 取极大理想 $\mathfrak{m} := (X,Y)$ 和 $E := D(X) \cup \{\mathfrak{m}\}$, 则 E 是 $\mathrm{Spec}(R)$ 的可构造子集. 但它不是局部闭子集: 假如 $E = U \cap Z$, 其中 U 开 Z 闭, 则 $\mathfrak{m} \in U$; 取 $f \in R$ 使得 $\mathfrak{m} \in D(f) \subset U$, 则 $D(f) \cap E = D(f) \cap Z$ 是 $D(f)$ 的闭子集; 但命题 1.10.10 将 $D(f) \cap E \subset D(f)$ 等同于

$$D\left(\frac{X}{1}\right) \cup \{\mathfrak{m}[f^{-1}]\} \subset \mathrm{Spec}\, F[X,Y][f^{-1}],$$

它不包含素理想 $(\frac{X}{1})$, 然而 $D\left(\frac{X}{1}\right)$ 稠密, 故这不是 $\mathrm{Spec}\, F[X,Y][f^{-1}]$ 的闭子集.

命题 3.8.5 考虑环同态 $\varphi: R \to S$ 和相应的映射 $\mathrm{Spec}(\varphi): \mathrm{Spec}(S) \to \mathrm{Spec}(R)$. 若 E 是 $\mathrm{Spec}(R)$ 的可构造子集, 则 $\mathrm{Spec}(\varphi)^{-1}(E)$ 是 $\mathrm{Spec}(S)$ 的可构造子集.

证明 鉴于引理 A.7.4, 说明 E 回紧蕴涵 $\mathrm{Spec}(\varphi)^{-1}(E)$ 回紧即可; 依照引理 3.8.1, 这又归结为 $\mathrm{Spec}(\varphi)^{-1}(D(f)) = D(\varphi(f))$ (命题 1.10.10). □

相对复杂的是可构造子集对 $\mathrm{Spec}(\varphi)$ 的像. 先处理三类特例.

引理 3.8.6 对于以下两类环同态 $\varphi: R \to S$, 映射 $\mathrm{Spec}(\varphi): \mathrm{Spec}(S) \to \mathrm{Spec}(R)$ 皆映可构造子集为可构造子集:

(i) $S = R/I$ 而 φ 是商同态, 其中 I 是有限生成理想;

(ii) $S = R[f^{-1}]$ 而 φ 是局部化带有的典范同态, 其中 $f \in R$.

注意到两种情况下 $\mathrm{Spec}(\varphi)$ 都是单射.

证明 对于 (i), 引理 3.8.2 蕴涵 $V(I)$ 是可构造子集. 设 $\overline{A}$ 和 $\overline{B}$ 为 $\mathrm{Spec}(R/I)$ 的回紧开子集, 按引理 3.8.1 写作有限并

$$\overline{A} = \bigcup_i D(\overline{f_i}), \quad \overline{B} = \bigcup_j D(\overline{g_j}).$$

对每个 $\overline{f_i}$ (或 $\overline{g_j}$) 任取 R 中的原像 f_i (或 g_j), 命 $A := \bigcup_i D(f_i)$ (或 $B := \bigcup_j D(g_j)$); 两者都是 $\mathrm{Spec}(R)$ 的回紧开子集.

易见 $\overline{A}$ (或 $\overline{B}$) 对 $\mathrm{Spec}(R/I) \to \mathrm{Spec}(R)$ 的像是 $A \cap V(I)$ (或 $B \cap V(I)$). 由此可见 $\overline{A} \cup (\mathrm{Spec}(R/I) \smallsetminus \overline{B})$ 的像是 $(A \cup (\mathrm{Spec}(R) \smallsetminus B)) \cap V(I)$, 而两个可构造子集之交仍可构造.

对于 (ii), 设 A' 和 B' 为 $\mathrm{Spec}(R[f^{-1}])$ 的回紧开子集, 按引理 3.8.1 分别表作有限并 $\bigcup_i D(f_i')$ 和 $\bigcup_j D(g_j')$; 此处不妨设 $f_i' = \frac{f_i}{1}$ 而 $g_j' = \frac{g_j}{1}$, 其中 $f_i, g_j \in R$, 则推论 1.10.11 (iii) 说明 A' 和 B' 在 $\mathrm{Spec}(R)$ 中的像分别是 $A = \bigcup_i D(ff_i)$ 和 $B = \bigcup_j D(fg_j)$. 易见 $A' \cap (\mathrm{Spec}(R[f^{-1}]) \smallsetminus B')$ 在 $\mathrm{Spec}(R)$ 中的像是 $A \cap (\mathrm{Spec}(R) \smallsetminus B)$, 这是 $\mathrm{Spec}(R)$ 的可构造子集. □

引理 3.8.7 *设 $f = \sum_{i=0}^{d} a_i X^i \in \mathrm{Spec}\, R[X] \smallsetminus \{0\}$, 则 $D(f)$ 对 $\mathrm{Spec}\, R[X] \to \mathrm{Spec}\, R$ 的像是 $D(a_0) \cup \cdots \cup D(a_d)$.*

证明 考虑 $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R)$, 记 f 在 $\kappa(\mathfrak{p})[X]$ 中的像为 $\overline{f}$, 则命题 1.11.8 蕴涵 $\mathfrak{p}$ 属于 $D(f) \simeq \mathrm{Spec}\, R[X][f^{-1}]$ 的像当且仅当 $R[X][f^{-1}] \underset{R}{\otimes} \kappa(\mathfrak{p}) \simeq \kappa(\mathfrak{p})[X][\overline{f}^{-1}]$ 非零, 当且仅当 $\overline{f}$ 非零, 当且仅当存在 $0 \leq i \leq d$ 使得 $a_i \notin \mathfrak{p}$. □

引理 3.8.8 *设 R 为环而 $f, g \in R[X]$, 且 $g \neq 0$ 的最高次项系数可逆. 此时 $D(f) \cap V(g)$ 对 $\mathrm{Spec}\, R[X] \to \mathrm{Spec}\, R$ 的像是可构造开子集.*

证明 不妨设 $d := \deg g \geq 1$, 否则结论平凡. 表 g 为 $aX^d +$ 低次项, 其中 $a \in R^\times$. 环 $S := R[X]/(g)$ 作为 R-模是以 $1, \ldots, X^{d-1}$ 的像为基的自由模. 考虑乘以 f 给出的 R-模自同态

$$m : S \to S, \quad m(h + (g)) = fh + (g),$$

记其特征多项式为 $\mathrm{Char}_m = X^d + c_{d-1}X^{d-1} + \cdots + c_0 \in R[X]$. 以下证明 $D(f) \cap V(g)$ 在 $\mathrm{Spec}(R)$ 中的像是 $D(c_0) \cup \cdots \cup D(c_{d-1})$.

对于 R 的任意素理想 $\mathfrak{p}$, 记 $m \otimes \mathrm{id}_{\kappa(\mathfrak{p})} \in \mathrm{End}_{\kappa(\mathfrak{p})}(S \underset{R}{\otimes} \kappa(\mathfrak{p}))$ 为 $m(\mathfrak{p})$, 则 $\mathrm{Char}_{m(\mathfrak{p})} \in \kappa(\mathfrak{p})[X]$ 是 Char_m 对 $R[X] \to \kappa(\mathfrak{p})[X]$ 的像, 而

$$\mathfrak{p} \in V(c_0, \ldots, c_{d-1}) \iff \mathrm{Char}_{m(\mathfrak{p})} = X^d \iff m(\mathfrak{p}) \text{ 是幂零线性自同态.} \quad (3.8.1)$$

记 f 在 S 中的像为 $\overline{f}$. 对于 $\mathfrak{q} \in D(f) \cap V(g)$ (对应到 $\overline{\mathfrak{q}} \in D(\overline{f})$), 命 $\mathfrak{p} := \mathfrak{q} \cap R = \overline{\mathfrak{q}} \cap R$, 则有域嵌入 $\kappa(\mathfrak{p}) \to \kappa(\mathfrak{q})$ 和 R-模同态 $S \to \kappa(\mathfrak{q})$ (命题 1.11.9), 相应地得到

$\kappa(\mathfrak{q})$-线性映射 $\Phi : S \underset{R}{\otimes} \kappa(\mathfrak{p}) \to \kappa(\mathfrak{q})$. 考虑交换图表

$$\begin{tikzcd} S \underset{R}{\otimes} \kappa(\mathfrak{p}) \arrow[r, "\Phi"] \arrow[d, "m(\mathfrak{p})"'] & \kappa(\mathfrak{q}) \arrow[d, "\text{乘以 } f"] \\ S \underset{R}{\otimes} \kappa(\mathfrak{p}) \arrow[r, "\Phi"'] & \kappa(\mathfrak{q}). \end{tikzcd}$$

因为 $f \notin \mathfrak{q}$, 右边的垂直箭头可逆. 故 (3.8.1) 蕴涵 $\mathfrak{p} \notin V(c_0, \ldots, c_{d-1})$, 亦即 $\mathfrak{p} \in D(c_0) \cup \cdots \cup D(c_{d-1})$.

另一方面, 设 $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R)$, 且存在 $0 \leq i < d$ 使得 $\mathfrak{p} \in D(c_i)$, 则 (3.8.1) 蕴涵 $m(\mathfrak{p})$ 非幂零, 换言之 $\overline{f} \otimes 1_{\kappa(\mathfrak{p})} \notin \mathrm{nil}(S \underset{R}{\otimes} \kappa(\mathfrak{p}))$, 故存在 $\overline{\mathfrak{q}}_0 \in D(\overline{f} \otimes 1_{\kappa(\mathfrak{p})})$ (推论 2.1.6). 按照命题 1.11.8 取 $\mathrm{Spec}(S)$ 中对应到 $\overline{\mathfrak{q}}_0$ 的元素 $\overline{\mathfrak{q}}$, 则 $\overline{\mathfrak{q}} \in D(\overline{f})$; 再取 $\mathrm{Spec}\, R[X]$ 中对应到 $\overline{\mathfrak{q}}$ 的 $\mathfrak{q} \in D(f) \cap V(g)$.

域 $\kappa(\mathfrak{p})$ 是 $S \underset{R}{\otimes} \kappa(\mathfrak{p})$ 的子环, 因此 $\overline{\mathfrak{q}}_0 \cap \kappa(\mathfrak{p}) = 0$, 而

$$\begin{aligned} \mathfrak{q} \cap R = \overline{\mathfrak{q}} \cap R &= \left\{ t \in R : t \otimes 1_{\kappa(\mathfrak{p})} \in \overline{\mathfrak{q}}_0 \cap \kappa(\mathfrak{p}) \right\} \\ &= \ker\left[R \to \kappa(\mathfrak{p}) \right] = \mathfrak{p}. \end{aligned}$$

综上, $D(f) \cap V(g)$ 在 $\mathrm{Spec}(R)$ 中的像正是 $D(c_0) \cup \cdots \cup D(c_{d-1})$. 明所欲证. □

定理 3.8.9 (C. Chevalley) 设环同态 $\varphi : R \to S$ 使 S 成为有限展示 R-代数, 则 $\mathrm{Spec}(\varphi) : \mathrm{Spec}(S) \to \mathrm{Spec}(R)$ 映 $\mathrm{Spec}(S)$ 的可构造子集为 $\mathrm{Spec}(R)$ 的可构造子集.

证明 对 S 作为 R-代数的最小生成元个数 n 递归论证. 若 $n = 0$, 则问题由引理 3.8.6 (i) 解决. 以下设 $n \geq 1$, 分解 $R \to S$ 为 $R \hookrightarrow R[X_1] \hookrightarrow R[X_1, \ldots, X_n] \twoheadrightarrow S$. 引理 1.9.4 (iii) 蕴涵 $R[X_1] \hookrightarrow R[X_1, \ldots, X_n] \twoheadrightarrow S$ 的合成是有限展示的, 最小生成元个数 $\leq n - 1$. 于是问题化到 $S = R[X]$ 的特例.

鉴于引理 3.8.2 和可构造子集对有限并的封闭性, 对 $\mathrm{Spec}\, R[X]$ 中形如 $C := D(f) \cap V(g_1, \ldots, g_m)$ 的子集证明 C 在 $\mathrm{Spec}(R)$ 中的像 $C^\flat$ 可构造即可.

当 $m = 0$ 时可应用引理 3.8.7. 以下设 $m \geq 1$, 且无妨设 $0 \leq \deg g_1 \leq \cdots \leq \deg g_m$. 兹对 $\deg g_1 + m$ 递归论证. 记 g_1 的最高次项系数为 $a \in R \smallsetminus \{0\}$, 由集合与映射的无交并分解

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] \mathrm{Spec}(R[X]) \arrow[d] & = & \mathrm{Spec}(R[X]/(a)) \arrow[d] & \sqcup & \mathrm{Spec}(R[a^{-1}][X]) \arrow[d] \\ \mathrm{Spec}(R) & = & \mathrm{Spec}(R/(a)) & \sqcup & \mathrm{Spec}(R[a^{-1}]) \end{tikzcd}$$

可见 $C^\flat$ 等于以下子集之并:

- ◇ $C \cap \mathrm{Spec}((R/(a))[X])$ 在 $\mathrm{Spec}(R/(a))$ 中的像, 亦即 $C^\flat \cap \mathrm{Spec}(R/(a))$;
- ◇ $C \cap \mathrm{Spec}(R[a^{-1}][X])$ 在 $\mathrm{Spec}(R[a^{-1}])$ 中的像, 亦即 $C^\flat \cap \mathrm{Spec}(R[a^{-1}])$.

鉴于引理 3.8.6, 证明以上两种交的像分别是 $\mathrm{Spec}(R/(a))$ 和 $\mathrm{Spec}(R[a^{-1}])$ 的可构造子集即可.

第一种交降低 $\deg d_1$ 而 m 不增, 递归解决; 第二种交将问题化到 a 可逆的情形. 当 $a \in R^\times$ 而 $m > 1$ 时, 命 $g_2' \in R[X]$ 为用 g_1 除 g_2 的余式, 则

$$(g_1, g_2, \ldots, g_m) = (g_2', g_1, \ldots, g_m), \quad \deg g_2' < \deg g_1,$$

问题仍可递归解决. 综上, 处理 $a \in R^\times$ 而 $m = 1$ 的特例即可, 代入引理 3.8.8. □

事实上, $\mathrm{Spec}(R)$ 的每个可构造子集都能实现为某个 $\mathrm{Spec}(S) \to \mathrm{Spec}(R)$ 的像集, 其中 S 是有限展示 R-代数, 细节留作本章习题.

推论 3.8.10 若 R 是 Noether 环, $\varphi : R \to S$ 使 S 成为有限生成 R-代数, 则 $\mathrm{Spec}(\varphi) : \mathrm{Spec}(S) \to \mathrm{Spec}(R)$ 映 $\mathrm{Spec}(S)$ 的局部闭子集为 $\mathrm{Spec}(R)$ 的可构造子集.

证明 回忆到 S 也是 Noether 环, 而且是有限展示 R-代数; Noether 条件确保 $\mathrm{Spec}(S)$ 的局部闭子集皆可构造, 故可代入定理 3.8.9. □

注记 3.8.11 对于 R 是 Jacobson 环, 而 S 是有限展示 R-代数的情形, 从定理 3.8.9 可推得 $\mathrm{MaxSpec}(S) \to \mathrm{MaxSpec}(R)$ (定理 2.6.8) 也映可构造子集为可构造子集, 这是命题 A.8.8 的应用.

当 F 是代数闭域而 R 和 S 都是有限生成 F-代数时, 按照 §2.7 的方式将 $\mathrm{MaxSpec}(R)$ 和 $\mathrm{MaxSpec}(S)$ 诠释为仿射空间中的代数子集, 则 $\mathrm{MaxSpec}(S) \to \mathrm{MaxSpec}(R)$ 保持可构造性这一事实可以从模型论的视角观照, 关乎代数闭域的量词消去, 详见 [6, §7.1].

习题

1. 设 f 为 Noether 环 R 的自同态. 证明若 f 满, 则它自动是同构. 提示〉 若 f 非单, 则有 $\ker(f) \subsetneq \ker(f^2) \subsetneq \cdots$.

2. 设 F 为域, R 为 F-代数, 而且 $[\kappa(\mathfrak{m}) : F]$ 对 R 的每个极大理想 $\mathfrak{m}$ 皆有限. 说明 R 是 Artin 环当且仅当 R 是有限维 F-向量空间.

提示〉 对于 “仅当” 方向, 应用定理 3.3.1 证明最后一段的理想有限降链, 其中每个子商都是有限维 F-向量空间.

3. 说明若 E 是 $\mathrm{Spec}(R)$ 的可构造子集, 则存在有限展示 R-代数 S 使得 E 是 $\mathrm{Spec}(S) \to \mathrm{Spec}(R)$ 的像集.

提示〉 通过取环的直积, 问题简化到 $E = D(f) \cap V(g_1, \ldots, g_m)$ 的情形. 取 $S = (R/(g_1, \ldots, g_m))[f^{-1}]$.

第四章 分次和滤过结构

4.1 分次环与分次模

本节简单回顾分次环与分次模的概念; 更多细节可见 [7, §7.4] 或 [8, §7.1].

在约定 4.1.6 之前, 本节考虑的环容许非交换. 为了简化论述, 我们考虑的模默认为左模, 而理想默认为双边理想. 之后的应用将聚焦于交换环的情形.

以下定义涉及幺半群的术语, 详见 §B.1; 对于多数场景, 考虑幺半群 $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ 或 $\mathbb{Z}$ 的特例已然足够.

定义 4.1.1 选定加法幺半群 Γ. 所谓 Γ-**分次环**, 是指一个环 A (在此容许非交换), 配备作为交换群的直和分解 $A = \bigoplus_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma$, 使得乘法满足

$$A_\gamma \cdot A_\eta \subset A_{\gamma+\eta}, \quad 1 \in A_0;$$

因此 A_0 是 A 的子环. 如果 $r \in R_\gamma$, 则称 r 为**齐次元**, 并在 $r \neq 0$ 的情形定义其次数为 $\deg r := \gamma$.

- 若 A 和 B 为 Γ-分次环, 环同态 $\varphi : A \to B$ 对所有 $\gamma \in \Gamma$ 皆满足 $\varphi(A_\gamma) \subset B_\gamma$, 则称 φ 为分次环之间的同态.
- 定义 Γ-分次环 A 的**分次理想**为 A 中满足 $I = \bigoplus_{\gamma\in\Gamma}(I \cap A_\gamma)$ 的双边理想 I; 相应的商 $A/I = \bigoplus_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma/(I \cap A_\gamma)$ 仍是分次环. 对于左理想和右理想也有类似的分次概念.
- 类似地, 可以定义 A 的**分次子环**.

定义 4.1.2 取定 Γ-分次环 A 如上.

(i) 若 M 为 A-模, 作为交换群配备直和分解 $M = \bigoplus_{\gamma\in\Gamma} M_\gamma$, 满足

$$A_\gamma \cdot M_\eta \subset M_{\gamma+\eta}, \quad \gamma, \eta \in \Gamma,$$

则称 M 为 **Γ-分次 A-模**, 简称分次 A-模. 如果 $x \in M_\gamma$, 则称 x 为**齐次元**, 并在 $x \neq 0$ 的情形定义其次数为 $\deg x := \gamma$.

- ◇ 如果 M 和 M' 是 Γ-分次 A-模, 而 A-模同态 $\varphi : M \to M'$ 对所有 $\gamma \in \Gamma$ 满足 $\varphi(M_\gamma) \subset M'_\gamma$, 则称 φ 为 Γ-分次 A-模同态.
- ◇ 若 N 是 M 的 A-子模, 满足

$$N = \bigoplus_{\gamma\in\Gamma} N_\gamma, \quad N_\gamma := N \cap M_\gamma,$$

则称 N 为 M 的**分次 A-子模**; 此时 M/N 也是 Γ-分次 A-模.

(ii) 设 R 是交换的 Γ-分次环, 而 A 是 Γ-分次环, 同时也具有 R-代数的结构, 使得 A 作为 R-模是 Γ-分次模, 则称 A 为 **Γ-分次 R-代数**, 简称分次 R-代数. 一如无分次的场景, 这也等价于指定 Γ-分次环同态 $R \to A$.

- ◇ 如果 A 和 B 是 Γ-分次 R-代数 (容许非交换), 而 R-代数同态 $\varphi : A \to B$ 同时是 Γ-分次环的同态, 则称 φ 为 Γ-分次 R-代数同态.
- ◇ 如果 I 是 A 的分次理想, 则 A/I 也自然地成为 Γ-分次 R-代数.

任何环 A 都可以视为 Γ-分次环, 方法是置之于直和分解中 $\gamma = 0$ 的项; 相应地, 任意 A-模 M 也能按相同方法视为 Γ-分次 A-模. 这种分次结构称为**平凡分次结构**.

一个 Γ-分次环 A 本身也是 Γ-分次左 (或右) A-模, 其分次左 (或右) 理想无非是分次 R-子模. 另外, 对于 A 的任意分次理想 I, 易见有双射

$$\begin{array}{ccc} \{J \subset A : \text{分次理想},\ J \supset I\} & \xleftrightarrow{1:1} & \{\bar{J} \subset A/I : \text{分次理想}\} \\ J & \longmapsto & J/I \\ \text{其原像} & \longleftarrow\!\shortmid & \bar{J}. \end{array}$$

引理 4.1.3 设 J 为 Γ-分次环 A 的理想 (或左理想, 右理想), 则 J 是分次的当且仅当它能由齐次元生成. 设 M 为 Γ-分次 A-模, 则子模 N 是分次的当且仅当它能由齐次元生成.

证明 见 [7, 引理 7.4.2]. □

由引理 4.1.3 立见若 I 和 J 是 Γ-分次环 A 的分次理想, 则 IJ 亦然.

记所有 Γ-分次环 (默认交换) 所成范畴为 Ring_Γ; 交换环在其中构成的全子范畴记为 CRing_Γ. 当 Γ-分次环 A 选定, 全体 Γ-分次 A-模相对于分次模的同态构成范畴 $A\text{-}\mathsf{Mod}_\Gamma$.

设 Γ-分次环 R 交换, 则全体 Γ-分次 R-代数构成范畴 $R\text{-}\mathsf{Alg}_\Gamma$, 交换 R-代数在其中构成的全子范畴记为 $R\text{-}\mathsf{CAlg}_\Gamma$.

一族 Γ-分次 A-模 $(M_i)_{i\in I}$ (应要求 I 是 "小" 集, 见注记 1.1.4) 在 $A\text{-}\mathsf{Mod}_\Gamma$ 中有直和 (亦即余积), 方法是在 A-模的直和 $\bigoplus_{i\in I} M_i$ 上赋予分次 $(\bigoplus_{i\in I} M_i)_\gamma = \bigoplus_{i\in I} M_{i,\gamma}$. 此外, 一族分次子模的交与和仍是分次的.

命题 4.1.4 符号如上, $A\text{-}\mathsf{Mod}_\Gamma$ 是 Abel 范畴. 忘却分次结构给出的忘却函子 $A\text{-}\mathsf{Mod}_\Gamma \to A\text{-}\mathsf{Mod}$ 保所有小 $\varinjlim$ 和有限 $\varprojlim$; 特别地, 忘却函子是正合的.

另一方面, $A\text{-}\mathsf{Mod}_\Gamma$ 具备所有小积, 记为 ${}^*\prod$ 以资区别, 其构造是对所有 $\gamma \in \Gamma$ 取

$$^*\left(\prod_{i\in I} M_i\right)_\gamma := \prod_{i\in I} M_{i,\gamma};$$

因此 $A\text{-}\mathsf{Mod}_\Gamma$ 也具备所有小 $\varprojlim$.

证明 对于 $A\text{-}\mathsf{Mod}_\Gamma$ 中的同态 $\varphi : M \to M'$, 易见

- ◇ 在 $A\text{-}\mathsf{Mod}$ 中取的 $\ker(\varphi)$, $\mathrm{im}(\varphi)$ 和 $\mathrm{coker}(\varphi) = M'/\mathrm{im}(\varphi)$ 都是 Γ-分次的;
- ◇ $\ker(\varphi)$ 及 $\mathrm{coker}(\varphi)$ 在 $A\text{-}\mathsf{Mod}_\Gamma$ 中仍分别具有核及余核所需的泛性质;
- ◇ 同构 $M/\ker(\varphi) \xrightarrow{\sim} \mathrm{im}(\varphi)$ 是分次 A-模的同构.

代入 [8, 定义 2.1.1] 可见 $A\text{-}\mathsf{Mod}_\Gamma$ 是 Abel 范畴, 且忘却函子保 ker 及 coker.

另一方面, 忘却函子显然保小直和. 由于从 ker, coker 和小直和足以构造所有小 $\varinjlim$ 和有限 $\varprojlim$, 断言第一部分得证.

关于积的第二部分是直接了当的验证. □

根据以上描述, 忘却函子显然不保持无穷积.

注记 4.1.5 如采取 [8, 定义 1.5.2] 的术语, 可以说 $A\text{-}\mathsf{Mod}_\Gamma \to A\text{-}\mathsf{Mod}$ 生所有小 $\varinjlim$ 和有限 $\varprojlim$, 这是因为此函子是保守函子, 见 [8, 定义 1.5.4 和注记 1.5.5].

约定 4.1.6 后续考虑的分次环默认交换.

关于分次环的分次素理想和局部化, 可参考 §§B.3–B.4; 其初步同调性质可参考 §B.5.

4.2 滤过结构

本节考虑的环 A 不要求交换; 在非交换情形, A-模应区分左右, 而 A 的理想也有左右或双边之分. 一如 §4.1, 我们考虑的模默认为左模, 理想默认为双边理想.

首先考虑一般的偏序加法幺半群 $(\Gamma, \leq)$ (定义 B.1.3); 关于序结构的术语可参考 [7, §1.2].

定义 4.2.1 (滤过环及其上的模) 所谓 **Γ-滤过环**, 是一个环 A 连同加法子群族 $\{\mathrm{F}^\gamma A\}_{\gamma\in\Gamma}$, 满足

- ◇ (降性质) $\gamma \leq \eta \implies \mathrm{F}^\gamma A \supset \mathrm{F}^\eta A$,
- ◇ 对所有 $\gamma, \gamma' \in \Gamma$ 皆有 $\mathrm{F}^\gamma A \cdot \mathrm{F}^{\gamma'} A \subset \mathrm{F}^{\gamma+\gamma'} A$.
- ◇ $1_A \in \mathrm{F}^0 A$.

给定 Γ-滤过环 A, 所谓 **Γ-滤过 A-模**, 是一个 A-模 M 连同加法子群族 $\{\mathrm{F}^\gamma M\}_{\gamma\in\Gamma}$, 满足

- ◇ (降性质) $\gamma \leq \eta \implies \mathrm{F}^\gamma M \supset \mathrm{F}^\eta M$,
- ◇ 对所有 $\gamma, \gamma' \in \Gamma$ 皆有 $\mathrm{F}^\gamma A \cdot \mathrm{F}^{\gamma'} M \subset \mathrm{F}^{\gamma+\gamma'} M$.

若 $A = \bigcup_{\gamma\in\Gamma} \mathrm{F}^\gamma A$ (或 $M = \bigcup_{\gamma\in\Gamma} \mathrm{F}^\gamma M$), 则称 A (或 M) 的 Γ-滤过结构为**穷竭**的; 若 $\bigcap_\gamma \mathrm{F}^\gamma A = \{0_A\}$ (或 $\bigcap_\gamma \mathrm{F}^\gamma M = \{0\}$), 则称 A (或 M) 的 Γ-滤过结构为**分离**的.

以上概念精确而言应称为**降滤过**. 稍后的约定 4.2.10 将介绍升滤过.

定义 4.2.2 (滤过结构之间的同态和严格同态) 设 A 和 A' 为 Γ-滤过环, 而 $\varphi: A \to A'$ 为环同态:

- ◇ 若 $\varphi(\mathrm{F}^\gamma A) \subset \mathrm{F}^\gamma A'$ 恒成立, 则称 φ 为 Γ-滤过环之间的同态;
- ◇ 若进一步要求 $\varphi(\mathrm{F}^\gamma A) = \mathrm{im}(\varphi) \cap \mathrm{F}^\gamma A'$ 恒成立, 则称 φ 为严格同态.

类似地, 给定 Γ-滤过环 A, 设 M 和 M' 为 Γ-滤过 A-模, 而 $\psi: M \to M'$ 为 A-模同态:

- ◇ 若 $\psi(\mathrm{F}^\gamma M) \subset \mathrm{F}^\gamma M'$ 恒成立, 则称 ψ 为 Γ-滤过 A-模之间的同态;
- ◇ 若进一步要求 $\psi(\mathrm{F}^\gamma M) = \mathrm{im}(\psi) \cap \mathrm{F}^\gamma M'$ 恒成立, 则称 ψ 为严格同态.

将态射取为定义 4.2.2 中的同态 (或严格同态), 便得到 Γ-滤过环构成的范畴 FRing_Γ (或 $\mathsf{FRing}^{\mathrm{s}}_\Gamma$), 而 Γ-滤过环 A 上的模亦构成范畴 $A\text{-}\mathsf{FMod}_\Gamma$ (或 $A\text{-}\mathsf{FMod}^{\mathrm{s}}_\Gamma$).

按照惯例, Γ-滤过交换环在 FRing_Γ (或 $\mathsf{FRing}^{\mathrm{s}}_\Gamma$) 中构成的全子范畴另记为 FCRing_Γ (或 $\mathsf{FCRing}^{\mathrm{s}}_\Gamma$).

尽管 $\mathsf{FRing}^{\mathrm{s}}_{\Gamma}$ (或 A-$\mathsf{FMod}^{\mathrm{s}}_{\Gamma}$) 只是 FRing_{Γ} (或 A-FMod_{Γ}) 的子范畴, 但同构的概念相同: $\varphi : A \to A'$ (或 $\psi : M \to M'$) 是同构当且仅当它是环 (或 A-模) 同构, 而且对所有 γ 皆诱导 $\mathrm{F}^{\gamma}A \xrightarrow{\sim} \mathrm{F}^{\gamma}A$ (或 $\mathrm{F}^{\gamma}M \xrightarrow{\sim} \mathrm{F}^{\gamma}M'$).

例 4.2.3 (平凡滤过) 设 $(\Gamma, \leq)$ 为全序加法幺半群, 则任何环 A 都有以下的平凡 Γ-滤过结构:

$$\mathrm{F}^{\gamma}A = \begin{cases} A, & \gamma \leq 0 \\ \{0_A\}, & \gamma > 0. \end{cases}$$

赋予 A 平凡 Γ-滤过. 对所有 A-模 M, 易见 M 上的 Γ-滤过相当于一族 A-子模 $\{\mathrm{F}^{\gamma}M\}_{\gamma\in\Gamma}$, 满足降性质 $\gamma \leq \eta \implies \mathrm{F}^{\gamma}M \supset \mathrm{F}^{\eta}M$.

特别地, 对所有 A-模 M 皆能赋予平凡 Γ-滤过

$$\mathrm{F}^{\gamma}M = \begin{cases} M, & \gamma \leq 0 \\ \{0\}, & \gamma > 0. \end{cases}$$

取环和模的平凡滤过分别给出函子 $\mathsf{Ring} \to \mathsf{FRing}^{\mathrm{s}}_{\Gamma}$ 和 A-$\mathsf{Mod} \to A$-$\mathsf{FMod}^{\mathrm{s}}_{\Gamma}$.

定义 4.2.4 (诱导滤过) 设 M 为 Γ-滤过 A-模, N 为其 A-子模.

- ◇ 定义 $\mathrm{F}^{\gamma}N := N \cap \mathrm{F}^{\gamma}M$, 使 N 成为 Γ-滤过 A-模, 称为子模 N 上的诱导滤过.
- ◇ 定义 $\mathrm{F}^{\gamma}(M/N) := \mathrm{im}\,[\mathrm{F}^{\gamma}M \to M/N]$, 称为商模 M/N 上的诱导滤过.

以下结论阐明严格同态的意义.

命题 4.2.5 设 $\psi : M \to M'$ 为 Γ-滤过 A-模同态, 分别赋予商模 $M/\ker(\psi)$ 和子模 $\mathrm{im}(\psi)$ 来自 M 和 M' 的诱导滤过, 则由 ψ 诱导的 A-模同态 $\bar{\psi} : M/\ker(\psi) \to \mathrm{im}(\psi)$ 是 Γ-滤过 A-模同态; 它是同构当且仅当 ψ 是严格同态.

证明 对任意 $\gamma \in \Gamma$ 和 $x \in \mathrm{F}^{\gamma}(M/\ker(\psi))$, 存在 x 的代表元 $\tilde{x} \in \mathrm{F}^{\gamma}M$, 而 $\bar{\psi}(x) = \psi(\tilde{x}) \in \mathrm{F}^{\gamma}M'$. 因此 $\bar{\psi}$ 是 Γ-滤过 A-模同态.

已知 $\bar{\psi}$ 是 A-模同构. 它是 Γ-滤过 A-模同构当且仅当 $\bar{\psi}(\mathrm{F}^{\gamma}(M/\ker(\psi))) = \mathrm{F}^{\gamma}(\mathrm{im}(\psi))$ 恒成立; 根据诱导滤过的定义, 这也等价于严格同态的条件 $\psi(\mathrm{F}^{\gamma}M) = \mathrm{im}(\psi) \cap \mathrm{F}^{\gamma}M'$. □

例 4.2.6 给定一族 Γ-滤过 A-模 $(M_i)_{i\in I}$, 它们作为 A-模的直和 $M := \bigoplus_{i\in I} M_i$ 带有 Γ-滤过 $\mathrm{F}^{\gamma}M := \bigoplus_{i\in I} \mathrm{F}^{\gamma}M_i$ (其中 $\gamma \in \Gamma$). 对所有 $i \in I$, 由定义可见包含同态 $\iota_i : M_i \to M$ 和投影同态 $p_i : M \to M_i$ 都是严格的.

例 4.2.7 (来自分次结构的滤过结构) 设 A 为 Γ-分次环. 定义

$$\mathrm{F}^{\gamma}A := \bigoplus_{\eta\geq\gamma} A_{\eta},$$

则 A 连同 $\mathrm{F}^\bullet A$ 成为 Γ-滤过环. 对于所有 Γ-分次 A-模 M, 类似地定义

$$\mathrm{F}^\gamma M := \bigoplus_{\eta \geq \gamma} M_\eta,$$

则 M 连同 $\mathrm{F}^\bullet M$ 成为 Γ-滤过 A-模. 任何 Γ-分次环同态 $\varphi : A \to A'$ (或 Γ-分次 A-模同态 $\psi : M \to M'$) 都是 Γ-滤过环 (或 Γ-滤过 A-模) 的严格同态. 由此得到函子 $\mathsf{Ring}_\Gamma \to \mathsf{FRing}^{\mathrm{s}}_\Gamma$ (或 $A\text{-}\mathsf{Mod}_\Gamma \to A\text{-}\mathsf{FMod}^{\mathrm{s}}_\Gamma$).

下面介绍另一方向的构造.

定义 4.2.8 设 A 为 Γ-滤过环, M 为 Γ-滤过 A-模, 定义 Γ-分次环 $\mathrm{gr}\, A = \bigoplus_\gamma \mathrm{gr}^\gamma A$ 和 Γ-分次 A-模 $\mathrm{gr}\, M = \bigoplus_\gamma \mathrm{gr}^\gamma M$ 如下:

$$\mathrm{gr}^\gamma A := \mathrm{F}^\gamma A \Big/ \sum_{\eta > \gamma} \mathrm{F}^\eta A,$$
$$\mathrm{gr}^\gamma M := \mathrm{F}^\gamma M \Big/ \sum_{\eta > \gamma} \mathrm{F}^\eta M.$$

此构造给出函子

$$\mathrm{gr} : \mathsf{FRing}_\Gamma \to \mathsf{Ring}_\Gamma, \quad \mathrm{gr} : A\text{-}\mathsf{FMod}_\Gamma \to A\text{-}\mathsf{Mod}_\Gamma.$$

在必须突出滤过结构的场合, 也记 $\mathrm{gr}_\mathrm{F}\, A = \mathrm{gr}\, A$ 和 $\mathrm{gr}_\mathrm{F}\, M = \mathrm{gr}\, M$.

此处对 $\gamma \in \Gamma$ 对应的直和项采取上标而非 §4.1 的下标记法, 只为和降滤过的上标符号保持一致.

具体地说, 为了定义 $\mathrm{gr}\, A$ 的乘法, 对所有 $x \in \mathrm{gr}^\gamma A$ 和 $y \in \mathrm{gr}^\eta A$ 任选其代表元 $\tilde{x} \in \mathrm{F}^\gamma A$ 和 $\tilde{y} \in \mathrm{F}^\eta A$, 然后定义

$$xy := \tilde{x}\tilde{y} \text{ 在 } \mathrm{gr}^{\gamma+\eta} A \text{ 中的像.}$$

在定义 B.1.3 的基础上, 关于 xy 良定义以及 $\mathrm{gr}\, A$ 成为 Γ-分次环的验证纯属例行公事, 留给读者. 同理, 通过取 $a \in \mathrm{gr}^\gamma A$ 和 $x \in \mathrm{gr}^\eta M$ 的代表元 $\tilde{a}$ 和 $\tilde{x}$ 来定义 $ax \in \mathrm{gr}^{\gamma+\eta} M$ 为 $\tilde{a}\tilde{x}$ 的像, 可验证 $\mathrm{gr}\, M$ 确实成为 Γ-分次 $\mathrm{gr}\, A$-模.

如果 A 交换, 则 $\mathrm{gr}\, A$ 显然也交换, 故 gr 限制为函子 $\mathsf{FCRing}_\Gamma \to \mathsf{CRing}_\Gamma$.

如果 Γ-滤过环 A 来自例 4.2.7 的构造, 则对所有 γ 皆有

$$\mathrm{gr}^\gamma A = \bigoplus_{\eta \leq \gamma} A_\eta \Big/ \bigoplus_{\eta > \gamma} A_\eta = A_\gamma,$$

而 $\mathrm{gr}\, A$ 正是 A 连同原有的 Γ-分次结构. 这表明:

- ◇ 合成函子 $\mathsf{Ring}_\Gamma \to \mathsf{FRing}_\Gamma \xrightarrow{\mathrm{gr}} \mathsf{Ring}_\Gamma$ 同构于 id;

◇ 同理, 给定 Ring_Γ 的对象 A, 合成函子 $A\text{-}\mathsf{Mod}_\Gamma \to A\text{-}\mathsf{FMod}_\Gamma \xrightarrow{\mathrm{gr}} A\text{-}\mathsf{Mod}_\Gamma$ 同构于 id.

参考例 4.2.6 易见 $A\text{-}\mathsf{FMod}_\Gamma$ 是加性范畴, 然而它通常不是 Abel 范畴. 另一方面, 命题 4.1.4 表明 $(\mathrm{gr}\,A)\text{-}\mathsf{Mod}_\Gamma$ 是 Abel 范畴, 因而有正合列的概念.

命题 4.2.9 设有 Γ-滤过环 A 连同 Γ-滤过 A-模 M', M, M''. 给定 A-模的短正合列 $0 \to M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \to 0$, 并且要求 f 和 g 都是 $A\text{-}\mathsf{FMod}_\Gamma$ 的态射. 若 $\mathrm{F}^\bullet M'$ 和 $\mathrm{F}^\bullet M''$ 是 $\mathrm{F}^\bullet M$ 的诱导滤过 (定义 4.2.4), 则

$$0 \to \mathrm{gr}\,M' \xrightarrow{\mathrm{gr}\,f} \mathrm{gr}\,M \xrightarrow{\mathrm{gr}\,g} \mathrm{gr}\,M'' \to 0$$

是 $(\mathrm{gr}\,A)\text{-}\mathsf{Mod}_\Gamma$ 中的正合列.

证明 正合性在 $(\mathrm{gr}\,A)\text{-}\mathsf{Mod}_\Gamma$ 中可逐项验证, 问题归结为对所有 $\gamma \in \Gamma$ 检验

$$0 \to \mathrm{gr}^\gamma M' \to \mathrm{gr}^\gamma M \to \mathrm{gr}^\gamma M'' \to 0$$

是加法群的正合列. 鉴于 gr^γ 和诱导滤过的定义, 一切化约为标准的同构定理. □

约定 4.2.10 (升滤过) 在前述定义中, 若以 Γ 的相反序 $\leq^{\mathrm{op}}$ 代替 $\leq$, 得到的滤过结构改用下标记为 $\mathrm{F}_\gamma A$ (或 $\mathrm{F}_\gamma M$), 其中 $\gamma \in \Gamma$. 相较于此前的理论, 唯一差别在于降性质须改为升性质

$$\gamma \leq \eta \implies \mathrm{F}_\gamma A \subset \mathrm{F}_\eta A \quad (\text{或 } \mathrm{F}_\gamma M \subset \mathrm{F}_\eta M\ ).$$

相应地, $\mathrm{gr}\,A$ 和 $\mathrm{gr}\,M$ 的定义分别以下标改写为

$$\mathrm{gr}_\gamma A := \mathrm{F}_\gamma A \Big/ \sum_{\eta<\gamma} \mathrm{F}^\eta A,$$
$$\mathrm{gr}_\gamma M := \mathrm{F}_\gamma M \Big/ \sum_{\eta<\gamma} \mathrm{F}^\eta M.$$

在必须区分的场合, 我们将这种滤过结构称为升滤过.

最常见的是 Γ 为 $\mathbb{Z}_{\geq 0}$, $\mathbb{Z}_{\leq 0}$ 或 $\mathbb{Z}$ 的情形. 此时环 A (或 A-模 M) 上的降滤过表作

$$\cdots \supset \mathrm{F}^p A \supset \mathrm{F}^{p+1} A \supset \cdots \quad (\text{或 } \cdots \supset \mathrm{F}^p M \supset \mathrm{F}^{p+1} M \supset \cdots\ ),$$

而升滤过表作

$$\cdots \subset \mathrm{F}_p A \subset \mathrm{F}_{p+1} A \subset \cdots \quad (\text{或 } \cdots \subset \mathrm{F}_p M \subset \mathrm{F}_{p+1} M \subset \cdots\ ).$$

以下仍考虑降滤过, 尽管所有陈述都有相应的升版本.

例 4.2.11 赋予环 A 例 4.2.3 的平凡 $\mathbb{Z}$-滤过 (或 $\mathbb{Z}_{\geq 0}$-滤过). 易见使一个 A-模 M 成为 $\mathbb{Z}$-滤过 (或 $\mathbb{Z}_{\geq 0}$-滤过) A-模相当于指定一列 A-子模

$$\cdots \supset \mathrm{F}^p M \supset \mathrm{F}^{p+1} M \supset \cdots, \quad p \in \mathbb{Z}\ (\text{或 } p \in \mathbb{Z}_{\geq 0}).$$

推而广之, 若 A 带有满足 $\mathrm{F}^0 A = A$ 的 $\mathbb{Z}$-滤过 (或 $\mathbb{Z}_{\geq 0}$-滤过), 而 M 是 $\mathbb{Z}$-滤过 (或 $\mathbb{Z}_{\geq 0}$-滤过) A-模, 则每个 $\mathrm{F}^p M$ 都是 M 的子模, 这是因为 $\mathrm{F}^0 A \cdot \mathrm{F}^p M \subset \mathrm{F}^p M$; 同理, 每个 $\mathrm{F}^p A$ 都是 A 的理想. 以下是一类重要实例.

例 4.2.12 (I-进滤过) 设 A 为环, I 为 A 的理想. 以下设 $p \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$:

- ◇ A 对 $\mathrm{F}^p A := I^p$ 成为 $\mathbb{Z}_{\geq 0}$-滤过环;
- ◇ 对于任意 A-模 M, 它对 $\mathrm{F}^p M := I^p M$ 成为 $\mathbb{Z}_{\geq 0}$-滤过 A-模.

滤过所需的性质是自明的, 这种滤过统称为 I-进滤过, 主要用于 A 交换的情形.

所有 A-模同态 $\psi : M \to M'$ 都是 I-进滤过 A-模的同态, 因此取 I-进滤过给出函子 $A\text{-Mod} \to A\text{-FMod}_{\mathbb{Z}_{\geq 0}}$. 注意到严格同态所要求的等式 $\psi(I^p M) = \mathrm{im}(\psi) \cap I^p M'$ 对一般的 ψ 和 p 不成立.

引理 4.2.13 以下设 $\Gamma \in \{\mathbb{Z}_{\geq 0}, \mathbb{Z}\}$. 设 $\varphi : A \to A'$ 为 Γ-滤过的环同态, A 分离且穷竭. 若 $\mathrm{gr}\,\varphi$ 单, 则 φ 亦然.

类似地, 设 $\psi : M \to M'$ 为 Γ-滤过 A-模同态, M 分离且穷竭. 若 $\mathrm{gr}\,\psi$ 单, 则 ψ 亦然.

证明 和 [8, 命题 5.1.4 (i)] 完全相同, 自证亦不难. □

4.3 多项式函数

本节内容是 §4.4 的基础. 回忆一则基本事实: 整环上的一个 n 次多项式由它在 $n+1$ 个相异点上的取值完全确定 ($n \geq 0$).

定义 4.3.1 对于函数 $H : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ 和 $\varpi \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$, 如果 H 限制在每个 $\bmod \varpi$ 剩余类上都来自于某个多项式函数 (必唯一), 则称 H 为以 ϖ 为周期的**准多项式**; 此时定义 $\deg H$ 为对每个剩余类上对应的多项式次数取极大值. 如果对于每个剩余类, 对应的多项式系数都属于 $\mathbb{C}$ 的某个子域 K, 则称 H 的系数在 K 上.

周期的选取并非唯一, 比如可用 ϖ 的倍数代 ϖ, 但不难看出次数和系数域的定义不依赖周期选取. 周期 1 的准多项式无非是多项式函数.

定义 4.3.2 如果多项式 $f \in \mathbb{Q}[X]$ 在所有整数点取值皆为整数, 则称 f 为**整值多项式**.

引理 4.3.3 设 $f \in \mathbb{Q}[X]$. 以下陈述等价:

(i) $f = \sum_{d \geq 0} b_d \binom{X+d}{d}$, 其中 $b_d \in \mathbb{Z}$, 至多有限项非零;

(ii) f 是整值多项式;

(iii) $f(k)$ 对于充分大的整数 k 都是整数.

证明 按照 $\delta f := f(X) - f(X-1)$ 定义 $\delta \in \mathrm{End}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}[X])$. 二项式系数的性质蕴涵当 $d \geq 1$ 时

$$\delta \binom{X+d}{d} = \binom{X+d-1}{d-1}.$$

由于多项式 $\binom{X+d}{d}$ 在负整数上取零, 而在 $d = 0$ 时是常数 1, 由上式可递归地推得 $\binom{X+d}{d}$ 是整值多项式. 于是 (i) $\implies$ (ii).

(ii) $\implies$ (iii) 是平凡的. 以下说明 (iii) $\implies$ (i). 基于次数的理由, 所有 $f \in \mathbb{Q}[X]$ 都能展开为有限和 $\sum_{d \geq 0} b_d \binom{X+d}{d}$, 其中 $b_d \in \mathbb{Q}$. 设 $f \neq 0$. 注意到 $f, \delta f, \delta^2 f, \ldots$ 中的最后一个非零多项式是 $b_{\deg f}$, 而且这些多项式对充分大的整数皆取整值, 故 $b_{\deg f} \in \mathbb{Z}$.

命 $f_1 := f - b_{\deg f} \binom{X + \deg f}{\deg f}$, 则 $\deg f_1 < \deg f$, 而且 $k \gg 0 \implies f_1(k) \in \mathbb{Z}$. 递归可得 $b_d \in \mathbb{Z}$ 对所有 d 成立. 此即 (i). □

4.4 Hilbert–Samuel 函数和多项式

选定有限生成加法幺半群 Γ, 并考虑 Γ-分次环 R.

引理 4.4.1 设 Γ 具消去律 (定义 B.1.1), 而 M 为 Γ-分次 R-模. 若 $x \in M$ 是齐次元, 则 (1.1.2) 定义的 $\mathrm{ann}(x)$ 是 R 的分次理想; 此外 (1.1.3) 定义的 $\mathrm{ann}(M)$ 也是 R 的分次理想.

证明 设 $x \in M$ 齐次, 则由 Γ 中的消去律可见 $a \in R$ 满足 $ax = 0$ 当且仅当每个齐次部分 a_γ 皆满足 $a_\gamma x = 0$, 故 $\mathrm{ann}(x)$ 是分次理想. 既然 M 由齐次元生成, 故 $\mathrm{ann}(M) = \bigcap_{x:\text{齐次}} \mathrm{ann}(x)$ 也是分次理想. □

因此 $R/\mathrm{ann}(M)$ 是 Γ-分次环, 而 M 是 Γ-分次 $R/\mathrm{ann}(M)$-模.

定义 4.4.2 设 M 为 Γ-分次 R-模. 对于 $\eta \in \Gamma$, 定义 $M(\eta)$ 为以下 Γ-分次 R-模: 它作为 R-模即 M 本身, 分次结构则是

$$M(\eta)_\gamma = M_{\gamma+\eta}, \quad \gamma \in \Gamma.$$

易见 $M(\eta_1 + \eta_2) = M(\eta_1)(\eta_2)$. 代入 $M = R$, 便得到 Γ-分次 R-模 $R(\eta)$.

从交换群到交换幺半群的忘却函子有称为群化的左伴随函子 $\Gamma \mapsto \Gamma^{\mathrm{grp}}$, 例如 $\mathbb{Z}_{\geq 0}^{\mathrm{grp}} = \mathbb{Z} = \mathbb{Z}^{\mathrm{grp}}$; 详见 §B.1. 以下设 Γ 具消去律 (定义 B.1.1), 则 Γ 自然地嵌入其群化 Γ^{grp} (引理 B.1.2), 从而 R 也是 Γ^{grp}-分次环. 设 M 为 Γ^{grp}-分次 R-模, 则

$$\mathrm{ann}(M(\eta)) = \mathrm{ann}(M).$$

如果 M 作为 R-模有限生成, 则萃取齐次部分后可设 M 由有限多个齐次元 $y_1, \ldots, y_n$ 生成, 其中 $y_i \in M_{\delta_i}$, $\delta_i \in \Gamma^{\mathrm{grp}}$. 指定这样一族齐次生成元相当于指定 Γ-分次 R-模的满同态

$$\begin{aligned} \bigoplus_{i=1}^{n} R(-\delta_i) &\twoheadrightarrow M \\ (\ldots, 0, \underbrace{1_R}_{i\ \text{位置}}, 0, \ldots) &\mapsto y_i; \end{aligned} \tag{4.4.1}$$

这是因为 $1_R \in R_0 = R(-\delta_i)_{\delta_i}$.

引理 4.4.3 给定 Γ^{grp}-分次 R-模 M, 设以下条件成立.

- ◇ Γ 无挠, 具消去律, 且为正;
- ◇ $R_0/\mathrm{ann}(M) \cap R_0$ 是 Artin 环;
- ◇ R 是有限生成 R_0-代数;
- ◇ M 是有限生成 R-模.

则 M_γ 对于所有 $\gamma \in \Gamma^{\mathrm{grp}}$ 都是有限长度 R_0-模.

证明 以 $R/\mathrm{ann}(M)$ 代 R, 原条件不受影响, 问题遂化约到 $\mathrm{ann}(M) = 0$ 的情形. 基于 (4.4.1), 问题化到每个 $M = R(-\eta_i)$; 平移下标, 可进一步将问题化到 $M = R$ 的情形.

不妨设 R 作为 R_0-代数由齐次元 $x_1, \ldots, x_m$ 生成, 其中 $x_i \in R_{\delta_i}$ 而 $\delta_i \neq 0$. 对所有 $\gamma \in \Gamma$, 作为 R_0-模的 R_γ 由所有 "单项式"

$$x_1^{a_1} \cdots x_m^{a_m}, \quad a_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, \quad \sum_{i=1}^{m} a_i \delta_i = \gamma$$

生成. 满足上式的 $(a_1, \ldots, a_m)$ 个数有限. 诚然, 依命题 B.2.2 可取到幺半群同态 $\lambda : \Gamma \to \mathbb{Z}_{\geq 0}$, 使得 $\lambda(\gamma) = 0 \iff \gamma = 0$; 若 $\sum_{i=1}^{m} a_i \delta_i = \gamma$ 则 $\sum_{i=1}^{m} a_i \lambda(\delta_i) = \lambda(\gamma)$, 而 $\lambda(\delta_i) \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ 导致 $0 \leq \sum_{i=1}^{m} a_i \leq \lambda(\gamma)$, 故 $(a_1, \ldots, a_m)$ 的选择有限.

最后, 由于 R_0 是 Artin 环, 它也是有限长度 R_0-模 (定理 3.3.1), 故有限生成 R_0-模必为有限长度. □

对于有限长度 R_0-模, 有相应的长度函数 ℓ_{R_0}, 见定义–定理 3.1.7.

定义 4.4.4 (Hilbert–Samuel 函数) 设 Γ, R 和 M 满足引理 4.4.3 的条件. 相应的 Hilbert–Samuel 函数定义为

$$\chi(M, \cdot) : \Gamma^{\mathrm{grp}} \to \mathbb{Z}_{\geq 0}, \quad \chi(M, \gamma) := \ell_{R_0}(M_\gamma).$$

观察到 $\chi(M(\eta), \gamma) = \chi(M, \eta + \gamma)$. 设有 Γ^{grp}-分次 R-模的正合列

$$0 \to M_1 \to \cdots \to M_k \to 0, \tag{4.4.2}$$

而且 R 连同每个 M_i 都满足引理 4.4.3 的条件, 则有

$$\sum_{i=1}^{k}(-1)^i\chi(M_i,\cdot)=0,$$

这是因为对所有 $\gamma\in\Gamma^{\mathrm{grp}}$ 都有 R_0-模的正合列 $0\to M_{1,\gamma}\to\cdots\to M_{k,\gamma}\to 0$, 而长度函数 ℓ_{R_0} 对短正合列有加性.

例 4.4.5 取 $\Gamma=\mathbb{Z}_{\geq 0}$ 和带有标准分次结构的 $R=M=\Bbbk[X_1,\ldots,X_n]$, 其中 $\Bbbk$ 是域, 则之前的条件悉数成立. 简单的组合学知识表明

$$\chi(M,\gamma)=\dim_{\Bbbk}\Bbbk[X_1,\ldots,X_n]_{\deg=\gamma}=\binom{\gamma+n-1}{n-1}$$

对所有 $\gamma\in\mathbb{Z}$ 成立, 这是关于 γ 的 $n-1$ 次多项式函数.

也可以由生成函数来理解 Hilbert–Samuel 函数, 为此需要采用定义 B.2.3.

定义 4.4.6 (Poincaré 级数) 设 Γ 无挠, 具消去律, 且为正. 设 Γ-分次环 R 和 Γ^{grp}-分次 R-模 M 满足

- ◇ $R_0/\mathrm{ann}(M)\cap R_0$ 是 Artin 环;
- ◇ R 是有限生成 R_0-代数;
- ◇ M 是有限生成 R-模.

相应的 Poincaré 级数定义为形式和

$$P_M:=\sum_{\gamma\in\Gamma^{\mathrm{grp}}}\chi(M,\gamma)\mathbf{X}^\gamma\in\mathbb{Z}(\!(\Gamma)\!).$$

关于 $\mathbb{Z}(\!(\Gamma^{\mathrm{grp}})\!)$, 请见定义 B.2.3.

定义 4.4.6 是合理的: 设 M 有齐次非零生成元 $y_1,\ldots,y_n$, 则仅当 $\gamma\in\Gamma+\sum_{i=1}^n\deg(y_i)\subset\Gamma^{\mathrm{grp}}$ 时才可能有 $M_\gamma\neq 0$. 此外, 定义也直接导致

$$\mathbf{X}^\eta P_{M(\eta)}=P_M. \tag{4.4.3}$$

维持对 Γ 的假设. 对于所有环 $\Bbbk$, 引理 B.2.7 蕴涵 $1-\mathbf{X}^\gamma$ 对所有 $\gamma\in\Gamma\smallsetminus\{0\}$ 都是 $\Bbbk[\![\Gamma]\!]$ 的可逆元, 而引理 B.2.6 确保 $\Bbbk[\Gamma^{\mathrm{grp}}]\subset\Bbbk(\!(\Gamma)\!)$. 在以下结论中取 $\Bbbk=\mathbb{Z}$.

定理 4.4.7 (D. Hilbert, J.-P. Serre) 设 Γ, R 和 M 满足定义 4.4.6 的条件. 取 $n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$ 和齐次元 $x_1,\ldots,x_n\in R\smallsetminus\{0\}$ 使得 $R=R_0[x_1,\ldots,x_n]$. 记 $\eta_i:=\deg x_i\in\Gamma$, 则存在唯一的 $Q\in\mathbb{Z}[\Gamma^{\mathrm{grp}}]$ 使得

$$P_M=\frac{Q}{\prod_{i=1}^n(1-\mathbf{X}^{\eta_i})}$$

在 $\mathbb{Z}(\!(\Gamma)\!)$ 中成立.

证明 唯一性显然. 至于存在性, 对 n 递归地论证如下. 首先以 $R/\mathrm{ann}(M)$ 代 R, 不妨设 R_0 是 Artin 环, 于是 R 是 Noether 环. 若 $n=0$ 则 $R=R_0$, 而 M 的有限生成条件导致至多仅有有限多个 γ 满足 $M_\gamma \neq 0$, 此时 $P_M = Q \in \mathbb{Z}[\Gamma^{\mathrm{grp}}]$.

以下设 $n \geq 1$. 选定 $1 \leq i \leq n$. 命

$$Z := \ker\left[M \xrightarrow{x_i \cdot} M(\eta_i)\right], \quad Y := \mathrm{coker}\left[M(-\eta_i) \xrightarrow{x_i \cdot} M\right];$$

它们仍是有限生成 Γ^{grp}-分次 R-模, 且有 Γ^{grp}-分次 R-模的正合列

$$0 \to Z \to M \xrightarrow{x_i \cdot} M(\eta_i) \to Y(\eta_i) \to 0. \tag{4.4.4}$$

基于 $\chi(M, \cdot)$ 对正合列的加性,

$$P_{M(\eta_i)} - P_M = P_{Y(\eta_i)} - P_Z \in \mathbb{Z}(\!(\Gamma^{\mathrm{grp}})\!).$$

两边同乘以 $\mathbf{X}^{\eta_i}$, 则根据 (4.4.3) 可得

$$(1 - \mathbf{X}^{\eta_i}) P_M = P_Y - \mathbf{X}^{\eta_i} P_Z.$$

将上式两边同乘以 $\prod_{j \neq i}(1 - \mathbf{X}^{\eta_j})$. 由于 x_i 零化 Y 和 Z, 以 $R/(x_i)$ 代 R 并应用递归假设可知右式给出 $\mathbb{Z}[\Gamma^{\mathrm{grp}}]$ 的元素, 此即所求之 Q. $\square$

以下专注于 $\Gamma = \mathbb{Z}_{\geq 0}$ 的情形, 此时 $\Gamma^{\mathrm{grp}} = \mathbb{Z}$ 而

$$\Bbbk[\Gamma] = \Bbbk[X], \quad \Bbbk[\![\Gamma]\!] = \Bbbk[\![X]\!], \quad \Bbbk[\Gamma^{\mathrm{grp}}] = \Bbbk[X, X^{-1}], \quad \Bbbk(\!(\Gamma)\!) = \Bbbk(\!(X)\!),$$

其中 X 代表变元.

定理 4.4.8 设 R 为 $\mathbb{Z}_{\geq 0}$-分次环, M 为 $\mathbb{Z}$-分次 R-模, 要求:

- ◇ $R_0/\mathrm{ann}(M) \cap R_0$ 是 Artin 环;
- ◇ $R = R_0[x_1, \ldots, x_n]$, 其中 $x_1, \ldots, x_n \in R \smallsetminus \{0\}$ 为齐次元;
- ◇ M 为有限生成 R-模.

命 $e := \mathrm{lcm}(\deg x_1, \ldots, \deg x_n)$. 此时存在唯一的周期 e 准多项式 H_M (相关概念见定义 4.3.1), 使得

$$\gamma \gg 0 \implies \chi(M, \gamma) = H_M(\gamma).$$

此外, H_M 的系数在 $\mathbb{Q}$ 上而 $\deg H_M \leq n-1$. 称 H_M 为 M 的 **Hilbert 准多项式**.

证明 唯一性显然. 对于存在性, 重拾定理 4.4.7 的论证如下. 对 n 递归. 首先以 $R/\mathrm{ann}(M)$ 代 R, 不妨设 R_0 是 Artin 环, 于是 R 是 Noether 环. 若 $n=0$ 则 $R=R_0$, 而有限生成条件导致 $\gamma \gg 0 \implies M_\gamma = 0$, 此时取 H_M 为零多项式, $\deg H_M = -\infty$.

以下设 $n \geq 1$. 对所有 $1 \leq i \leq n$ 命 $\eta_i := \deg x_i$. 从 (4.4.4) 得到

$$\chi(M, \gamma + \eta_i) - \chi(M, \gamma) = \chi(Y, \gamma + \eta_i) - \chi(Z, \gamma), \quad \gamma \in \mathbb{Z}.$$

由于 x_i 零化 Y 和 Z, 以 $R/(x_i)$ 代 R 并应用递归假设可知右式在 $\gamma \gg 0$ 时是周期为 $\operatorname{lcm}(\ldots, \widehat{\eta_i}, \ldots)$ (符号 $\widehat{\cdot}$ 代表省略该项), 次数 $\leq n-2$ 的准多项式, 系数在 $\mathbb{Q}$ 上. 对所有 $1 \leq i \leq n$ 考虑上述等式, 相应的差分方程和初等数论表明: 当 $\gamma \gg 0$ 且限制在一个 $\bmod e$ 同余类中时, $\gamma \mapsto \chi(M, \gamma)$ 是一个次数 $\leq n-1$ 的多项式函数, 系数在 $\mathbb{Q}$ 上. □

推论 4.4.9 在定理 4.4.8 的场景中, 进一步要求 $\deg x_i = 1$ 对所有 $1 \leq i \leq n$ 成立; 换言之, 我们要求 R 由有限多个 1 次齐次元生成.

(i) 存在唯一的 $d \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ 和 $Q_0 \in \mathbb{Z}[X, X^{-1}]$ 使得 $Q_0(1) \neq 0$ 而 $P_M = \dfrac{Q_0}{(1-X)^d}$.

(ii) 定理 4.4.8 中的 H_M 是整值多项式 (定义 4.3.2).

(iii) 当 $d = 0$ 时 $H_M = 0$; 当 $d \geq 1$ 时命 $e(M) := Q_0(1)$, 则 $e(M) \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ 而

$$H_M = \frac{e(M) X^{d-1}}{(d-1)!} + \text{低次项}.$$

证明 对于 (i), 定理 4.4.7 及条件给出 $Q := (1-X)^n P_M \in \mathbb{Z}[X, X^{-1}]$. 通分后得到唯一的 $0 \leq d \leq n$ 和 $Q_0 \in \mathbb{Z}[X, X^{-1}]$ 使得 $Q_0(1) \neq 0$ 而 $P_M = \frac{Q_0}{(1-X)^d}$.

对于 (ii), 定理 4.4.8 蕴涵 H_M 是多项式. 由于 $k \gg 0$ 时 $H_M(k) = \chi(M, k) \in \mathbb{Z}$, 引理 4.3.3 蕴涵 H_M 是整值多项式.

对于 (iii), 设有 $d = 0$, 则 $P_M \in \mathbb{Z}[X, X^{-1}]$ 导致 $k \gg 0$ 时 $H_M(k) = \chi(M, k) = 0$, 故 $H_M = 0$.

接着设 $d \geq 1$. 首先用适当的 $M(\eta)$ 代 M, 其中 $\eta \in \mathbb{Z}$, 通过 (4.4.3) 可确保 $Q_0 \in \mathbb{Z}[X]$; 这不改变 d 和 $Q_0(1)$, 同时 H_M 只差一个平移, 不影响其最高次项. 接着在 $d \geq 1$ 的前提下将 Q_0 分解为有限和 $\sum_{h \geq 0} a_h (1-X)^h$, 则

$$P_M = \frac{a_0}{(1-X)^d} + \frac{a_1}{(1-X)^{d-1}} + \cdots.$$

需要以下初等事实: 对所有 $h \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ 都有形式幂级数的等式

$$\frac{1}{(1-X)^h} = \sum_{k \geq 0} \binom{k+h-1}{h-1} X^k;$$

这点容易以形式求导或由二项式系数的性质递归地证明.

综上, X^k 在形式幂级数 P_M 与 $\frac{a_0}{(1-X)^d}$ 中的系数都是关于 k 的多项式函数, 而且两者对 k 的最高次项相同. 前一个多项式函数无非是 $k \mapsto \chi(M, k)$, 后一多项式函数则是

$$k \mapsto a_0 \binom{k+d-1}{d-1} = \frac{a_0 k^{d-1}}{(d-1)!} + \text{关于 } k \text{ 的低次项},$$

而 $a_0 = Q_0(1) \in \mathbb{Z} \smallsetminus \{0\}$. 因为 $\chi(M,k)$ 恒非负, 故 $e(M) := a_0 \geq 1$. 明所欲证. □

定义 4.4.10 在推论 4.4.9 的场景中, 称 H_M 为 M 的 **Hilbert–Samuel 多项式**.

4.5 拉开环和 Rees 环

回忆 §4.2 探讨的滤过结构. 本节的滤过默认为降滤过, 开头部分处理的环容许为非交换环.

定义 4.5.1 (Rees 环和模: 一般情形) 设 $(\Gamma, \leq)$ 为偏序加法幺半群, A 为 Γ-滤过环; 此处不要求 A 交换, 记它带有的滤过为 $\{\mathrm{F}^\gamma A\}_{\gamma\in\Gamma}$. 相应的 Rees 环 $\mathcal{R}_{\mathrm{F}}(A)$ 定义为以下的 Γ-分次环: 作为加法群,

$$\mathcal{R}_{\mathrm{F}}(A) := \bigoplus_{\gamma\in\Gamma} \mathrm{F}^\gamma A,$$

直和项之间的乘法来自 A 的乘法

$$\begin{array}{ccc} A \times A & \longrightarrow & A \\ \cup & & \cup \\ \mathrm{F}^\gamma A \times \mathrm{F}^\eta A & \longrightarrow & \mathrm{F}^{\gamma+\eta} A, \end{array}$$

按双线性延拓到 $\mathcal{R}_{\mathrm{F}}(A)$, 而幺元是 $1_A \in \mathrm{F}^0 A$.

对于 Γ-滤过左 A-模 M, 也可以类似地定义 Γ-分次 A-模

$$\mathcal{R}_{\mathrm{F}}(M) := \bigoplus_{\gamma\in\Gamma} \mathrm{F}^\gamma M,$$

使得 $\mathcal{R}_{\mathrm{F}}(A)$ 的纯量乘法来自 $A \times M \to M$ 限制而来的 $\mathrm{F}^\gamma A \times \mathrm{F}^\eta M \to \mathrm{F}^{\gamma+\eta} M$. 右模的情况完全类似.

上述构造对 A 和 M 显然具有函子性. 以下结论也是明白的.

定义–命题 4.5.2 对如上的 A 和 M, 定义

$$\mathcal{R}_{\mathrm{F}}^{>}(A) := \bigoplus_{\gamma\in\Gamma} \left(\sum_{\eta>\gamma} \mathrm{F}^\eta A \right) \subset \mathcal{R}_{\mathrm{F}}(A),$$

$$\mathcal{R}_{\mathrm{F}}^{>}(M) := \bigoplus_{\gamma\in\Gamma} \left(\sum_{\eta>\gamma} \mathrm{F}^\eta M \right) \subset \mathcal{R}_{\mathrm{F}}(M),$$

则 $\mathcal{R}_{\mathrm{F}}^{>}(A)$ 是 $\mathcal{R}_{\mathrm{F}}(A)$ 的分次双边理想, $\mathcal{R}_{\mathrm{F}}^{>}(M)$ 是 $\mathcal{R}_{\mathrm{F}}(M)$ 的分次子模, 它们满足

$$\mathcal{R}_{\mathrm{F}}^{>}(A) \cdot \mathcal{R}_{\mathrm{F}}(M) \subset \mathcal{R}_{\mathrm{F}}^{>}(M),$$

且有分次环的自然同构

$$\mathcal{R}_{\mathrm{F}}(A)/\mathcal{R}_{\mathrm{F}}^{>}(A) \xrightarrow{\sim} \mathrm{gr}_{\mathrm{F}}(A),$$

以及相应的分次模同构

$$\mathcal{R}_{\mathrm{F}}(M)/\mathcal{R}_{\mathrm{F}}^{\geq}(M) \xrightarrow{\sim} \mathrm{gr}_{\mathrm{F}}(M).$$

约定 4.5.3 若无另外说明，本节后续仅考虑 $\Gamma := \mathbb{Z}_{\geq 0}$ 给出的降滤过，统称为滤过；后续出现的环默认为交换环.

任何滤过环 R (或 R-模 M) 也是 $\mathbb{Z}$-滤过的，方法是在 $p < 0$ 时规定 $\mathrm{F}^p R := R$ (或 $\mathrm{F}^p M = M$). 这就为 Rees 环或 Rees 模的定义提供了两种选项，术语因而有所差异.

定义 4.5.4 (拉开环和 Rees 环) 设 R 为滤过环.

- 在定义 4.5.1 中代入 $\Gamma = \mathbb{Z}_{\geq 0}$，得到的 $\mathbb{Z}_{\geq 0}$-分次环记为

$$\mathrm{Bl}_{\mathrm{F}}(R) := \bigoplus_{n \geq 0} \mathrm{F}^n R,$$

  称为 R 的拉开环，它有分次理想

$$\mathrm{Bl}_{\mathrm{F}}^{\geq}(R) := \bigoplus_{n \geq 0} \mathrm{F}^{n+1} R.$$

- 将 R 按照 $p < 0 \implies \mathrm{F}^p R = R$ 作成 $\mathbb{Z}$-滤过环，在定义 4.5.1 中代入 $\Gamma = \mathbb{Z}$，得到的 $\mathbb{Z}$-分次环记为

$$\mathcal{R}_{\mathrm{F}}(R) := \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \mathrm{F}^n R$$

  称为 R 的 Rees 环.

在许多常见场景中 $R = \mathrm{F}^0 R$，换言之 R 的滤过穷竭；此时 R 嵌入为 $\mathrm{Bl}_{\mathrm{F}}(R)$ (或 $\mathcal{R}_{\mathrm{F}}(R)$) 的子环，集中在零次部分，故可以合理地称 $\mathrm{Bl}_{\mathrm{F}}(R)$ (或 $\mathcal{R}_{\mathrm{F}}(R)$) 为 R 的拉开 (或 Rees) 代数.

定义 4.5.5 设 R 为滤过环，M 为滤过模. 可以用类似方法定义:

- 分次 $\mathrm{Bl}_{\mathrm{F}}(R)$-模

$$\mathrm{Bl}_{\mathrm{F}}(M) := \bigoplus_{n \geq 0} \mathrm{F}^n M,$$

  称为 M 的拉开模，它有分次子模

$$\mathrm{Bl}_{\mathrm{F}}^{\geq}(M) := \bigoplus_{n \geq 0} \mathrm{F}^{n+1} M.$$

- 分次 $\mathcal{R}_{\mathrm{F}}(R)$-模

$$\mathcal{R}_{\mathrm{F}}(M) := \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \mathrm{F}^n M,$$

  称为 M 的 Rees 模，其中规定 $p < 0 \implies \mathrm{F}^p M := 0$.

因此定义–命题 4.5.2 给出 $\mathrm{Bl}_{\mathrm{F}}^{\gtrless}(R)\cdot\mathrm{Bl}_{\mathrm{F}}(M)\subset\mathrm{Bl}_{\mathrm{F}}^{\gtrless}(M)$, 以及分次环和分次模的同构

$$\begin{aligned}\mathrm{Bl}_{\mathrm{F}}(R)/\mathrm{Bl}_{\mathrm{F}}^{\gtrless}(R)&\xrightarrow{\sim}\mathrm{gr}_{\mathrm{F}}(R),\\ \mathrm{Bl}_{\mathrm{F}}(M)/\mathrm{Bl}_{\mathrm{F}}^{\gtrless}(M)&\xrightarrow{\sim}\mathrm{gr}_{\mathrm{F}}(M).\end{aligned}\tag{4.5.1}$$

不致混淆时, 我们将省略关于滤过的下标 F, 采取如 $\mathcal{R}(\cdots)$, $\mathrm{Bl}(\cdots)$ 和 $\mathrm{gr}(\cdots)$ 的记法.

一种方便的观点是引入变元 X, 作等同

$$\begin{aligned}\mathrm{Bl}_{\mathrm{F}}(R)&=\bigoplus_{n=0}^{\infty}(\mathrm{F}^nR)X^n\subset R[X],\\ \mathcal{R}_{\mathrm{F}}(R)&=\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}}(\mathrm{F}^nR)X^n\subset R[X,X^{-1}],\end{aligned}\tag{4.5.2}$$

其中的 $\subset$ 都是分次子环的包含; 在 $\mathrm{F}^0R=R$ 的场合, 以上包含关系进一步给出分次 R-子代数.

构造对于滤过 R-模 M 也有相应版本. 照例对 $p<0$ 规定 $\mathrm{F}^pM=M$. 任给变元 X, 引入符号

$$\begin{aligned}M[X]&:=M\underset{R}{\otimes}R[X]=\bigoplus_{n=0}^{\infty}M\otimes X^n,\\ M[X,X^{-1}]&:=M\underset{R}{\otimes}R[X,X^{-1}]=\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}}M\otimes X^n.\end{aligned}$$

拉开模和 Rees 模因而分别等同于

$$\begin{aligned}\mathrm{Bl}_{\mathrm{F}}(M)&=\bigoplus_{n=0}^{\infty}(\mathrm{F}^nM)\otimes X^n\subset M[X],\\ \mathcal{R}_{\mathrm{F}}(M)&=\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}}(\mathrm{F}^nM)\otimes X^n\subset M[X,X^{-1}].\end{aligned}$$

在 $\mathrm{F}^0R=R$ 的场合, 以上包含关系进一步给出分次 R-子模.

记 $T:=X^{-1}$. 这是 $\mathcal{R}_{\mathrm{F}}(R)$ 的 -1 次齐次元, 从而

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_{\mathrm{F}}(R)&=R[T]\oplus\bigoplus_{n\geq 0}(\mathrm{F}^nR)T^{-n}\subset R[T,T^{-1}],\\ \mathcal{R}_{\mathrm{F}}(M)&=M[T]\oplus\bigoplus_{n\geq 0}(\mathrm{F}^nM)\otimes T^{-n}\subset M[T,T^{-1}],\end{aligned}\tag{4.5.3}$$

请读者检验当 $\mathrm{F}^0R=R$ 时, $\mathcal{R}_{\mathrm{F}}(R)$ 和 $\mathcal{R}_{\mathrm{F}}(M)$ 分别是 $R[T,T^{-1}]$ 和 $M[T,T^{-1}]$ 的 $R[T]$-子模.

命题 4.5.6 (Rees 代数作为形变) 设 R 为滤过环, M 为滤过 R-模.

(i) 元素 $T:=X^{-1}$ 不是 $\mathcal{R}_{\mathrm{F}}(R)$ 或 $\mathcal{R}_{\mathrm{F}}(M)$ 的零因子 (定义 1.1.7).

(ii) 有分次环的典范同构
$$\mathcal{R}_{\mathrm{F}}(R)/(T) \simeq \mathrm{gr}_{\mathrm{F}}(R)$$
以及相匹配的分次模同构
$$\mathcal{R}_{\mathrm{F}}(M)/T\mathcal{R}_{\mathrm{F}}(M) \simeq \mathrm{gr}_{\mathrm{F}}(M),$$
两者在 $\mathrm{F}^0 R = R$ 时都是 R-线性的.

(iii) 考虑局部化 $\mathcal{R}_{\mathrm{F}}(R)[T^{-1}]$, 则有典范环同构
$$\mathcal{R}_{\mathrm{F}}(R)[T^{-1}] \xrightarrow{\sim} R[T, T^{-1}],$$
它对所有 $p \in \mathbb{Z}$ 和 $q \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ 限制为包含映射 $\mathrm{F}^p R \hookrightarrow R$ 诱导的 $((\mathrm{F}^p R)T^p)T^{-q} \to RT^{p-q}$; 相应地, 也有模同构
$$\mathcal{R}_{\mathrm{F}}(M)[T^{-1}] \simeq M[T, T^{-1}].$$

证明 以下只讨论 $\mathcal{R}_{\mathrm{F}}(R)$ 的情形; 涉及 M 的论证无异.

对于 (i), T 的乘法作用无非是包含映射 $\mathrm{F}^p R \hookrightarrow \mathrm{F}^{p-1}R$, 其中 $p \in \mathbb{Z}$.

对于 (ii), 暂且将 R 上的 $\mathbb{Z}$-滤过记为 F', 以严格区别于原有的 $\mathbb{Z}_{\geq 0}$-滤过 F. 由于 T 是次数为 -1 的齐次元, 结合上一点可得 $\mathbb{Z}$-分次理想的等式
$$(T) = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} (\mathrm{F}')^{n+1} R = \mathcal{R}_{\mathrm{F}'}^{\geq 0}(R),$$
右式如定义–命题 4.5.2. 根据该处结论, 相应地有分次代数的等式
$$\mathcal{R}_{\mathrm{F}'}(R)/(T) = \mathrm{gr}_{\mathrm{F}'}(R).$$
但从定义立见 $\mathrm{gr}_{\mathrm{F}'}(R)$ 不过是对 $\mathrm{gr}_{\mathrm{F}}(R)$ 在负次数补零所得出的分次代数, 两者实质无异. 关于 R-线性的断言自明.

考虑 (iii), 局部化正合, 故 $\mathcal{R}_{\mathrm{F}}(R)[T^{-1}]$ 可视同于 $R[T, T^{-1}][T^{-1}] = R[T, T^{-1}]$ 的子环, 它是向 $\mathcal{R}_{\mathrm{F}}(R)$ 添入 T^{-1} 的产物; 由 (4.5.3) 立见这无非 $R[T, T^{-1}]$. 映射的给法应当是自明的. □

注记 4.5.7 给定环 R 及其理想 I. 若 $\mathrm{F}^\bullet R$ (或 $\mathrm{F}^\bullet M$) 是例 4.2.12 的 I-进滤过, 特别地 $\mathrm{F}^0 R = R$, 则在上述构造中另记
$$\begin{aligned} \mathrm{Bl}_I(R) &:= \mathrm{Bl}_{\mathrm{F}}(R) \quad (\text{或 } \mathrm{Bl}_I(M) := \mathrm{Bl}_{\mathrm{F}}(M)), \\ \mathcal{R}_I(R) &:= \mathcal{R}_{\mathrm{F}}(R) \quad (\text{或 } \mathcal{R}_I(M) := \mathcal{R}_{\mathrm{F}}(M)). \end{aligned}$$
引入变元 X; 鉴于 (4.5.2) 的描述, 记法
$$\mathrm{Bl}_I(R) = R[IX], \quad \mathcal{R}_I(R) = R[X^{-1}, IX]$$

是合理且便利的. 此外,

$$\mathrm{Bl}_I^{\geq}(R) = I\mathrm{Bl}_I(R), \quad \mathrm{Bl}_I^{\geq}(M) = I\mathrm{Bl}_I(M).$$

在 I-进滤过的情形, 拉开代数的构造与代数几何学中的 "拉开" 操作密切相关, 这是拉开一词的缘由.

Rees 代数在 I-进滤过的情形同样有几何意义, 细说如下.

注记 4.5.8 (向法锥形变) 回忆命题 1.3.7, 可见在 $\mathrm{F}^0 R = R$ 的前提下, 命题 4.5.6 (ii) 的同构相当于说

$$\mathcal{R}_{\mathrm{F}}(R) \underset{R[T]}{\otimes} \frac{R[T]}{(T)} \simeq \mathrm{gr}_{\mathrm{F}}(R), \quad \mathcal{R}_{\mathrm{F}}(M) \underset{R[T]}{\otimes} \frac{R[T]}{(T)} \simeq \mathrm{gr}_{\mathrm{F}}(M).$$

另一方面, 对于任意 $u \in R^\times$, 基于同构

$$\begin{tikzcd} R[T]/(T-u) \arrow[r, "\sim"] & R & R[T,T^{-1}]/(T-u) \arrow[l, "\sim"'] \\ T \arrow[r, mapsto] & u & \\ & u^{\pm 1} & T^{\pm 1}, \arrow[l, mapsto] \end{tikzcd}$$

命题 1.3.5 连同命题 4.5.6 (iii) 的同构表明

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{\mathrm{F}}(R) \underset{R[T]}{\otimes} \frac{R[T]}{(T-u)} &\simeq \mathcal{R}_{\mathrm{F}}(R) \underset{R[T]}{\otimes} R[T,T^{-1}] \underset{R[T,T^{-1}]}{\otimes} \frac{R[T,T^{-1}]}{(T-u)} \\ &\simeq R[T,T^{-1}] \underset{R[T,T^{-1}]}{\otimes} \frac{R[T,T^{-1}]}{(T-u)} \simeq R; \end{aligned}$$

同理, $\mathcal{R}_{\mathrm{F}}(M) \underset{R[T]}{\otimes} \frac{R[T]}{(T-u)} \simeq M$. 用代数几何的术语来说, Rees 的构造表征 R (或 M) 的一族形变, 以 $t \in R$ 为参数; 形变在可逆的 t 处是原来的 R (或 M), 而在 $t = 0_R$ 处是 $\mathrm{gr}_{\mathrm{F}} R$ (或 $\mathrm{gr}_{\mathrm{F}} M$). 在 I-进滤过的情形, R/I-代数 $\mathrm{gr}\, R$ 在几何上对应于 $I \subset R$ (或 $V(I) \subset \mathrm{Spec}(R)$) 的 "法锥".

例 4.5.9 以下计算拉开环的一类重要例子. 考虑交换环 $\Bbbk$ 上的 n 元多项式代数 $R := \Bbbk[T_1, \ldots, T_n]$; 对 R 的理想 $I := (T_1, \ldots, T_m)$ 定义 R-代数的同态

$$u : R[X_1, \ldots, X_m] \to \mathrm{Bl}_I(R) = \bigoplus_{r \geq 0} I^r,$$

使得 $u(X_i)$ 是 T_i 在 $\mathrm{Bl}_I(R)_1 = I$ 中的像 $(1 \leq i \leq n)$. 显然 u 满, 故诱导分次 R-代数的同构

$$\overline{u} : R[X_1, \ldots, X_n]/\ker(u) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Bl}_I(R).$$

命 J 为所有 $T_iX_j - T_jX_i$ 生成之理想 $(1 \leq i < j \leq m)$. 以下说明 $\ker(u) = J$, 这将为 $\mathrm{Bl}_I(R)$ 提供一则具体描述.

要点在于证 $\ker(u) \subset J$. 第一步是以 $\Bbbk[T_{m+1}, \ldots, T_n]$ 代 $\Bbbk$, 简化到 $m = n$ 的情形. 接着考虑 $R[X_1, \ldots, X_n]$ 中的如下元素:

$$\begin{gathered} P = T_{i_1}^{a_1} \cdots T_{i_k}^{a_k} X_{i_{k+1}}^{a_{k+1}} \cdots X_{i_K}^{a_K}, \quad 0 \leq k \leq K, \\ a_1, \ldots, a_K \in \mathbb{Z}_{\geq 1}, \quad 1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq i_{k+1} < \cdots < i_K \leq n; \end{gathered} \tag{4.5.4}$$

另规定 $K = 0$ 时 $P = 1$. 将数列 $i_1, \ldots$ 和 $a_1, \ldots$ 分别记为 $\mathbf{i}$ 和 $\mathbf{a}$. 兹断言 P (或 $\mathbf{i}$ 和 $\mathbf{a}$) 由 $u(P)$ 唯一确定.

诚然, 不论分次则 $u(P) = \prod_{j=1}^{K} T_{i_j}^{a_j}$; 当 $i_k = i_{k+1}$ 时将它们在 $\mathbf{i}$ 中并项, 相应地将 $\mathbf{a}$ 中的 a_k, a_{k+1} 替换为 $a_k + a_{k+1}$, 得到新数列 $\mathbf{i}'$ 和 $\mathbf{a}'$, 则 $u(P)$ 唯一确定 $\mathbf{i}'$ 和 $\mathbf{a}'$. 为了进一步确定 k 和 a_k, 从而确定 $\mathbf{i}$ 和 $\mathbf{a}$, 讨论 $u(P)$ 在 $\mathrm{Bl}_I(R)$ 中所处的分次即可 (留意到 $a_k \geq 1$).

记 N 为 (4.5.4) 中的元素生成的 $\Bbbk$-子模. 上一步表明 $u|_N$ 为单射. 若能说明 $R[X_1, \ldots, X_n] \subset N + J$, 便容易推得 $\ker(u) \subset J$. 将 $R[X_1, \ldots, X_n]$ 中的单项式以多重指标符号记如 $T^{\mathbf{a}} X^{\mathbf{b}}$, 其中 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ 都是长度 n 的非负整数列. 以下说明存在满足 (4.5.4) 的 P 使得 $T^{\mathbf{a}} X^{\mathbf{b}} \equiv P \mod J$.

记长度 n 的数列 $\mathbf{d}$ 中初次 (或末次) 出现非零元的位置为 $i(\mathbf{d})$ (或 $j(\mathbf{d})$); 若全为 0 则规定该位置为 0 (或 $n+1$). 取 $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ 使得 $T^{\mathbf{a}} X^{\mathbf{b}} \equiv T^{\mathbf{u}} X^{\mathbf{v}} \mod J$, 而且 $j(\mathbf{u}) - i(\mathbf{v})$ 尽量小. 若 $j := j(\mathbf{u}) \leq i(\mathbf{v}) =: i$, 则 $T^{\mathbf{u}} X^{\mathbf{v}}$ 已是 (4.5.4) 的形式. 若 $j > i$, 则可依 $T_i X_j - T_j X_i \in J$ 作替换, 在该陪集中得到使 $j - i$ 更小的单项式, 矛盾.

4.6 Artin–Rees 引理及其应用

接续约定 4.5.3 关于 $\mathbb{Z}_{\geq 0}$-降滤过的惯例. 以下设 R 为环, I 为 R 的理想. 赋 R 以例 4.2.12 的 I-进滤过. 定义 4.2.8 给出相应的 $\mathbb{Z}_{\geq 0}$-分次环, 记为 $\mathrm{gr}_I(R)$.

本节的理论在 $I = R$ 时平凡, 无妨设 $I \subsetneq R$.

定义 4.6.1 (好滤过) 赋 R 以 I-进滤过. 若滤过 R-模 M 满足:

- $\mathrm{F}^0 M = M$, 亦即 M 的滤过穷竭,
- 每个 $\mathrm{F}^p M$ 都是有限生成 R-模,
- 存在 $p_0 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ 使得
$$p \geq p_0 \implies I \cdot \mathrm{F}^p M = \mathrm{F}^{p+1} M,$$

则称 M 上的滤过为 ***I*-好滤过**, 或简称好滤过.

滤过模的定义 4.2.1 蕴涵 $I \cdot \mathrm{F}^p M \subset \mathrm{F}^{p+1} M$ 总是成立, 因此 $\mathrm{F}^0 M = M$ 蕴涵 $I^p M \subset \mathrm{F}^p M$. 当 I 和 M 皆有限生成时, 例 4.2.12 的 I-进滤过总是好滤过.

好滤过可以由对应的拉开模 (定义 4.5.5) 来刻画.

引理 4.6.2 赋环 R 以 I-进滤过. 设 M 为滤过 R-模, 以下陈述等价:

(i) $\mathrm{Bl}_{\mathrm{F}}(M)$ 是有限生成 $\mathrm{Bl}_I(R)$-模;

(ii) M 的滤过是 I-好的.

当以上任一条件成立时, $\mathrm{gr}_{\mathrm{F}}(M)$ 是有限生成 $\mathrm{gr}_I(R)$-模.

证明 (i) $\implies$ (ii): 依 §4.5 惯例, 视 $\mathrm{Bl}_I(R)$ 为 $R[X]$ 的子环, 视 $\mathrm{Bl}_{\mathrm{F}}(M)$ 为 $M[X]$ 的 R-子模. 取 $\mathrm{Bl}_{\mathrm{F}}(M)$ 的非零齐次生成元 $x_1, \ldots, x_n$, 其次数分别记为 $d_1, \ldots, d_n$. 对于所有 $p \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, 易见 $\mathrm{F}^p M$ 作为 R-模由有限子集 $\{x_i : d_i \leq p\}$ 生成.

另一方面, 由于 $\mathrm{Bl}_{\mathrm{F}}(M)$ 是分次 $\mathrm{Bl}_I(R)$-模, 考虑次数易见

$$p \geq \max\{\deg x_1, \ldots, \deg x_n\} \implies (\mathrm{F}^{p+1}M) \otimes X^{p+1} = (I \otimes X) \cdot (\mathrm{F}^p M \otimes X),$$

右式也相当于 M 中的等式 $\mathrm{F}^{p+1}M = I \cdot \mathrm{F}^p M$.

(ii) $\implies$ (i): 设有符合定义 4.6.1 的 p_0, 则分次 $\mathrm{Bl}_I(M)$-模 $\mathrm{Bl}_{\mathrm{F}}(M)$ 由次数 $\leq p_0$ 的部分生成. 然而 $\mathrm{F}^p M$ 作为 $R = \mathrm{Bl}_I(R)_0$ 上的模也是有限生成的 $(0 \leq p \leq p_0)$.

最后, (4.5.1) 说明当条件 (i) 成立时, $\mathrm{gr}_{\mathrm{F}}(M)$ 是有限生成 $\mathrm{gr}_{\mathrm{F}}(R)$-模, 其生成元可以取为 $\mathrm{Bl}_{\mathrm{F}}(M)$ 的任一族齐次生成元的像. □

在 R 为 Noether 环而 M 有限生成的前提下, 我们希望对 R-模 M 研究 $\mathrm{gr}_{\mathrm{F}}(M)$, 其中 $\mathrm{F}^\bullet M$ 是 M 上的 I-进滤过, 或至少是 I-好滤过. 为了从命题 4.2.9 获取关于 $\mathrm{gr}_{\mathrm{F}}(M)$ 的短正合列, 须赋予 M 的任意子模 M' 和商模 M'' 诱导滤过 (定义 4.2.4). 若 $\mathrm{F}^\bullet M$ 是 I-进 (或 I-好) 滤过, 则 M'' 上的诱导滤过亦然; 问题对子模 M' 则稍加复杂, 它导向定理 4.6.4, 又称 Artin–Rees 引理. 首先是一些准备工作.

引理 4.6.3 若 R 是 Noether 环, 则 $\mathrm{Bl}_I(R)$ 和 $\mathrm{gr}_I(R)$ 分别是 R 和 $\mathrm{gr}_I^0(R) = R/I$ 上的有限生成代数, 生成元皆可取为 1 次齐次元; 此时 $\mathrm{Bl}_I(R)$ 和 $\mathrm{gr}_I(R)$ 皆是 Noether 环.

证明 取理想 I 的生成元 $a_1, \ldots, a_n$. 引入变元 X, 则可作等同

$$\mathrm{Bl}_I(R) = R[a_1 X, \ldots, a_n X] \subset R[X],$$

因此 $a_1 X, \ldots, a_n X$ 对应的 1 次齐次元生成 R-代数 $\mathrm{Bl}_I(R)$, Hilbert 定理 3.2.4 蕴涵 $\mathrm{Bl}_I(R)$ 是 Noether 环.

理想 $\mathrm{Bl}_I^{>}(R)$ 由 1 次齐次元 $a_1 X, \ldots, a_n X$ 生成. 应用 (4.5.1) 取商即得关于 $\mathrm{gr}_I(R)$ 的部分. □

定理 4.6.4 (Artin–Rees 引理) 设 R 为 Noether 环, 带有 I-进滤过. 设 M 为有限生成 R-模, N 为 M 的子模, 则 M 的 I-进滤过在 N 上所诱导的滤过 (定义 4.2.4) 是 I-好的.

证明 诱导滤过的定义是 $\mathrm{F}^p N = N \cap I^p M$, 相应的 $\mathrm{Bl}_I(R)$-模 $\mathrm{Bl}_{\mathrm{F}}(N)$ 是 $\mathrm{Bl}_I(M)$ 的子模.

由于 M 的 I-进滤过当然是 I-好的, 引理 4.6.2 蕴涵 $\mathrm{Bl}_I(M)$ 是有限生成 $\mathrm{Bl}_I(R)$-模. 引理 4.6.3 表明 $\mathrm{Bl}_I(R)$ 是 Noether 环, 故 $\mathrm{Bl}_I(M)$ 的子模 $\mathrm{Bl}_{\mathrm{F}}(N)$ 也有限生成. 再次应用引理 4.6.2 遂知 $\mathrm{F}^\bullet N$ 是 I-好滤过. □

Artin–Rees 引理的第一则应用是为 Krull 交定理 3.7.1 提供简短证明.

证明 (定理 3.7.1 另证) 取 I 和 M 如定理 3.7.1. 赋 M 以 I-进滤过, 命 $N := \bigcap_{p\geq 0} I^p M$. 显然 $N = N \cap I^p M$ 对所有 $p \geq 0$ 成立. 定理 4.6.4 确保 N 的诱导滤过是 I-好的, 换言之当 $p \gg 0$ 时

$$N = N \cap I^{p+1} M = I(N \cap I^p M) = IN.$$

这就导致 $N = IN$. 其余断言的证明仍归于定理 2.3.4. □

4.7 滤过给出的 Hilbert–Samuel 多项式

书接上节. Artin–Rees 引理的第二则应用关乎 §4.4 介绍的 Hilbert–Samuel 函数和多项式.

定义–命题 4.7.1 设 R 为带 I-进滤过的 Noether 环, M 是带 I-好滤过的有限生成 R-模. 若 M/IM 是有限长度 R/I-模, 则引理 4.4.3 (取 $\Gamma = \mathbb{Z}_{\geq 0}$) 和推论 4.4.9 中的条件适用于 $\mathrm{gr}_I(R)$ 与 $\mathrm{gr}_{\mathrm{F}}(M)$ (规定 $p < 0$ 时 $\mathrm{gr}^p_{\mathrm{F}}(M) = 0$); 此时每个 $M/\mathrm{F}^p M$ 都是有限长度 R-模. 因此可以定义

- ▷ Hilbert–Samuel **函数** $\chi_{\mathrm{F}}(M, \cdot) : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_{\geq 0}$, 映 p 为 $\ell(\mathrm{gr}^p_{\mathrm{F}} M)$;
- ▷ Poincaré **级数** $P_{\mathrm{F},M} = \sum_p \chi(\mathrm{gr}_{\mathrm{F}}(M), p) X^p \in \mathbb{Z}[\![X]\!]$;
- ▷ Hilbert–Samuel **多项式** $H_{\mathrm{F},M} := H_{\mathrm{gr}_{\mathrm{F}}(M)} \in \mathbb{Q}[X]$, 在 $H_{\mathrm{F},M} \neq 0$ 时可表作

$$H_{\mathrm{F},M} = \frac{e(M) X^{d-1}}{(d-1)!} + \text{低次项}, \quad e(M) \in \mathbb{Z}_{\geq 1}. \tag{4.7.1}$$

当 $\mathrm{F}^\bullet M$ 是 I-进滤过时, 将上述符号中的下标 F 改记为 I.

证明 考虑分次环 $S := \mathrm{gr}_I(R)$ 和分次 S-模 $N := \mathrm{gr}_{\mathrm{F}}(M)$; 另记 $\bar{S} := S/\mathrm{ann}(N)$. 首先说明 $\bar{S}_0 = S_0/\mathrm{ann}(N) \cap S_0$ 是 Artin 环. 观察到

$$S_0/\mathrm{ann}(N) \cap S_0 = \frac{R/I}{\mathrm{ann}_{R/I}(M/\mathrm{F}^1 M)}.$$

取 M 的生成元 $x_1, \ldots, x_n$ 及其像 $\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n \in M/IM$, 则 $\mathrm{ann}_{R/I}(M/\mathrm{F}^1 M)$ 是以下同态的核:

$$R/I \to (M/\mathrm{F}^1 M)^{\oplus n}, \quad \bar{r} \mapsto (\bar{r}\bar{x}_i)_{i=1}^n;$$

由于 $IM \subset \mathrm{F}^1 M$, 上述同态的像仍是有限长度模, 故 $S_0/\mathrm{ann}(N) \cap S_0$ 亦然. 定理 3.3.1 遂说明 $S_0/\mathrm{ann}(N) \cap S_0$ 是 Artin 环.

引理 4.6.3 蕴涵 S 作为 S_0-代数由有限多个 1 次齐次元生成. 由于 R 是 Noether 环而 M 有限生成, 每个 $\mathrm{F}^p M$ 也都是有限生成的, 故引理 4.6.2 蕴涵 N 是有限生成 S-模. 综上, 引理 4.4.3 和推论 4.4.9 的条件对次 S-模 N 成立; 前者还蕴涵每个 $\mathrm{F}^p M/\mathrm{F}^{p+1} M$ 都是有限长度模, 故取滤过可见每个 $M/\mathrm{F}^p M$ 亦然. □

在上述场景中, 初等数学给出 $K_{\mathrm{F},M} \in \mathbb{Q}[X]$ 使得

$$K_{\mathrm{F},M}(X+1) - K_{\mathrm{F},M}(X) = H_{\mathrm{F},M}(X),$$

它精确到常数是唯一的. 因为 $p \gg 0$ 时 $\chi_{\mathrm{F}}(M,p) = H_{\mathrm{F},M}(p)$, 为了确定相应的常数, 不妨进一步要求

$$n \gg 0 \implies K_{\mathrm{F},M}(n) = \ell(M/\mathrm{F}^n M) = \sum_{p=0}^{n-1} \chi_{\mathrm{F}}(M,p).$$

对 M 上的 I-进滤过类似地取 $K_{I,M}$. 以下规定零多项式的次数为 $-\infty$.

命题 4.7.2 在定义–命题 4.7.1 的场景中, $H_{\mathrm{F},M}$ 和 $H_{I,M}$ 有相同的次数, 而且

$$\deg\left(H_{\mathrm{F},M} - H_{I,M}\right) \leq \deg H_{\mathrm{F},M} - 1.$$

因此 $H_{\mathrm{F},M}$ 的最高次项不依赖于 M 上的 I-好滤过 $\mathrm{F}^\bullet M$. 若分别以 $K_{\mathrm{F},M}$ 和 $K_{I,M}$ 代替 $H_{\mathrm{F},M}$ 和 $H_{I,M}$, 结论亦同.

特别地, 当 $H_{\mathrm{F},M} \neq 0$ 时 (4.7.1) 中的 $e(M)$ 不依赖于 $\mathrm{F}^\bullet M$.

证明 存在 $m \geq 0$ 使得

$$\mathrm{F}^n M \supset I^n M \supset I^n \mathrm{F}^m M = \mathrm{F}^{n+m} M$$

对所有 $n \geq 0$ 成立; 最后的等号缘于 I-好滤过的条件. 于是

$$\ell(M/\mathrm{F}^n M) \leq \ell(M/I^n M) \leq \ell(M/\mathrm{F}^{n+m} M).$$

配合稍早的定义, 存在 $n_0 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, 使得当 $n \geq n_0$ 时

$$K_{\mathrm{F},M}(n) \leq K_{I,M}(n) \leq K_{\mathrm{F},M}(n+m).$$

初等数学遂蕴涵 $K_{\mathrm{F},M}$ 和 $K_{\mathrm{F},M}$ 有相同的次数和最高次系数. 取差分可知 $H_{\mathrm{F},M}$ 和 $H_{I,M}$ 亦然. □

推论 4.7.3 设 R 为带 I-进滤过的 Noether 环, M 为有限生成 R-模. 给定短正合列

$$0 \to M' \to M \to M'' \to 0,$$

则 M/IM 是有限长度模当且仅当 M'/IM' 和 M''/IM'' 皆然, 此时

$$\begin{aligned}\deg\left(H_{I,M'}+H_{I,M''}-H_{I,M}\right) &\leq \deg H_{I,M'}-1,\\ \deg H_{I,M} &= \max\left\{\deg H_{I,M'},\deg H_{I,M''}\right\}.\end{aligned}$$

证明 注意到 M' 和 M'' 皆有限生成. 引理 2.4.8 (iii) 说明 $\mathrm{Supp}(M/IM)=\mathrm{Supp}(M)\cap V(I)$, 以 M' 和 M'' 代 M 亦然. 命题 2.4.6 给出

$$\mathrm{Supp}(M)=\mathrm{Supp}(M')\cup\mathrm{Supp}(M''),$$

两边和 $V(I)$ 取交, 便有

$$\mathrm{Supp}(M/IM)=\mathrm{Supp}(M'/IM')\cup\mathrm{Supp}(M''/IM'').$$

鉴于推论 3.4.11 对有限长度模的刻画, M/IM 是有限长度的当且仅当 M'/IM' 和 M''/IM'' 皆然.

以下设 M/IM 有限长度. 赋 M 以 I-进滤过, 赋子模 M' 以诱导滤过 $\mathrm{F}^\bullet M'$, 并且回忆到商模 M'' 上的诱导滤过仍是 I-进的. 命题 4.2.9 和 Hilbert–Samuel 多项式的定义导致

$$H_{\mathrm{F},M'}+H_{I,M''}=H_{I,M}. \tag{4.7.2}$$

已知 M'/IM' 有限长度, 故命题 4.7.2 说明 $H_{\mathrm{F},M'}$ 和 $H_{I,M'}$ 有相同的次数和最高次系数, 因此

$$\deg\left(H_{I,M'}+H_{I,M''}-H_{I,M}\right)\xlongequal{(4.7.2)}\deg\left(H_{I,M'}-H_{\mathrm{F},M'}\right)\leq\deg H_{I,M'}-1.$$

若 $H_{I,M'}=0$, 则亦有 $H_{\mathrm{F},M'}=0$, 此时 (4.7.2) 即刻给出

$$\deg H_{I,M}=\max\{\deg H_{I,M'},\deg H_{I,M''}\}.$$

同理, $H_{I,M''}=0$ 也蕴涵上述等式. 以下设 $H_{\mathrm{F},M'}$ 和 $H_{I,M''}$ 皆非零, 则其最高项系数皆正, 故命题 4.7.2 和 (4.7.2) 给出

$$\begin{aligned}\deg H_{I,M} &= \max\{\deg H_{\mathrm{F},M'},\deg H_{I,M''}\}\\ &= \max\{\deg H_{I,M'},\deg H_{I,M''}\}.\end{aligned}$$

明所欲证. □

习题

1. 证明素避性质的以下分次版本: 设 R 是 $\mathbb{Z}_{\geq 0}$-分次环, I 和 $\mathfrak{p}_1,\ldots,\mathfrak{p}_r$ 为 R 的理想, 其中 $r\in\mathbb{Z}_{\geq 1}$. 设

◇ I 是由次数 >0 的元素生成的分次理想,

◇ $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_r$ 皆为素理想.

若 I 的齐次元皆包含于 $\bigcup_{i=1}^r \mathfrak{p}_i$, 则存在 $1 \leq i \leq r$ 使得 $I \subset \mathfrak{p}_i$

提示 沿用命题 1.1.3 在条件 (b) 之下的论证. 对 r 递归. 设 $r \geq 2$ 而 I 不包含于任一个 $\mathfrak{p}_i$, 则对每个 i 存在齐次元 $x_i \in I \smallsetminus \bigcup_{j \neq i} \mathfrak{p}_j$ 使得 $\deg x_i > 0$; 将 x_1 和 $x_2, \ldots, x_r$ 取合适的幂次, 可确保 x_1 和 $\prod_{j=2}^r x_j$ 同次数.

2.

3. 说明在例 4.2.7 的构造中, 如果 Γ 的任意有限子集都有上界, 则对应的滤过是穷竭的; 如果 Γ 本身在 Γ 中无下界, 则对应的滤过是分离的. 以引理 B.1.5 说明当 Γ 带全序且 $\Gamma \neq \{0\}$ 时, 以上两则条件自动成立.

4.

5.

第五章 平坦性

5.1 基本定义

本章所论的复形皆为链复形, 采取下标记法, 详见约定 1.4.7.

约定 5.1.1 选定环 R. 今后沿用定义–命题 1.3.1 的惯例, 在不致混淆时将 R-模的张量积 $\underset{R}{\otimes}$ 简记为 $\otimes$.

兹回顾平坦模的概念 [7, 定义 6.9.4].

定义 5.1.2 (平坦模) 设 M 为 R-模. 若函子 $M \otimes (\cdot) : R\text{-}\mathsf{Mod} \to R\text{-}\mathsf{Mod}$ 保持所有正合列, 则称 M 为**平坦**的.

如果 M 平坦而且对所有 R-模 N 皆有 $M \otimes N = 0 \iff N = 0$, 则称 M 为**忠实平坦**的.

零模按定义是平坦的.

更明确地说, $M \otimes (\cdot)$ 保持所有正合列相当于说对所有 R-模构成的复形

$$N_\bullet = \left[\cdots \to N_n \xrightarrow{d_n} N_{n-1} \to \cdots \right],$$

$$\text{命 } M \otimes N_\bullet := \left[\cdots \to M \otimes N_n \xrightarrow{\mathrm{id}_M \otimes d_n} M \otimes N_{n-1} \to \cdots \right],$$

皆有 $N_\bullet$ 正合 $\implies M \otimes N_\bullet$ 正合.

定义 5.1.3 (平坦代数) 设 S 为 R-代数, 若 S 作为 R-模是平坦的 (或忠实平坦的), 则称 S 为平坦 (或忠实平坦) R-代数, 或称相应的环同态或环扩张 $R \to S$ 平坦, 或称 S 在 R 上平坦.

举例明之, 当 $n \neq 0$ 时 $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ 并非平坦 $\mathbb{Z}$-代数: n 倍同态 $\mathbb{Z} \xrightarrow{n} \mathbb{Z}$ 是单的, 然而和 $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ 作张量积得到 $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

命题 5.1.4 对于 R-模 M, 以下陈述等价:

(i) M 平坦;

(ii) 若 $0 \to N' \to N \to N''$ 正合, 则 $0 \to M \otimes N' \to M \otimes N \to M \otimes N''$ 正合, 换言之 $M \otimes (\cdot)$ 保核;

(iii) $M \otimes (\cdot)$ 保持 R-Mod 中的所有有限 $\varprojlim$.

证明 (i) $\implies$ (ii): 平凡.

(ii) $\implies$ (iii): 有限 $\varprojlim$ 能以核与有限直和来构造, 张量积总是保直和, 故 $M \otimes (\cdot)$ 保有限 $\varprojlim$.

(iii) $\implies$ (i): 已知张量积保余核, 搭配 (iii) 可见 $M \otimes (\cdot)$ 保持所有短正合列. 关于正合列的一般操作 [7, 命题 6.8.9] 说明这蕴涵 $M \otimes (\cdot)$ 保所有正合列. □

命题 5.1.5 对于 R-模 M, 以下陈述等价:

(i) M 平坦而且 $M \otimes (\cdot) : R\text{-Mod} \to R\text{-Mod}$ 是忠实函子;

(ii) M 忠实平坦;

(iii) 对所有 R-模构成的三项复形 $N' \to N \to N''$, 它是正合的当且仅当 $M \otimes N' \to M \otimes N \to M \otimes N''$ 正合.

证明 鉴于命题 5.1.4, 这不外是 [8, 命题 2.8.9] 关于忠实正合函子的一般性质. □

命题 5.1.5 (iii) 对于一般的复形 $N_\bullet$ 依然成立, 因为正合性能限制到三项复形来考察.

例 5.1.6 设 U 为 R 的乘性子集, 则 $R[U^{-1}]$ 是平坦 R-代数. 一切化约为典范同构 $R[U^{-1}] \otimes M \simeq M[U^{-1}]$ (命题 1.6.6) 与局部化的正合性 (引理 1.6.3 (iii)) 的应用.

然而当 U 包含非零不可逆元时, 局部化并非忠实平坦的: 取真理想 I 使得 $I \cap U \neq \varnothing$, 则 $R/I \neq 0$ 而 $R[U^{-1}] \otimes (R/I) \simeq (R/I)[U^{-1}] = 0$.

引理 5.1.7 给定一族 R-模 $(M_i)_{i \in I}$, 则 $\bigoplus_{i \in I} M_i$ 平坦当且仅当每个 M_i 皆平坦.

证明 包含于 [7, 引理 6.9.5], 基本思路是应用张量积保直和及以下事实: 一族 R-模复形的直和正合当且仅当其中每个复形皆正合. □

例 5.1.8 投射模总是平坦的. 为此, 观察到 R 本身当然地平坦, 故引理 5.1.7 一方面蕴涵自由 R-模皆平坦, 另一方面又蕴涵自由模的直和项也平坦. 然而自由模的直和项无非是投射模 [7, 命题 6.9.8].

以下列出关于平坦模的一些初步性质.

▷ **直和** 设 $(M_i)_{i\in I}$ 为一族 R-模, 则 $\bigoplus_{i\in I} M_i$ 平坦当且仅当每个 M_i 皆平坦. 这是因为有典范同构 $(\bigoplus_{i\in I} M_i)\otimes N \simeq \bigoplus_{i\in I}(M_i\otimes N)$, 而一族 R-模复形的直和正合当且仅当每个直和项皆然, 见 [7, 引理 6.8.3].

若 S_1 和 S_2 是 R-代数, 则 R-代数 $S_1\times S_2$ 平坦当且仅当 S_1 和 S_2 皆然, 因为此直积视为 R-模无非是直和.

▷ **张量积** 设 M_1 和 M_2 为平坦 (或忠实平坦) R-模, 则 $M_1\otimes M_2$ 亦然, 这是缘于张量积的结合约束 $M_1\otimes(M_2\otimes(\cdot))\simeq(M_1\otimes M_2)\otimes(\cdot)$.

▷ **基变换** 设 M 为平坦 (或忠实平坦) R-模, 而 R' 为 R-代数, 则 $R'\underset{R}{\otimes} M\simeq M\underset{R}{\otimes} R'$ 是平坦 (或忠实平坦) R'-模. 这是缘于任何 R'-模 N' 可视为 R-模, 相应地有典范同构

$$(M\underset{R}{\otimes} R')\underset{R'}{\otimes} N'\simeq M\underset{R}{\otimes} N'.$$

▷ **传递性** 设 R' 为平坦 (或忠实平坦) R-代数, 而 M' 为平坦 (或忠实平坦) R'-模, 则 M' 视为 R-模仍是平坦 (或忠实平坦) 的. 这是缘于对任意 R-模 N 皆有典范同构

$$M'\underset{R}{\otimes} N\simeq M'\underset{R'}{\otimes}(R'\underset{R}{\otimes} N).$$

作为特例, 给定环同态 $R\to R'\to R''$, 若 R' 是平坦 (或忠实平坦) R-代数, 而 R'' 是平坦 (或忠实平坦) R'-代数, 则 R'' 也是平坦 (或忠实平坦) R-代数.

对于忠实平坦 R-代数, 基变换性质有如下强化.

命题 5.1.9 *设 R' 为忠实平坦 R-代数, M 为 R-模, 则 M 是平坦 (或忠实平坦) R-模当且仅当 $R'\otimes M$ 是平坦 (或忠实平坦) R'-模.*

证明 基变换性质确保 “仅当” 方向. 对于 “当” 的方向, 设 $M' := R'\otimes M$ 平坦, 而 $N_\bullet$ 是 R-模的复形. 从 (1.3.2) 给出之

$$R'\otimes(M\otimes N_\bullet)\simeq M'\underset{R'}{\otimes}(R'\otimes N_\bullet)$$

可知若 $N_\bullet$ 正合则 $R'\otimes(M\otimes N_\bullet)$ 正合, 继而 $M\otimes N_\bullet$ 正合. 因此 M 平坦.

进一步设 M' 忠实平坦, 代入上式可见若 $M\otimes N_\bullet$ 正合则 $M'\underset{R'}{\otimes}(R'\otimes N_\bullet)$ 正合, 继而 $R'\otimes N_\bullet$ 正合, $N_\bullet$ 正合. 因此 M 忠实平坦. □

兹记录另一则关于平坦模的基本事实.

命题 5.1.10 一族平坦 R-模的滤过 $\varinjlim$ 仍是平坦的.

证明 见 [7, 命题 6.9.7], 基本思路是应用张量积保 $\varinjlim$ (基于伴随性) 以及滤过 $\varinjlim$ 的正合性. □

5.2 进阶性质

继续选定环 R 并沿用约定 5.1.1. 我们也将采用定义 1.7.7 的符号.

命题 5.2.1 对于 R-模 M, 以下陈述等价:

(i) M 是平坦 (或忠实平坦) R-模;

(ii) $M_{\mathfrak{p}}$ 对 R 的所有素理想 $\mathfrak{p}$ 都是平坦 (或忠实平坦) $R_{\mathfrak{p}}$-模;

(iii) $M_{\mathfrak{m}}$ 对 R 的所有极大理想 $\mathfrak{m}$ 都是平坦 (或忠实平坦) $R_{\mathfrak{m}}$-模.

证明 (i) $\implies$ (ii): 沿 $R \to R_{\mathfrak{p}}$ 的基变换保持平坦 (或忠实平坦) 性质.

(ii) $\implies$ (iii): 平凡.

(iii) $\implies$ (i): 给定 R-模的复形 $N_\bullet$, 引理 2.4.1 表明 $M \otimes N_\bullet$ 正合当且仅当

$$\left(M_{\mathfrak{m}} \underset{R_{\mathfrak{m}}}{\otimes} (N_\bullet)_{\mathfrak{m}}\right) \overset{(1.3.2)}{\simeq} (M \otimes N_\bullet)_{\mathfrak{m}}$$

对所有极大理想 $\mathfrak{m}$ 皆正合; 此处 $(N_\bullet)_{\mathfrak{m}}$ 代表对复形逐次地取局部化. 因此若 $M_{\mathfrak{m}}$ 对所有 $\mathfrak{m}$ 皆平坦, 则 M 平坦.

现在设 $M_{\mathfrak{m}}$ 对所有 $\mathfrak{m}$ 皆忠实平坦. 若 R-模 N 满足 $M \otimes N = 0$, 则 $M_{\mathfrak{m}} \underset{R_{\mathfrak{m}}}{\otimes} N_{\mathfrak{m}} = 0$, 从而 $N_{\mathfrak{m}} = 0$ 对所有 $\mathfrak{m}$ 成立. 代入引理 2.4.1 得 $N = 0$, 故 M 忠实平坦. □

接着转向 R-代数的平坦性.

命题 5.2.2 对于环同态 $\varphi : R \to R'$, 以下陈述等价:

(i) R' 是平坦 R-代数,

(ii) 对 R' 的所有素理想 $\mathfrak{p}'$, 取 R 的素理想 $\mathfrak{p} := \varphi^{-1}(\mathfrak{p}')$, 则命题 1.11.9 给出的局部同态 $\varphi_{\mathfrak{p},\mathfrak{p}'} : R_{\mathfrak{p}} \to R'_{\mathfrak{p}'}$ 使 $R'_{\mathfrak{p}'}$ 成为平坦 $R_{\mathfrak{p}}$-代数;

(iii) 同上, 但仅考虑 $\mathfrak{p}'$ 是极大理想的情形.

证明 (i) $\implies$ (ii): 命 $U := R \smallsetminus \mathfrak{p}$ 而 $U' := R' \smallsetminus \mathfrak{p}'$, 于是 $\varphi(U) \subset U'$. 将 $\varphi_{\mathfrak{p},\mathfrak{p}'}$ 按其定义分解为

$$R_{\mathfrak{p}} = R[U^{-1}] \to \underbrace{R'[\varphi(U)^{-1}]}_{\simeq R' \otimes R_{\mathfrak{p}}} \to R'[(U')^{-1}] = R'_{\mathfrak{p}'}.$$

第一段等同于 φ 对 $R \to R_{\mathfrak{p}}$ 的基变换, 而第二段是环 $R'[\varphi(U)^{-1}]$ 的局部化. 两者皆平坦, 其合成亦然.

(ii) $\implies$ (iii): 平凡.

(iii) $\implies$ (i): 对 R'-模应用命题 5.2.1, 可知为了证明 R' 平坦, 对 R' 的所有极大理想 $\mathfrak{p}'$ 说明函子 $R'_{\mathfrak{p}'} \otimes (\cdot)$ 正合即可. 为此, 将 $R \to R'_{\mathfrak{p}'}$ 分解为 $R \to R_{\mathfrak{p}} \xrightarrow{\varphi_{\mathfrak{p},\mathfrak{p}'}} R'_{\mathfrak{p}'}$, 并回忆到 $R \to R_{\mathfrak{p}}$ 平坦即可. □

对于下一则结果, 回忆到对于 R-代数 S 和 R-模 M_1, M_2, 注记 1.3.4 定义了典范 S-模同态

$$\begin{aligned} \Xi_{M_1,M_2} : S \otimes \mathrm{Hom}_R(M_1, M_2) &\to \mathrm{Hom}_S\left(S \otimes M_1, S \otimes M_2\right) \\ s \otimes f &\mapsto s(\mathrm{id} \otimes f). \end{aligned}$$

现在提供使之为同构的一则充分条件. 回忆有限展示模的定义 1.5.1.

命题 5.2.3 设 S 为平坦 R-代数, M_1 为有限展示 R-模. 对于所有 R-模 M_2, 上述典范 S-模同态 Ξ_{M_1,M_2} 是同构.

证明 以下将 Hom_R 简记为 Hom. 观察到 Ξ_{M_1,M_2} 在 $M_1 = R$ 时总是同构, 这点适用于一般的 R-代数 S, 缘由是交换图表

$$\begin{tikzcd} s \otimes f \arrow[ddd, mapsto] & \in & S \otimes \mathrm{Hom}(R, M_2) \arrow[r, "\Xi_{R,M_2}"] \arrow[ddd, "\wr"'] & \mathrm{Hom}_S\left(S \otimes R, S \otimes M_2\right) \arrow[d, "\wr"] & \ni & s(\mathrm{id} \otimes f) \arrow[ddd, mapsto] \\ & & & \mathrm{Hom}_S\left(S, S \otimes M_2\right) \arrow[dd, "\wr"] & & \\ & & & & & \\ s \otimes f(1) & \in & S \otimes M_2 \arrow[r, "\mathrm{id}"'] & S \otimes M_2 & \ni & s \otimes f(1), \end{tikzcd}$$

其验证不难. 由于所有构造皆保持对 M_1 的有限直和, 由此推得 $\Xi_{R^{\oplus n},M_2}$ 对所有 $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ 皆为同构.

取 M_1 的有限展示 $R^{\oplus m} \to R^{\oplus n} \to M_1 \to 0$, 对之取 $S \otimes (\cdot)$ 得到 $S \otimes M_1$ 的有限展示. 考虑行正合交换图表

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & S \otimes \mathrm{Hom}(M_1, M_2) \arrow[r] \arrow[d, "\Xi_{M_1,M_2}"'] & S \otimes \mathrm{Hom}(R^{\oplus n}, M_2) \arrow[r] \arrow[d, "\Xi_{R^{\oplus n},M_2}"] & S \otimes \mathrm{Hom}(R^{\oplus m}, M_2) \arrow[d, "\Xi_{R^{\oplus m},M_2}"] \\ 0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}_S(S \otimes M_1, S \otimes M_2) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_S(S^{\oplus n}, S \otimes M_2) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_S(S^{\oplus m}, S \otimes M_2) \end{tikzcd}$$

- 第一行是对 M_1 的有限展示先取 $\mathrm{Hom}(\cdot, M_2)$ (用到 Hom 函子左正合, 见 [7, 命题 6.9.1] 或 [8, 命题 2.8.11]), 再取 $S \otimes (\cdot)$ 的产物, S 平坦确保其正合;
- 第二行是对 $S \otimes M_1$ 的有限展示取 $\mathrm{Hom}_S(\cdot, S \otimes M_2)$ 的产物, 它总是正合;

◇ 图表因 $\Xi_{\bullet,\bullet}$ 的自然性而交换.

根据前一步, 图表中间和右侧的竖直箭头为同构, 故核的唯一性导致 Ξ_{M_1,M_2} 确实是同构. □

推论 5.2.4 设 U 为 R 的乘性子集. 如果 M_1 是有限展示 R-模, 则对于所有 R-模 M_2, 有 $R[U^{-1}]$-模同构

$$\begin{gathered}\mathrm{Hom}_R(M_1,M_2)[U^{-1}] \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{R[U^{-1}]}\left(M_1[U^{-1}],M_2[U^{-1}]\right)\\ \frac{f}{u}\mapsto\frac{1}{u}f[U^{-1}],\end{gathered}$$

其中 $f\in\mathrm{Hom}_R(M_1,M_2)$ 而 $u\in U$.

证明 以命题 1.6.6 等同 $R[U^{-1}]\otimes M$ 和 $M[U^{-1}]$, 其中 M 可以是 M_1, M_2 或 $\mathrm{Hom}_R(M_1,M_2)$. 既然 $S:=R[U^{-1}]$ 是平坦 R-代数, 命题 5.2.3 可资应用; 不难检验该处的同构 Ξ_{M_1,M_2} 正是断言中的 $\frac{f}{u}\mapsto\frac{1}{u}f[U^{-1}]$. □

引理 5.2.5 设 $I_1,\ldots,I_n$ 为环 R 的理想, M 为平坦 R-模, 则 $\bigcap_{i=1}^n(I_iM)=\left(\bigcap_{i=1}^n I_i\right)M$; 符号如约定 1.1.5.

证明 考虑正合列 $0\to\bigcap_{i=1}^n I_i\to R\to\bigoplus_{i=1}^n R/I_i$. 与 M 作张量积的产物是

$$\begin{gathered}0\to\left(\bigcap_{i=1}^n I_i\right)\otimes M\xrightarrow{\alpha}M\xrightarrow{\beta}\bigoplus_{i=1}^n M/I_iM,\\ \alpha(t\otimes x)=tx,\quad \beta(x)=(x+I_iM)_{i=1}^n.\end{gathered}$$

然而 $\mathrm{im}(\alpha)=\left(\bigcap_{i=1}^n I_i\right)M$ 而 $\ker(\beta)=\bigcap_{i=1}^n(I_iM)$. □

命题 5.2.6 设 S 为平坦 R-代数, M 为 R-模, 则对所有 $x\in M$ 皆有 $\mathrm{ann}_R(x)S=\mathrm{ann}_S(1_S\otimes m)$; 若 M 是有限生成的, 则 $\mathrm{ann}_R(M)S=\mathrm{ann}_S(S\otimes M)$; 符号如 (1.1.2) 和 (1.1.3).

作为特例, 若 U 是 R 的乘性子集, M 是有限生成 R-模, 则有 $\mathrm{ann}_R(M)[U^{-1}]=\mathrm{ann}_{R[U^{-1}]}\left(M[U^{-1}]\right)$.

证明 给定 $x\in M$, 将正合列 $0\to\mathrm{ann}_R(x)\to R\xrightarrow{\text{乘 }x}M$ 与 S 作张量积可得第一部分. 若 M 有生成元 $x_1,\ldots,x_n$, 记 $I_i:=\mathrm{ann}_R(x_i)$, 则 $\mathrm{ann}_R(M)=\bigcap_{i=1}^n I_i$ 而 $\mathrm{ann}_S(S\otimes M)=\bigcap_{i=1}^n\mathrm{ann}_S(1_S\otimes x_i)=\bigcap_{i=1}^n I_iS$; 代入引理 5.2.5 得第二部分.

最后的特例缘于 $R[U^{-1}]$ 的平坦性. □

5.3 Tor 函子的相关回顾

符号如前, 包括关于链复形的记法.

定义 5.3.1 (平坦解消) 对于 R-模 M, 形如

$$\cdots \to P_2 \to P_1 \to P_0 \to M \to 0,$$

而且每个 P_i 皆为平坦模的正合列称为 M 的平坦解消, 简记为 $P_\bullet \to M \to 0$.

对于 $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, 若 $P_{n+1} = P_{n+2} = \cdots = 0$, 则称此解消的长度 $\leq n$.

由于投射模皆平坦 (例 5.1.8), 定义–命题 1.4.8 的投射解消自动是平坦解消; 特别地, 任何 R-模 M 都有平坦解消.

本章后续内容要求读者对同调理论中的 Tor-函子

$$\mathrm{Tor}_i^R(\cdot,\cdot) : R\text{-}\mathsf{Mod} \times R\text{-}\mathsf{Mod} \to R\text{-}\mathsf{Mod}, \quad i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$$

有最基本的了解, 相关内容可见 [8, §3.14]. 所需知识包括:

- ◇ $\mathrm{Tor}_0^R(M,N) = M \otimes N$;
- ◇ 有典范同构 $\mathrm{Tor}_i^R(M,N) \simeq \mathrm{Tor}_i^R(N,M)$, 见 [8, 命题 3.14.9];
- ◇ 当 R-模 M 选定, 函子列

  $$\mathrm{Tor}_i^R(M,\cdot) : R\text{-}\mathsf{Mod} \to R\text{-}\mathsf{Mod}, \quad i = 0,1,2,\ldots$$

  是右正合函子 $M \otimes (\cdot) : R\text{-}\mathsf{Mod} \to R\text{-}\mathsf{Mod}$ 的左导出函子;
- ◇ 当 M 平坦时, 对所有 $i > 0$ 皆有 $\mathrm{Tor}_i^R(M,\cdot) = 0$;
- ◇ 对 M 取平坦解消 $P_\bullet \to M \to 0$ 给出

  $$\mathrm{Tor}_i^R(M,N) \simeq \mathrm{H}_i(P_\bullet \otimes N),$$

  对 N 取平坦解消 $Q_\bullet \to N \to 0$ 则给出

  $$\mathrm{Tor}_i^R(M,N) \simeq \mathrm{H}_i(M \otimes Q_\bullet),$$

  详见 [8, 定义–命题 3.14.7] 之下的讨论;
- ◇ 如取 $P_\bullet \to M \to 0$ (或 $Q_\bullet \to N \to 0$) 为投射解消, 则以上给出 $\mathrm{Tor}_i^R(M,\cdot)$ (或 $\mathrm{Tor}_i^R(\cdot,N)$) 的典范描述, 这是基于投射解消精确到同伦的唯一性 (注记 1.4.9);

◇ 对 N (或 M) 作解消计算 $\mathrm{Tor}_i^R(M,N)$, 立见任何 $r\in R$ 对 R-模 $\mathrm{Tor}_i^R(M,N)$ 的乘法作用都等于 r 对 M (或 N) 的乘法在 $\mathrm{Tor}_i^R(M,N)$ 上诱导的自同态;

◇ 模的短正合列诱导 Tor-函子的长正合列:

$$\cdots\to\mathrm{Tor}_{i+1}^R(M'',N)\xrightarrow{\delta_i}\mathrm{Tor}_i^R(M',N)\to\mathrm{Tor}_i^R(M,N)\to\mathrm{Tor}_i^R(M'',N)\to\cdots,$$

$$\cdots\to\mathrm{Tor}_{i+1}^R(M,N'')\xrightarrow{\delta_i}\mathrm{Tor}_i^R(M,N')\to\mathrm{Tor}_i^R(M,N)\to\mathrm{Tor}_i^R(M,N'')\to\cdots,$$

其中 $0\to M'\to M\to M''\to 0$ 和 $0\to N'\to N\to N''\to 0$ 都是给定的短正合列, 连接同态 δ_i 都是典范的, 并在 $i<0$ 时规定 $\mathrm{Tor}_i^R=0$; 见 [8, 定义–命题 3.14.7] 之下的讨论.

倘若读者愿意接受导出范畴的语言, 则 $\mathrm{Tor}_i^R(M,N)$ 无非是导出张量积 $M\overset{\mathrm{L}}{\underset{R}{\otimes}}N$ 的第 i 个同调, 详见 [8, §4.12].

命题 5.3.2 设 R 为 Noether 环, M 和 N 为有限生成 R-模, 则每个 $\mathrm{Tor}_i^R(M,N)$ 都是有限生成 R-模.

证明 基于定义–命题 1.4.8 对投射解消的取法和 Noether 环的性质, 可取到投射解消 $P_\bullet\to M\to 0$ 使得每个 P_i 皆有限生成, 故 $P_i\otimes N$ 有限生成. 既然 $\mathrm{Tor}_i^R(M,N)$ 是 $P_i\otimes N$ 的子商, 它也是有限生成的. □

以下性质是 [8, 第三章习题 24] 的内容, 在此提供证明.

引理 5.3.3 对所有 R-模 M 和 $i\geq 0$, 函子 $\mathrm{Tor}_i^R(M,\cdot)$ 保滤过小 $\varinjlim$.

证明 以平坦解消 $P_\bullet\to M\to 0$ 计算 $\mathrm{Tor}_i^R(M,\cdot)$, 得

$$\begin{aligned}\mathrm{Tor}_i^R\left(M,\varinjlim_i N_i\right)&=\mathrm{H}_i\left(P_\bullet\otimes\varinjlim_i N_i\right)\simeq\mathrm{H}_i\left(\varinjlim_j P_\bullet\otimes N_i\right)\\&\simeq\varinjlim_j\mathrm{H}_i\left(P_\bullet\otimes N_j\right)=\varinjlim_j\mathrm{Tor}_i^R(M,N_j);\end{aligned}$$

其中第一个同构缘于张量积保小 $\varinjlim$, 第二个同构缘于滤过 $\varinjlim$ 保持模的正合列. □

引理 5.3.4 设 S 为平坦 R-代数, 则对所有 $i\geq 0$ 都有 S-模的典范同构

$$\mathrm{Tor}_i^S(S\otimes M,S\otimes N)\simeq S\otimes\mathrm{Tor}_i^R(M,N).$$

证明 取 R-模的投射解消 $P_\bullet\to M\to 0$. 因为 S 在 R 上平坦, 配合命题 1.4.6 知 $S\otimes P_\bullet\to S\otimes M\to 0$ 仍是投射解消. 因此

$$\mathrm{Tor}_i^S(S\otimes M,S\otimes N)\simeq\mathrm{H}_i\left((S\otimes P_\bullet)\underset{S}{\otimes}(S\otimes N)\right)\simeq\mathrm{H}_i\left(S\otimes P_\bullet\otimes N\right).$$

平坦性蕴涵最右项是 $S\otimes\mathrm{H}_i(P_\bullet\otimes N)$, 亦即 $S\otimes\mathrm{Tor}_i^R(M,N)$. 所有同构皆典范. □

推论 5.3.5 设 U 为 R 的乘性子集, 则对所有 $i \geq 0$ 都有 $R[U^{-1}]$-模的典范同构

$$\mathrm{Tor}_i^{R[U^{-1}]}\left(M[U^{-1}], N[U^{-1}]\right) \simeq \mathrm{Tor}_i^R(M,N)[U^{-1}].$$

证明 结合例 5.1.6 和命题 5.3.4. □

以下记录命题 1.3.6 的一种导出版本, 它也是 Tor 函子谱序列 [8, 例 5.6.7] 的一则特例.

命题 5.3.6 给定环同态 $R \to S$. 设 M 为 R-模, N 为 S-模, 而且对所有 $j > 0$ 皆有 $\mathrm{Tor}_j^R(S, M) = 0$, 则有 R-模的一族同构

$$\mathrm{Tor}_i^R(N, M) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Tor}_i^S(N, S \otimes M), \quad i \in \mathbb{Z}_{\geq 0},$$

其中左式的 N 和右式的 $\mathrm{Tor}_i^S(\cdots)$ 通过 $R \to S$ 视为 R-模; 这些同构对 S-模 N 具有函子性.

证明 取投射解消 $P_\bullet \to M$, 则从 $j > 0 \implies \mathrm{Tor}_j^R(S, M) = 0$ 和命题 1.4.6 推得 $S \otimes P_\bullet \to S \otimes M$ 给出 $S \otimes M$ 的投射解消. 其次, 命题 1.3.6 给出 R-模构成的链复形之间的同构

$$N \otimes P_\bullet \xrightarrow{\sim} N \underset{S}{\otimes} (S \otimes P_\bullet),$$

它对 N 具有函子性. 取 H_i 对左式给出 $\mathrm{Tor}_i^R(N, M)$, 对右式给出 $\mathrm{Tor}_i^S(N, S \otimes M)$, 后者通过 $R \to S$ 视为 R-模. □

定义 5.3.7 (平坦维数) 对于 R-模 N, 定义其平坦维数 (或称 Tor-维数) 为

$$\mathrm{fl.dim}(M) = \mathrm{fl.dim}_R(M) := \inf\left\{i \in \mathbb{Z}_{\geq 0} : \forall j > i,\ \mathrm{Tor}_j^R(M, \cdot) = 0\right\},$$

此处规定 $\inf \varnothing = +\infty$, 因此这是 $\mathbb{Z}_{\geq 0} \sqcup \{+\infty\}$ 的元素.

5.4 平坦性判准

符号如前. 对环 R 的任意理想 I 和 R-模 M, 有映 $t \otimes x$ 为 tx 的模同态 $I \otimes M \to M$, 其像是 IM.

引理 5.4.1 设 I 是理想, M 是 R-模, 则有典范同构 $\mathrm{Tor}_1^R(M, R/I) \simeq \ker[I \otimes M \to M]$.

证明 短正合列 $0 \to I \to R \to R/I \to 0$ 诱导 $\mathrm{Tor}_\bullet^R(M, \cdot)$ 的长正合列, 其中一段是

$$\mathrm{Tor}_1^R(M, R) \to \mathrm{Tor}_1^R(M, R/I) \to M \otimes I \to M;$$

然而 $\mathrm{Tor}_1^R(M, R) = 0$, 证毕. □

定理 5.4.2 (平坦性的 Tor 判准) 对所有 R-模 M, 以下陈述等价:

(i) M 平坦;

(ii) 对所有 $i > 0$ 皆有 $\mathrm{Tor}_i^R(M, \cdot) = 0$;

(iii) $\mathrm{Tor}_1^R(M, \cdot) = 0$,

(iv) 对 R 的所有有限生成理想 I 都有 $\mathrm{Tor}_1^R(M, R/I) = 0$.

证明 由于 M 平坦等价于 $M \otimes (\cdot)$ 是正合函子, 导出函子的一般理论 [7, 推论 3.12.7] 表明 (i) $\iff$ (ii) $\iff$ (iii), 而 (iii) $\implies$ (iv) 为平凡.

以下说明 (iv) $\implies$ (iii). 目标是证 $\mathrm{Tor}_1^R(M, N) = 0$ 对所有 R-模 N 成立. 将 N 表为其有限生成子模的滤过并, 则引理 5.3.3 将问题归结为 N 有限生成的情形. 以下对 N 的最小可能生成元个数 n 递归地论证.

设 $N = Rx_1 + \cdots + Rx_n$, 命 $N' := \sum_{i<n} Rx_i$, 则有短正合列

$$0 \to M' \to M \to M'' \to 0,$$

其中 M'' 由 x_n 的像生成. 因为长正合列中的

$$\mathrm{Tor}_1^R(M, N') \to \mathrm{Tor}_1^R(M, N) \to \mathrm{Tor}_1^R(M, N'')$$

正合, 问题递归地化到 $n = 1$ 的情形, 因此可设 $N = R/I$, 其中 I 是 R 的理想. 引理 5.4.1 将问题进一步翻译为证乘法同态 $I \otimes M \to M$ 为单, 记此同态为 μ.

由于 I 是其有限生成子理想的滤过并, 张量积保 $\varinjlim$, 而 $\varinjlim$ 又保持正合性, μ 的单性可以形式地化到 I 有限生成的情形, 亦即与 (iv) 等价的陈述. 以下另提供一种更具体的论证.

给定 $y \in \ker(\mu)$, 取 $t_1, \ldots, t_m \in I$ 和 $x_1, \ldots, x_m \in M$ 使得 $y = \sum_{i=1}^m t_i \otimes x_i$. 记 $t_1, \ldots, t_m$ 生成的理想为 $I_0 \subset I$, 则 y 来自于 $I_0 \otimes M$ 的某个元素 y_0. 乘法同态 $\mu_0 : I_0 \otimes M \to M$ 通过 μ 分解, 故 (iv) 的条件说明 $y_0 \in \ker(\mu_0) = 0$, 从而 $y = 0$. □

推论 5.4.3 设有 R-模的正合列 $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$. 若 M' 和 M'' 皆平坦, 则 M 亦然.

证明 考虑长正合列的 $\mathrm{Tor}_1^R(M', N) \to \mathrm{Tor}_1^R(M, N) \to \mathrm{Tor}_1^R(M'', N)$ 部分. □

推论 5.4.4 (平坦性的理想判准) 设 M 为 R-模, 则 M 平坦等价于 $I \otimes M \to M$ 对所有理想 I 皆单, 也等价于它对有限生成理想 I 皆单.

证明 结合引理 5.4.1 与定理 5.4.2 (iii), (iv). □

推论 5.4.5 若 $r \in R \smallsetminus \{0\}$ 不是零因子, 则它也不是任何平坦 R-模 M 的零因子 (定义 1.1.7).

证明 取理想 $I := Rr$, 它同构于 R. 易见 $M \simeq I \otimes M \hookrightarrow M$ 映 x 为 rx. □

推论 5.4.6 设 R 为主理想整环, 则 R-模 M 平坦当且仅当 M 没有 0 之外的零因子.

证明 不妨设 $M \neq 0$. 以下运用推论 5.4.4. 任何理想 $I \subset R$ 都形如 $I = (t)$, 因而当 $I \neq 0$ 时有 $R \xrightarrow{\sim} I$, 映 r 为 rt; 此时乘法同态 $I \otimes M \to M$ 等同于 $M \xrightarrow{x \mapsto tx} M$, 单性等价于 t 非 M 的零因子. □

定理 5.4.7 (平坦性的等式判准) 设 M 为 R-模, 则 M 平坦当且仅当对所有 $r \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ 和满足 $\sum_{i=1}^{r} a_i x_i = 0$ 的 $a_1, \ldots, a_r \in R$ 与 $x_1, \ldots, x_r \in M$, 存在 $s \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$, 一个 R 上的 $r \times s$ 矩阵 $B = (b_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq r \\ 1 \leq j \leq s}}$ 连同 $y_1, \ldots, y_s \in M$, 使得

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_r \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_s \end{pmatrix}, \quad (a_1 \ \cdots \ a_r)\, B = 0_{1 \times s}.$$

证明 对于 "仅当" 方向, 设 M 平坦, 考虑正合列 $0 \to \ker(f) \to R^{\oplus r} \xrightarrow{f} R$, 其中 $f(t_1, \ldots, t_r) := \sum_i a_i t_i$. 由此得到正合列

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \ker(f) \underset{A}{\otimes} M & \longrightarrow & M^{\oplus r} & \longrightarrow & M \\ & & & & (x_1, \ldots, x_r) & \longmapsto & \sum_i a_i x_i \end{array}$$

因此若 $(x_1, \ldots, x_r) \mapsto 0$, 便能表达为 $\sum_{j=1}^{s} (b_{1j}, \ldots, b_{rj}) \otimes y_j \in \ker(f) \underset{A}{\otimes} M$ 的像. 容易验证 $B = (b_{ij})_{i,j}$ 和 $y_1, \ldots, y_s$ 满足所需的等式.

对于 "当" 的方向, 依照推论 5.4.4, 证 $I \otimes M \to M$ 对所有理想 I 为单即可. 设有 $a_1, \ldots, a_r \in I$ 和 $x_1, \ldots, x_r \in M$ 使得 $\sum_{i=1}^{r} a_i \otimes x_i \in I \otimes M$ 被映为 0, 亦即 $\sum_{i=1}^{r} a_i x_i = 0$, 则可取断言中的 B 和 $y_1, \ldots, y_s \in M$, 这导致 $I \otimes M$ 中的等式

$$\sum_{i=1}^{r} a_i \otimes x_i = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{s} a_i b_{ij} \otimes y_j = \sum_{j=1}^{s} \left(\sum_{i=1}^{r} a_i b_{ij} \right) \otimes y_j,$$

内部的和对每个 j 恒为 0. 故 $\sum_{i=1}^{r} a_i \otimes x_i = 0$. □

推论 5.4.8 设 M 为平坦 R-模. 对所有有限秩自由 R-模 F, 同态 $\xi : F \to M$ 和有限生成子模 $K \subset \ker(\xi)$, 存在 $s \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ 和同态 $\beta : F \to R^{\oplus s}$, 使得 $K \subset \ker(\beta)$ 而且下图交换:

$$\begin{array}{ccc} F & \xrightarrow{\beta} & R^{\oplus s} \\ & {\scriptstyle \xi} \searrow \quad \swarrow {\scriptstyle \eta} & \\ & M. & \end{array}$$

证明 不妨设 $F = R^{\oplus r}$, 其中 $r \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$. 将 $R^{\oplus r}$ 的元素视为行向量, 则 ξ 通过 $\xi(t_1, \ldots, t_r) = \sum_i t_i x_i$ 对应到 $(x_1, \ldots, x_r) \in M^{\oplus r}$, 转置后视为取值在 M 的列向量.

首先证明 K 由单个元素 $(a_1, \ldots, a_r)$ 生成的情形. 基于 $\sum_{i=1}^r a_i x_i = 0$, 代入定理 5.4.7 得到 R 上的 $r \times s$ 矩阵 B 和 $(y_1, \ldots, y_s) \in M^{\oplus s}$.

- 定义 $\eta : R^{\oplus s} \to M$ 为 $\eta(u_1, \ldots, u_s) = \sum_j u_j y_j$, 对应到 $(y_1, \ldots, y_s) \in M^{\oplus s}$ 或其转置给出的列向量.
- 定义 $\beta : R^{\oplus r} \to R^{\oplus s}$ 为 $r \times s$ 矩阵 B 对行向量的右乘.

则定理 5.4.7 的陈述翻译为 $\eta\beta = \xi$ 和 $(a_1, \ldots, a_r) \in \ker(\beta)$.

对于一般的 K, 选定其生成元 $k_1, \ldots, k_t$, 对 t 递归地论证. 当 $t > 1$ 时存在交换图表

$$\begin{tikzcd} R^{\oplus r} \arrow[r, "\beta'"] \arrow[dr, "\xi"'] & R^{\oplus s'} \arrow[r, "\beta''"] \arrow[d, "\eta'"] & R^{\oplus s} \arrow[dl, "\eta"] \\ & M & \end{tikzcd}$$

左侧是已知结果施于 ξ 和 $K' := \sum_{i=1}^{t-1} Rk_i$ 的产物, 右侧是施于 η' 和 $R\beta'(k_t)$ 的产物. 取 $\beta := \beta''\beta'$ 便是所需的 β 和 η. □

5.5 忠实平坦模的进阶性质

我们在 §5.1 定义了忠实平坦模和忠实平坦代数; 除命题 5.1.9 外, 该处探讨的性质大多是忠实平坦模和平坦模共有的. 本节将进一步探讨忠实平坦模, 证明它们独有的一些性质和刻画.

符号如前; 特别地, $\otimes$ 代表 R-模的张量积, R 是选定的环.

命题 5.5.1 设 R 为环, 则 R-模 M 是忠实平坦模当且仅当: M 平坦, 而且对 R 的所有极大理想 $\mathfrak{m}$ 皆有 $M/\mathfrak{m}M \neq 0$.

证明 直接运用定义 5.1.2. 设 M 忠实平坦, 则对所有极大理想 $\mathfrak{m}$ 皆有 $M/\mathfrak{m}M \simeq M \otimes (R/\mathfrak{m}) \neq 0$.

反之设 M 平坦而且 $M/\mathfrak{m}M \neq 0$. 给定非零模 N, 存在 R 的真理想 I 和极大理想 $\mathfrak{m} \supset I$, 使得有正合列

$$0 \to R/I \to N, \quad R/I \to R/\mathfrak{m} \to 0.$$

因此有正合列

$$0 \to M \otimes (R/I) \to M \otimes N, \quad M \otimes (R/I) \to \underbrace{M \otimes (R/\mathfrak{m})}_{\neq 0} \to 0.$$

由此知 $M \otimes N \neq 0$. □

推论 5.5.2 设 $\varphi: R \to R'$ 为局部环之间的局部同态 (定义 1.11.7), 而 M 是有限生成 R'-模, $M \neq 0$; 若 M 视为 R-模是平坦的, 则它也是忠实平坦 R-模.

证明 分别记 R 和 R' 的极大理想为 $\mathfrak{m}$ 和 $\mathfrak{m}'$. 由于 $\varphi(\mathfrak{m}) \subset \mathfrak{m}' = \mathrm{rad}(R')$, 断言来自命题 5.5.1 和定理 2.3.4 (代入 R' 的理想 $I = \varphi(\mathfrak{m}R')$). □

上述推论常用于 $R = R'$ 或 $M = R'$ 的特例.

命题 5.5.3 设 $\varphi: R \to S$ 为忠实平坦环同态, 以此视 S 为 R-代数.

(i) 对所有 R-模 M, 典范 R-模同态 $M \to S \otimes M$ 为单; 特别地, 取 $M = R$ 可知 φ 为单.

(ii) 对 R 的所有理想 I, 有 $\varphi^{-1}(\varphi(I)S) = I$.

(iii) 由 φ 诱导的映射 $\mathrm{Spec}(\varphi): \mathrm{Spec}(S) \to \mathrm{Spec}(R)$ 为满.

证明 对于 (i), 命 $N := \ker[M \to S \otimes M]$. 根据平坦性, $N \hookrightarrow M$ 诱导 S-模单同态 $S \otimes N \to S \otimes M$; 后者限制在 $1_S \otimes N$ 上为零, 故恒为零, 配合忠实平坦性推得 $N = 0$.

对于 (ii), 对 $M := R/I$ 应用 (i) 可得 $R/I \to S \otimes (R/I) \simeq S/\varphi(I)S$ 为单, 因此 $\varphi^{-1}(\varphi(I)S) = I$.

对于 (iii), 给定 R 的素理想 $\mathfrak{p}$, 基变换性质表明环同态

$$\varphi_{\mathfrak{p}}: R_{\mathfrak{p}} \to S \otimes R_{\mathfrak{p}} = S_{\mathfrak{p}}$$

忠实平坦; 此处 $S_{\mathfrak{p}}$ 代表环 S 对 $\varphi(R \smallsetminus \mathfrak{p})$ 的局部化, 视为 S-代数. 由

$$\varphi_{\mathfrak{p}}^{-1}(\varphi(\mathfrak{p})S_{\mathfrak{p}}) = \varphi_{\mathfrak{p}}^{-1}(\varphi_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}})S_{\mathfrak{p}}) \xlongequal{\text{(ii)}} \mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}},$$

知 $\varphi(\mathfrak{p})S_{\mathfrak{p}}$ 是 $S_{\mathfrak{p}}$ 的真理想. 包含 $\varphi(\mathfrak{p})S_{\mathfrak{p}}$ 的任何极大理想 $\mathfrak{n}$ 皆满足 $\varphi_{\mathfrak{p}}^{-1}(\mathfrak{n}) = \mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}$. 取 $\mathfrak{m} \in \mathrm{Spec}(S)$ 对应到 $\mathfrak{n} \in \mathrm{Spec}(S_{\mathfrak{p}})$. 从交换图表

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r] & S_{\mathfrak{p}} \\ R \arrow[u, "\varphi"] \arrow[r] & R_{\mathfrak{p}} \arrow[u, "\varphi_{\mathfrak{p}}"'] \end{tikzcd} \quad \text{和相应的} \quad \begin{tikzcd} \mathrm{Spec}(S) \arrow[d, "\mathrm{Spec}(\varphi)"'] & \mathrm{Spec}(S_{\mathfrak{p}}) \arrow[l] \arrow[d, "\mathrm{Spec}(\varphi_{\mathfrak{p}})"] \\ \mathrm{Spec}(R) & \mathrm{Spec}(R_{\mathfrak{p}}) \arrow[l] \end{tikzcd}$$

推得 $\mathfrak{m}$ 在 $\mathrm{Spec}(R)$ 中的像是 $\mathfrak{p}$. □

由此可以推导忠实平坦 R-代数的以下刻画.

定理 5.5.4 对于环同态 $\varphi: R \to S$, 以下陈述等价:

(i) φ 忠实平坦;

(ii) φ 平坦, 并且 $\mathrm{Spec}(\varphi): \mathrm{Spec}(S) \to \mathrm{Spec}(R)$ 为满射;

(iii) φ 平坦, 而且对任何极大理想 $\mathfrak{m} \subset R$ 都存在极大理想 $\mathfrak{n} \subset S$ 使得 $\varphi^{-1}(\mathfrak{n}) = \mathfrak{m}$.

证明 (i) $\implies$ (ii): 包含于命题 5.5.3.

(ii) $\implies$ (iii): 任取 $\mathfrak{q} \in \mathrm{Spec}(S)$ 使之被 $\mathrm{Spec}(\varphi)$ 映为 $\mathfrak{m} \in \mathrm{Spec}(R)$, 则包含 $\mathfrak{q}$ 的任何极大理想 $\mathfrak{n} \subset S$ 也被映为 $\mathfrak{m}$.

(iii) $\implies$ (i): 对 R 的所有极大理想 $\mathfrak{m}$, 由于有 S 的极大理想 $\mathfrak{n}$ 满足 $\varphi^{-1}(\mathfrak{n}) = \mathfrak{m}$, 故 $\mathfrak{n} \supset \varphi(\mathfrak{m})S$, 故 $\varphi(\mathfrak{m})S \neq S$. 代入命题 5.5.1 的判准知 S 是忠实平坦 R-模. □

5.6 平坦下降

平坦下降是代数几何学中的基本工具. 首先回顾 [8, §7.9] 的部分内容. 以下将在张量积中省略括号和结合约束, 直接按多元张量积处理.

约定 5.6.1 给定环同态 $R \to S$, 对所有 $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ 定义环 $S^{\otimes n} := S \underset{R}{\otimes} \cdots \underset{R}{\otimes} S$, 它带有将 S 嵌入第 i 个向量槽的典范同态

$$\iota_i = \iota_i^n : S \to S^{\otimes n}, \quad 1 \leq i \leq n;$$

对于 $n = 3$ 的情形, 另对所有 $1 \leq i \neq j \leq 3$ 定义

$$\iota_{ij}^3 : S^{\otimes 2} \to S^{\otimes 3}$$

为向第 (i, j) 个张量槽的嵌入, 它们满足 $\iota_{ij}^3 \iota_1 = \iota_i^3$ 和 $\iota_{ij}^3 \iota_2 = \iota_j^3$.

接着设 M 为任意 S-模. 对于 $S^{\otimes 2}$-模同态

$$\tilde{a} : S^{\otimes 2} \underset{S, \iota_1}{\otimes} M \to S^{\otimes 2} \underset{S, \iota_2}{\otimes} M, \tag{5.6.1}$$

可定义 $S^{\otimes 3}$-模同态

$$\tilde{a}_{ji} := S^{\otimes 3} \underset{S, \iota_{ij}^3}{\otimes} \tilde{a} : S^{\otimes 3} \underset{S, \iota_i^3}{\otimes} M \to S^{\otimes 3} \underset{S, \iota_j^3}{\otimes} M; \tag{5.6.2}$$

简言之, 它是在 i, j 之外的张量槽对 $\tilde{a}$ 补上 id_S 的产物.

注记 5.6.2 若将 S-模 M 视为 R-模, 则有 S-模的典范同构

$$S \underset{R}{\otimes} M \xrightarrow{\sim} S^{\otimes 2} \underset{S, \iota_2}{\otimes} M, \quad t \otimes x \mapsto t \otimes 1 \otimes x,$$

右式的 S-模结构来自 $\iota_1 : S \to S^{\otimes 2}$; 结合命题 1.3.3 的伴随性质, 便有 S-模的典范同构

$$\mathrm{Hom}_S\left(M, S \underset{R}{\otimes} M\right) \simeq \mathrm{Hom}_{S^{\otimes 2}}\left(S^{\otimes 2} \underset{S, \iota_1}{\otimes} M, S^{\otimes 2} \underset{S, \iota_2}{\otimes} M\right).$$

因此指定 (5.6.1) 的 $\tilde{a}$ 相当于指定 S-模同态 $a : M \to S \underset{R}{\otimes} M$.

兹考察 $M = S \underset{R}{\otimes} N$, 其中 N 是 R-模的简单情形. 此时分别有 $S^{\otimes 2}$-模和 $S^{\otimes 3}$-模的典范同构

$$S^{\otimes 2} \underset{S,\iota_i}{\otimes} M \simeq S^{\otimes 2} \underset{R}{\otimes} N, \quad S^{\otimes 3} \underset{S,\iota_i^3}{\otimes} M \simeq S^{\otimes 3} \underset{R}{\otimes} N.$$

若 $\tilde{a}$ 按此取为 $S^{\otimes 2} \underset{R}{\otimes} N$ 上的恒等, 则 $\tilde{a}_{ji}$ 化为 $S^{\otimes 3} \underset{R}{\otimes} N$ 上的恒等, 而 a 化为

$$S \underset{R}{\otimes} N \xrightarrow{a} S^{\otimes 2} \underset{R}{\otimes} N, \quad s \otimes y \mapsto s \otimes 1 \otimes y.$$

定义 5.6.3 (下降资料) 给定同态 $R \to S$, 命 $\mathrm{Desc}_{R\to S}$ 为以下范畴.

▷ **对象** 资料 $(M, \tilde{a})$, 此处 M 是 S-模而 $\tilde{a} : S^{\otimes 2} \underset{S,\iota_1}{\otimes} M \xrightarrow{\sim} S^{\otimes 2} \underset{S,\iota_2}{\otimes} M$ 是 $S^{\otimes 2}$-模同构, 并且 (5.6.2) 定义的同态满足余圈条件:

$$\tilde{a}_{31} = \tilde{a}_{32}\tilde{a}_{21}.$$

▷ **态射** 从 $(M, \tilde{a})$ 到 $(M', \tilde{a}')$ 的态射是 S-模同态 $f : M \to M'$, 要求满足以下等式

$$(\mathrm{id}_S^{\otimes 2} \otimes f)\tilde{a} = \tilde{a}'(\mathrm{id}_S^{\otimes 2} f).$$

范畴 $\mathrm{Desc}_{R\to S}$ 的对象又称为相对于 $R \to S$ 的下降资料.

结合先前讨论, 立得函子 $S \underset{R}{\otimes} (\cdot) : R\text{-}\mathsf{Mod} \to \mathrm{Desc}_{R\to S}$, 映对象 N 为 $\left(S \underset{R}{\otimes} N, \mathrm{id}\right)$, 映态射 $g : N \to N'$ 为 $\mathrm{id}_S \otimes g$. 此外也有忘却函子 $\mathrm{Desc}_{R\to S} \to S\text{-}\mathsf{Mod}$.

以下考虑使 S 成为忠实平坦 R-代数的环同态 $R \to S$; 此时也称 $R \to S$ 为忠实平坦同态.

定理 5.6.4 (平坦下降 [8, 定理 7.9.6]) 设环同态 $R \to S$ 忠实平坦, 则 $S \underset{R}{\otimes} (\cdot) : R\text{-}\mathsf{Mod} \to \mathrm{Desc}_{R\to S}$ 是范畴等价, 它的一个逆拟函子 $D : \mathrm{Desc}_{R\to S} \to R\text{-}\mathsf{Mod}$ 可以取为 $R\text{-}\mathsf{Mod}$ 中的等化子

$$0 \longrightarrow D(M, \tilde{a}) \longrightarrow M \underset{x \mapsto 1\otimes x}{\overset{a}{\rightrightarrows}} S \underset{R}{\otimes} M,$$

其中 a 是以注记 5.6.2 的方式对应到 $\tilde{a}$ 的 S-模同态.

因此, 指定 R-模 N 相当于指定 S-模 M 连同 $\tilde{a}$ 给出的下降资料. 平坦下降的证明见诸引文, 它总体是形式化的, 归结为范畴论中的 Beck 单子性定理.

进一步, 指定 R-代数 A (或 A-模) 相当于指定 S-代数 B (或 B-模) 连同与乘法结构兼容的下降资料, 此处 B 取为 $S \underset{R}{\otimes} A$; 详见 [8, 注记 7.9.7].

在应用中, 我们还关心能否从 M (或 B) 读出 N (或 A) 的性质; 与模 M (或代数 B) 本身的下降相对照, 这称为性质的下降. 能进行平坦下降的性质甚多, 以下主要探讨模和代数的有限生成或有限展示性质, 分别见诸定义 1.5.1 和定义 1.9.1.

命题 5.6.5 以下 $R \to S$ 是选定的忠实平坦同态.

- ◇ 设 N 为 R-模, $M = S \underset{R}{\otimes} N$ 为相应的 S-模. 下列模论性质 $\mathcal{P}$ 对 S-模 M 成立当且仅当 $\mathcal{P}$ 对 R-模 N 成立: (i) 平坦, (ii) 有限生成, (iii) 有限展示.
- ◇ 设 A 为 R-代数, $B = S \underset{R}{\otimes} A$ 为相应的 S-代数. 下列代数性质 $\mathcal{P}$ 对 S-代数 B 成立当且仅当 $\mathcal{P}$ 对 R-代数 A 成立: (i)' 有限生成, (ii)' 有限展示.

证明 先处理模的情形. (i) 不过是复述命题 5.1.9. (ii) 和 (iii) 的 "当" 方向来自命题 1.5.8; 以下对 (ii) 和 (iii) 证明自 M 推 N 的 "仅当" 方向.

对于 (ii), 基于 [8, 引理 7.7.15] 或简单练习, 可见 N 有限生成等价于以下断言: 若 N 有一族子对象 $(N_i)_{i\in I}$ 使得 $\sum_{i\in I} N_i = N$, 则存在有限子集 $I_0 \subset I$ 使得 $\sum_{i\in I_0} N_i = N$.

设 M 有限生成. 记 $M_i := S \underset{R}{\otimes} N_i$, 则从 $\sum_i N_i = \mathrm{im}[\bigoplus_i N_i \to N]$ 和平坦条件可知 $\sum_{i\in I} M_i = \mathrm{im}[\bigoplus_i M_i \to M] = M$. 但因为 M 有限生成, 存在有限子集 $I_0 \subset I$ 使得 $\sum_{i\in I_0} M_i = M$, 亦即 $\bigoplus_{i\in I_0} M_i \to M$ 满. 忠实平坦条件遂导致 $\bigoplus_{i\in I_0} N_i \to N$ 满. 断言得证.

对于 (iii), 设 M 有限展示, 则 (ii) 表明 N 有限生成; 取 R-模的短正合列

$$0 \to K \to R^{\oplus a} \to N \to 0, \quad a \in \mathbb{Z}_{\geq 0},$$

则有 S-模的短正合列 $0 \to S \underset{R}{\otimes} K \to S^{\oplus a} \to M \to 0$. 然而引理 1.5.2 (iii) 蕴涵 $S \underset{R}{\otimes} K$ 是有限生成 S-模, 故 (ii) 表明 K 有限生成. 综上, N 是有限展示 R-模.

下面探讨代数的情形. (i)' 和 (ii)' 的 "当" 方向均来自命题 1.9.6. 以下处理 "当" 的方向.

对于 (i)', 设 B 作为 S-代数有生成元 $y_1, \ldots, y_n$. 将每个 y_i 展开成 $\sum_j s_{ij} \otimes a_{ij}$, 其中 $s_{ij} \in S$ 而 $a_{ij} \in A$; 用这些 $1 \otimes a_{ij}$ 取代 y_i 并相应地增大 n, 便可设这些生成元均形如 $y_i = 1 \otimes x_i$. 于是 S-代数同态

$$\beta : S[X_1, \ldots, X_n] \to B, \quad X_i \mapsto y_i$$

是对 R-代数同态

$$\alpha : R[X_1, \ldots, X_n] \to A, \quad X_i \mapsto x_i$$

取函子 $S \underset{R}{\otimes} (\cdot)$ 的产物; 既然 β 满, 忠实平坦性质蕴涵 α 亦满. 综上, $x_1, \ldots, x_n$ 生成 R-代数 A.

对于 (ii)', 设 B 是有限展示 S-代数. 根据 (i), R-代数 A 有生成元 $x_1, \ldots, x_n$. 命 $y_i := 1 \otimes x_i$ 并考虑 $X_i \mapsto y_i$ (或 $X_i \mapsto x_i$) 给出的 S-代数满同态 $\beta : S[X_1, \ldots, X_n] \to B$ (或 R-代数满同态 $\alpha : R[X_1, \ldots, X_n] \to A$). 命题 1.9.5 说明 $\ker(\beta)$ 是有限生成理想. 忠实平坦性质将 $\ker(\beta)$ 等同于 $S \underset{R}{\otimes} \ker(\alpha)$.

然而按照 (i)' 的论证, 理想 $\ker(\beta)$ 的生成元可以取作 $b_i = 1 \otimes a_i$ 之形, 其中 $a_i \in \ker(\alpha)$ 而 $i = 1, \ldots, m$. 它们确定的 B-模同态 $B^{\oplus m} \to \ker(\beta)$ 因之是对由 $a_1, \ldots, a_m$ 确定的 A-模同态 $A^{\oplus m} \to \ker(\alpha)$ 取 $S \underset{R}{\otimes} (\cdot)$ 的产物. 前者满蕴涵后者亦满. 综上, $\ker(\alpha)$ 是有限生成理想, 故 A 是有限展示 R-代数. $\square$

推论 5.6.6 设 $R \to S$ 为忠实平坦同态. 若 S 是 Noether 环, 则 R-亦然.

证明 环的 Noether 条件等价于所有理想皆有限生成. 若 $I \subset R$ 是理想 (亦即子模), 则 $S \underset{R}{\otimes} I \hookrightarrow S$ 亦然. 代入命题 5.6.5 (ii) 处理. $\square$

最后探讨平坦下降的一种重要特例. 设 R 为环, $\mathcal{U}$ 是 $\mathrm{Spec}(R)$ 对 Zariski 拓扑的一族开覆盖, 其中的开子集形如 (1.10.1) 定义的 $D(f)$. 素谱拟紧 (命题 2.5.1), 故存在有限子覆盖 $D(f_1), \ldots, D(f_n) \in \mathcal{U}$, 亦即 $\mathrm{Spec}(R) = \bigcup_{i=1}^n D(f_i)$.

引理 5.6.7 对于上述资料, 命 $S := \prod_{i=1}^n R[f_i^{-1}]$, 考虑由所有局部化同态 $R \to R[f_i]$ 诱导的环同态 $R \to S$, 则 S 是忠实平坦 R-代数.

证明 每个 $R[f_i]$ 都是平坦 R-模, 故平坦模的直和性质蕴涵 $\bigoplus_i R[f_i]$ 亦然. 至于平坦性, 定理 5.5.4 表明证 $\mathrm{Spec}(S) \to \mathrm{Spec}(R)$ 满即可. 然而它和每个 $\mathrm{Spec}(R[f_i]) \to \mathrm{Spec}(S)$ 的合成是 $\mathrm{Spec}(R[f_i]) \to \mathrm{Spec}(R)$, 以 $D(f_i)$ 为像. $\square$

必须对引理 5.6.7 中的忠实平坦 R-代数 $S = \prod_{i=1}^n R[f_i^{-1}]$ 明确其下降资料.

- 对所有 $m \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ 皆有
$$S^{\otimes m} \simeq \bigoplus_{1 \leq i_1, \ldots, i_m \leq n} R\left[(f_{i_1} \cdots f_{i_m})^{-1}\right],$$
使得 $\iota_k : S \to S^{\otimes m}$ 将 S 中的直和项 $R[f_i^{-1}]$ 映入上式中 $i_k = i$ 给出的部分, 方法是取局部化同态 $R[f_i^{-1}] \to R[(f_{i_1} \cdots f_{i_m})^{-1}]$.
- 记 $e_1, \ldots, e_n \in S$ 为直积分解给出的幂等元. 指定 S-模 M 相当于指定 $M_1, \ldots, M_n$, 其中每个 M_i 都是 $R[f_i^{-1}]$-模, 而且它们满足 $M = \bigoplus_{i=1}^n M_i$ 和 $M_i = e_i M$, 见 [7, 引理 6.2.5]; 由于 $S^{\otimes m}$ 同样是直积, 其上的模仍有类似描述.
- 基于先前同构, 对所有 S-模 M 皆有典范的 $S^{\otimes 2}$-模同构
$$S^{\otimes 2} \underset{S, \iota_1}{\otimes} M \simeq \bigoplus_{1 \leq p, q \leq n} \underbrace{M_p[f_q^{-1}]}_{R[(f_p f_q)^{-1}]\text{-模}}, \quad S^{\otimes 2} \underset{S, \iota_2}{\otimes} M \simeq \bigoplus_{1 \leq p, q \leq n} \underbrace{M_q[f_p^{-1}]}_{R[(f_q f_p)^{-1}]\text{-模}}.$$
指定 (5.6.1) 的 $\tilde{a}$ 相当于对所有 $1 \leq p, q \leq n$ 指定 $\varphi_{q,p} : M_p[f_q^{-1}] \to M_q[f_p^{-1}]$, 而 (5.6.2) 的 $\tilde{a}_{ji}$ 相当于对所有 $1 \leq p, q, r \leq n$ 取
$$\varphi_{q,p}[f_r^{-1}] : M_p\left[(f_q f_r)^{-1}\right] \to M_q\left[(f_p f_r)^{-1}\right],$$
此处 p, q, r 分别对应到 $S^{\otimes 3} \underset{S, \iota_1}{\otimes} M$ 的分解中第 i 个, 第 j 个以及剩余的下标.

◇ 注记 5.6.2 的 S-模同构按此化为

$$S \underset{R}{\otimes} \bigoplus_{i=1}^{n} M_i \xrightarrow{\sim} \bigoplus_{1\leq p,q\leq n} M_q[f_p^{-1}], \quad (t_i)_{i=1}^n \otimes (x_i)_{i=1}^n \mapsto \left(t_p \cdot \frac{x_q}{1}\right)_{1\leq p,q\leq n},$$

该处的 S-模同态 a 则化为

$$\bigoplus_{i=1}^{n} M_i \to \bigoplus_{1\leq p,q\leq n} M_q[f_p^{-1}], \quad (x_i)_{i=1}^n \mapsto \left(\varphi_{q,p}\left(\frac{x_p}{1}\right)\right)_{1\leq p,q\leq n}.$$

综上, 此时 $\mathrm{Desc}_{R\to S}$ 的对象相当于 $(M_i)_{i=1}^n$ 连同一族 $R[(f_pf_q)^{-1}]$-模同构 $\varphi_{p,q}: M_p[f_q^{-1}] \xrightarrow{\sim} M_q[f_p^{-1}]$, 要求对所有 $1\leq p,q,r\leq n$ 满足余圈条件

$$\varphi_{r,p} = \varphi_{r,q}\varphi_{q,p} : M_p\left[(f_qf_r)^{-1}\right] \xrightarrow{\sim} M_r\left[(f_pf_q)^{-1}\right].$$

其间的态射是与此兼容的模同态.

这一切与几何或拓扑学中的粘合条件明显相似, 定理 5.6.4 的平坦下降也有相应的改述, 例如对于 $\mathrm{Desc}_{R\to S}$ 的对象 $((M_i)_i, (\varphi_{p,q})_{p,q})$ 和对应的 R-模 N, 该处的等化子图表改写成

$$\begin{array}{ccccccc} & & & (x_i)_{i=1}^n & \longmapsto & \left(\varphi_{q,p}(\frac{x_p}{1})\right)_{1\leq p,q\leq n} & \\ & & & \Cap & & \Cap & \\ 0 \longrightarrow & N & \longrightarrow & \bigoplus_{i=1}^{n} M_i & \rightrightarrows & \bigoplus_{1\leq p,q\leq n} M_q[f_p^{-1}]. & \\ & & & \Cup & & \Cup & \\ & & & (x_i)_{i=1}^n & \longmapsto & \left(\frac{x_q}{1}\right)_{1\leq p,q\leq n} & \end{array} \tag{5.6.3}$$

命题 5.6.5 有以下的对应版本.

命题 5.6.8 考虑环 R. 对于模 (或代数) 的性质 $\mathcal{P}$, 若存在开覆盖 $\mathrm{Spec}(R) = \bigcup_{i\in I} D(f_i)$ 使得模 (或代数) 对每个乘性子集 $f_i^{\mathbb{Z}_{\geq 0}}$ 的局部化皆满足 $\mathcal{P}$, 则称 $\mathcal{P}$ Zariski-局部地成立.

◇ 设 N 为 R-模, 下列模论性质 $\mathcal{P}$ 对 N Zariski-局部地成立当且仅当 $\mathcal{P}$ 对 N 成立: (i) 平坦, (ii) 有限生成, (iii) 有限展示.

◇ 设 A 为 R-代数, 下列代数性质 $\mathcal{P}$ 对 A Zariski-局部地成立当且仅当 $\mathcal{P}$ 对 A 成立: (i)' 有限生成, (ii)' 有限展示.

证明 只需 "仅当" 方向. 以 R-模 N 的性质为例, 如先前所见, 若 $\mathcal{P}$ 对 N Zariski-局部地成立, 则存在 $f_1,\ldots,f_n\in R$ 使得 $\mathrm{Spec}(R) = \bigcup_{i=1}^n D(f_i)$ 而每个 $M_i := N[f_i^{-1}]$ 皆有性质 $\mathcal{P}$. 易见所论性质皆兼容于环的有限直积: 若每个 $R[f_i^{-1}]$-模 $M_i := N[f_i^{-1}]$ 皆有性质 $\mathcal{P}$, 则 $S := \prod_{i=1}^n R[f_i^{-1}]$ 上的模 $M := \bigoplus_{i=1}^n M_i$ 亦然, 换言之一切都能逐分量地处理.

综上, 问题化为说明若 S-模 M 有性质 $\mathcal{P}$, 则 R-模 N 亦然. 鉴于引理 5.6.7, 这不过是命题 5.6.5 的应用.

关于 R-代数 A 的情形, 论证无异. □

5.7　平坦模和投射模的结构

首先刻画局部环 (定义 1.11.1) 上的有限生成平坦模; 对于极大理想幂零的情形, 结论也适用于一般的平坦模.

引理 5.7.1 设 R 为局部环, 且其极大理想 $\mathfrak{m}$ 幂零. 若平坦 R-模 M 的一族元素 $\{x_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$ 在 $R/\mathfrak{m}$-模 $M/\mathfrak{m}M$ 中的像为一组基, 则 $\{x_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$ 也是 M 的一组基. 特别地, 此时任意平坦 R-模 M 皆自由.

若将条件改为 R 是环, $\mathfrak{m}$ 是包含于 $\operatorname{rad}(R)$ 的理想, M 是有限展示平坦 R-模, 而 $\mathcal{A}$ 有限, 则同样结论仍成立.

证明 命题 2.3.6 (iii) 说明 $\{x_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$ 生成 M, 相应地有正合列

$$1 \to K \to R^{\oplus\mathcal{A}} \to M \to 0,$$

和 $R/\mathfrak{m}\otimes(\cdot)$ 作张量积并应用 $\operatorname{Tor}_1^R(R/\mathfrak{m}, M) = 0$ 可得 $K/\mathfrak{m}K = 0$, 继而由命题 2.3.6 得 $K = 0$.

若将条件改为 $\mathfrak{m}\subset\operatorname{rad}(R)$, 模 M 是有限展示平坦模, 而集合 $\mathcal{A}$ 有限, 则可用定理 2.3.4 和推论 2.3.5 取代命题 2.3.6, 注意到此时 K 是有限生成的. □

命题 5.7.2 设 R 为局部环, M 为有限生成 R-模, 则以下陈述等价:

(i) M 自由,

(ii) M 投射,

(iii) M 平坦.

若 M 为任意 R-模, 但要求 R 的极大理想 $\mathfrak{m}$ 幂零, 上述等价仍成立.

证明 自由蕴涵投射, 投射蕴涵平坦 (例 5.1.8). 下面证 (iii) $\implies$ (i). 记 R 的唯一极大理想为 $\mathfrak{m}$.

对于 $\mathfrak{m}$ 幂零的情形, (iii) $\implies$ (i) 是引理 5.7.1 的内容. 以下探讨 M 有限生成的情形.

取 $R/\mathfrak{m}$-向量空间 $M/\mathfrak{m}M$ 的基 $\bar{x}_1,\ldots\bar{x}_n$, 对每个 $1\leq i\leq n$ 选取 $\bar{x}_i$ 的原像 $x_i\in M$. 推论 2.3.5 蕴涵 $x_1,\ldots,x_n$ 生成 M. 仅需再说明它们线性无关, 亦即 $\sum_{i=1}^n a_i x_i = 0$ 当且仅当 $a_1=\cdots=a_n=0$.

以下递归地对所有 $r\geq 1$ 论证若 M 的任一列元素 $x_1,\ldots,x_r$ 在 $R/\mathfrak{m}$-向量空间 $M/\mathfrak{m}M$ 中的像线性无关, 则它们在 R-模 M 中线性无关. 考虑 $r=1$ 的情形. 设 $a_1x_1 = 0$, 其中 $x_1\in M\smallsetminus\mathfrak{m}M$, 则定理 5.4.7 给出 $y_1,\ldots,y_s\in M$ 和 $b_1,\ldots,b_s\in R$ 使得 $x_1=\sum_{j=1}^s b_j y_j$ 而 $a_1 b_j = 0$ 对所有 $1\leq j\leq s$ 成立. 第一个等式导致存在 j 使得 $b_j\notin\mathfrak{m}$, 第二个等式进一步给出 $a_1 = 0$.

现在设 $r \geq 2$, 而 $a_1x_1 + \cdots + a_rx_r = 0$, 要求所有 x_i 的像 $\bar{x}_i \in M/\mathfrak{m}M$ 线性无关, 则 $a_1, \ldots, a_r \in \mathfrak{m}$. 定理 5.4.7 给出 $y_1, \ldots, y_s \in M$ 和 R 上的 $r \times s$ 矩阵 $(b_{ij})_{i,j}$ 使得

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_r \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_s \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_r \end{pmatrix} B = 0_{1\times s}.$$

由于 $x_r \notin \mathfrak{m}M$, 存在 $1 \leq j \leq s$ 使得 $b_{rj} \notin \mathfrak{m}$, 继而从 $\begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_r \end{pmatrix} B = 0_{1\times s}$ 的第 j 列推得

$$\sum_{i=1}^{r} a_i b_{ij} = 0, \quad a_r = -b_{rj}^{-1} \sum_{i=1}^{r-1} a_i b_{ij}.$$

原线性关系式改写为

$$\sum_{i=1}^{r-1} a_i \left(x_i - b_{rj}^{-1} b_{ij} x_r \right) = 0.$$

但易见 $x_i - b_{rj}^{-1} b_{ij} x_r$ 在 $M/\mathfrak{m}M$ 中的像线性无关 $(i = 1, \ldots, r-1)$, 故 $a_1 = \cdots = a_{r-1} = 0$, 进一步得到 $a_r = 0$. 明所欲证. □

推论 5.7.3 设 R 为环, M 为有限生成 R-模, 则以下陈述等价:

(i) M 平坦;

(ii) $M_{\mathfrak{p}}$ 对 R 的所有素理想 $\mathfrak{p}$ 都是自由 $R_{\mathfrak{p}}$-模;

(iii) $M_{\mathfrak{m}}$ 对 R 的所有极大理想 $\mathfrak{m}$ 都是自由 $R_{\mathfrak{m}}$-模.

证明 结合命题 5.2.1 和 5.7.2. □

以此为基础, 便得到有限生成投射模的如下刻画.

命题 5.7.4 对于 R-模 M, 以下陈述等价:

(i) M 是有限生成投射模;

(ii) M 是有限展示平坦模;

(iii) M 是有限生成模, 而且对所有素理想 $\mathfrak{p}$ 皆存在 $f \in R \smallsetminus \mathfrak{p}$ 使得 $M[f^{-1}]$ 是自由 $R[f^{-1}]$-模;

(iv) M 是有限生成模, 映射

$$\mathfrak{p} \mapsto \dim_{\kappa(\mathfrak{p})} M \otimes \kappa(\mathfrak{p})$$

相对于 $\mathrm{Spec}(R)$ 上的 Zariski 拓扑是局部常值映射, 且每个 $M_{\mathfrak{p}}$ 皆自由.

证明 循 (i) $\iff$ (ii) $\iff$ (iii) $\iff$ (iv) 的方式论证.

(i) $\implies$ (ii). 投射蕴涵平坦, 而有限生成投射模总是有限展示的 (注记 1.5.4).

(ii) $\implies$ (i). 推论 5.7.3 蕴涵 $M_{\mathfrak{m}}$ 对所有极大理想 $\mathfrak{m}$ 都是投射 $R_{\mathfrak{m}}$-模. 命题 5.2.3 给出加性函子 $R\text{-Mod} \to R_{\mathfrak{m}}\text{-Mod}$ 之间的同构

$$R_{\mathfrak{m}} \otimes \mathrm{Hom}_R(M, \cdot) \simeq \mathrm{Hom}_{R_{\mathfrak{m}}}(M_{\mathfrak{m}}, (\cdot)_{\mathfrak{m}}).$$

因此, 根据局部化的正合性与引理 2.4.1 关于正合性的部分, 可见 $M_{\mathfrak{m}}$ 对所有 $\mathfrak{m}$ 投射蕴涵 M 投射.

(ii) $\implies$ (iii). 选定素理想 $\mathfrak{p}$, 推论 5.7.3 给出 $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ 和同构 $\varphi_{\mathfrak{p}} : R_{\mathfrak{p}}^{\oplus n} \xrightarrow{\sim} M_{\mathfrak{p}}$. 有限展示条件和命题 5.2.3 给出典范同构

$$R_{\mathfrak{p}} \otimes \mathrm{Hom}_R\left(R^{\oplus n}, M\right) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{R_{\mathfrak{p}}}\left(R_{\mathfrak{p}}^{\oplus n}, M_{\mathfrak{p}}\right), \quad 1 \otimes \psi \mapsto \psi_{\mathfrak{p}};$$

左式表作 $\varinjlim_{f \notin \mathfrak{p}} \mathrm{Hom}_R(R^{\oplus n}, M)[f^{-1}]$, 且这是滤过的 (命题 1.7.3). 综上, 可取到 $f \notin \mathfrak{p}$ 连同 $\varphi_f : R[f^{-1}]^{\oplus n} \to M[f^{-1}]$ 使得 $\varphi_{\mathfrak{p}}$ 是 φ_f 在 $\mathfrak{p}[f^{-1}]$ 处的局部化.

将 φ_f 置入 $R[f^{-1}]$-模的正合列

$$0 \to K \to R[f^{-1}]^{\oplus n} \to M[f^{-1}] \to C \to 0.$$

因为 $\varphi_{\mathfrak{p}}$ 是同构, $K_{\mathfrak{p}} = 0 = C_{\mathfrak{p}}$. 因为 C 有限生成, 故可取到 $\underline{g} = \frac{g}{f^a} \in R[f^{-1}] \smallsetminus \mathfrak{p}[f^{-1}]$ 使得 $C[\underline{g}^{-1}] = 0$; 注意到 $g \notin \mathfrak{p}$. 分段局部化给出 $R[(fg)^{-1}]$-模正合列

$$0 \to K[\underline{g}^{-1}] \to R[(fg)^{-1}]^{\oplus n} \to M[(fg)^{-1}] \to 0.$$

然而 $M[(fg)^{-1}]$ 是有限展示 $R[(fg)^{-1}]$-模 (推论 1.6.7), 故 $K[\underline{g}^{-1}]$ 有限生成 (引理 1.5.2), 而它在 $\mathfrak{p}[(fg)^{-1}]$ 处局部化为 0. 同理可继续取到 $\underline{h} = \frac{h}{(fg)^b} \in R[(fg)^{-1}] \smallsetminus \mathfrak{p}[(fg)^{-1}]$ 使得 $K[\underline{g}^{-1}][\underline{h}^{-1}] = 0$; 仍注意到 $h \notin \mathfrak{p}$..

综上, 适当调整 $f \in R \smallsetminus \mathfrak{p}$ 之后, 总能取到同构 $\varphi_f : R[f^{-1}]^{\oplus n} \xrightarrow{\sim} M[f^{-1}]$ 使得它在 $\mathfrak{p}[f^{-1}]$ 处的局部化是 $\varphi_{\mathfrak{p}}$, 从而 $M[f^{-1}]$ 自由.

(iii) $\implies$ (ii). 对所有素理想 $\mathfrak{p}$ 选取条件中的 $f \in R \smallsetminus \mathfrak{p}$, 则相应的 $D(f)$ 给出 $\mathrm{Spec}(R)$ 的开覆盖, 应用命题 5.6.8 遂得 M 的有限展示性质. 平坦性质是推论 5.7.3 的应用.

(iii) $\implies$ (iv). 条件表明 $\mathrm{Spec}(R)$ 可以用一族形如 $D(f)$ 的开子集覆盖, 使得 $M[f^{-1}]$ 对其中的每个 f 都是自由 $R[f^{-1}]$-模. 对于 $\mathfrak{p} \in D(f)$, 分段局部化和 (1.11.1) 表明

$$\begin{aligned} \dim_{\kappa(\mathfrak{p})} M \otimes \kappa(\mathfrak{p}) &= \dim_{\kappa(\mathfrak{p})} M_{\mathfrak{p}} \underset{R_{\mathfrak{p}}}{\otimes} \kappa(\mathfrak{p}) \\ &= \dim_{\kappa(\mathfrak{p})} M[f^{-1}] \underset{R[f^{-1}]}{\otimes} \kappa(\mathfrak{p}); \end{aligned}$$

但末项无非 $M[f^{-1}]$ 的秩, 故所论映射在 $D(f)$ 上为常值.

(iv) $\implies$ (iii). 可取 $x_1, \ldots, x_k \in M$ 使得它们被映为 $\kappa(\mathfrak{p})$-向量空间 $M \otimes \kappa(\mathfrak{p})$ 的基, 推论 2.3.5 (iii) 表明它们在 $R_\mathfrak{p}$-模 $M_\mathfrak{p}$ 中的像是一族生成元.

考虑映 $(t_1, \ldots, t_k)$ 为 $\sum_{i=1}^k t_i x_i$ 的同态 $\varphi : R^{\oplus k} \to M$, 其余核 C 有限生成, 并满足 $C_\mathfrak{p} = 0$, 因而存在 $f \in R \smallsetminus \mathfrak{p}$ 使得 $C[f^{-1}] = 0$. 另一方面, 存在 $g \in R \smallsetminus \mathfrak{p}$ 使得 $\mathfrak{p}' \mapsto \dim_{\kappa(\mathfrak{p}')} M \otimes \kappa(\mathfrak{p}')$ 在 $D(g)$ 上取常值 k. 兹断言 φ 诱导之 $\varphi[(fg)^{-1}] : R[(fg)^{-1}]^{\oplus k} \to M[(fg)^{-1}]$ 是同构, 这将给出 (iii).

已知 $\varphi[f^{-1}]$ 满; 鉴于引理 2.4.1 的单性部分, 再证 $\varphi_{\mathfrak{p}'}$ 对所有 $\mathfrak{p}' \in D(fg)$ 皆单即可. 然而取基后 $\varphi_{\mathfrak{p}'}$ 等同于 $R_{\mathfrak{p}'}^{\oplus k}$ 的自同态, 它在 $\kappa(\mathfrak{p}')^{\oplus k}$ 上诱导满射, 因此推论 2.3.5 (ii) 蕴涵其为满自同态. 代入推论 2.3.7 可知 $\varphi_{\mathfrak{p}'}$ 是同构. □

命题 5.7.4 (iii) 相当于模的局部有限秩自由性质. 用几何语言来说, 有限生成投射模按此对应到仿射概形 $\operatorname{Spec}(R)$ 上的向量丛. 对于向量丛也有如下的 "平坦下降" 性质, 见 §5.6.

推论 5.7.5 设 $R \to S$ 为忠实平坦的环同态, M 为 R-模, 则 M 是有限生成投射 R-模当且仅当 $S \underset{R}{\otimes} M$ 是有限生成投射 S-模.

证明 结合命题 5.6.5 与命题 5.7.4. □

在命题 5.7.4 (iv) 中, 也可以将条件放宽为 M 有限生成, $\mathfrak{m} \mapsto \dim_{\kappa(\mathfrak{m})} M \otimes \kappa(\mathfrak{m})$ 是 $\operatorname{MaxSpec}(R)$ 上的局部常值映射, 且每个 $M_\mathfrak{m}$ 皆自由; 由之依然能推得 (iii). 更常用的则是以下变体.

命题 5.7.6 设 R 是既约环, 则有限生成 R-模 M 是投射模当且仅当映射

$$\mathfrak{p} \mapsto \dim_{\kappa(\mathfrak{p})} M \otimes \kappa(\mathfrak{p})$$

相对于 $\operatorname{Spec}(R)$ 上的 Zariski 拓扑是局部常值映射.

证明 "仅当" 方向已包含于命题 5.7.4, 不需要既约条件. 对于 "当" 的方向, 以下重拾命题 5.7.4 (iv) $\implies$ (iii) 的论证, 但不再要求 $M_\mathfrak{p}$ 对所有 $\mathfrak{p}$ 皆自由.

按照该处论证考虑 $\mathfrak{p} \in D(f)$ 和 g, 得到 $\varphi : R^{\oplus k} \to M$ 使得 $\varphi[f^{-1}]$ 满. 目标是证明 $\varphi[(fg)^{-1}]$ 为同构. 不同处只在证明的最后一段.

对于所有 $\mathfrak{p} \in D(fg)$, 诱导同态 $\varphi_{\kappa(\mathfrak{p})} : \kappa(\mathfrak{p})^{\oplus k} \to M \otimes \kappa(\mathfrak{p})$ 是 $\kappa(\mathfrak{p})$-线性满射, 两边维数相同且有限, 因而 $\varphi_{\kappa(\mathfrak{p})}$ 是向量空间同构. 现在注意到 $D(fg) \simeq \operatorname{Spec} R[(fg)^{-1}]$, 而 R 既约蕴涵 $R[(fg)^{-1}]$ 既约; 若 $\mathfrak{p}$ 是其极小素理想, 则 $\kappa(\mathfrak{p}) = R_\mathfrak{p}$, 故此时 $\varphi_\mathfrak{p} = \varphi_{\kappa(\mathfrak{p})}$ 为单同态.

若 $(t_1, \ldots, t_k) \in \ker\left(\varphi[(fg)^{-1}]\right)$, 则每个 t_i 在每个 $R_\mathfrak{p}$ 中的像皆为 0, 其中 $\mathfrak{p}$ 遍历 $R[(fg)^{-1}]$ 的极小素理想; 由引理 2.9.2 遂有 $t_i = 0$. 综上, $\varphi[(fg)^{-1}]$ 是单同态, 因而是同构. 明所欲证. □

5.8 平坦性的局部判准

命题 5.2.1 将模的平坦性化约到局部环上检验. 但即便对 R 为局部环的特例, §5.4 的判准依然不甚方便, 因为它们涉及对 R 的所有有限生成理想 I 检验 $\mathrm{Tor}_1^R(M, R/I) = 0$ 或 $I \otimes M \hookrightarrow M$, 本节介绍的一系列判准将予以改进.

首先作如下观察: 设 I 为环 R 的理想, M 为 R-模, 则可赋 R 和 M 以 I-进滤过 (例 4.2.12), 相应地有 $\mathbb{Z}_{\geq 0}$-分次环 $\mathrm{gr}_I(R)$ 和分次 $\mathrm{gr}_I(R)$-模 $\mathrm{gr}_I(M)$. 根据定义, $\mathrm{gr}_I(M)$ 由 $\mathrm{gr}_0(M) = M/IM$ 生成; 换言之, 乘法给出的分次 $\mathrm{gr}_I(R)$-模同态

$$\gamma_{I,M} : \mathrm{gr}_I(R) \underset{\mathrm{gr}_I^0(A)}{\otimes} \mathrm{gr}_I^0(M) \to \mathrm{gr}_I(M) \tag{5.8.1}$$

是满的, 这是因为 (5.8.1) 的 n 次部分表作

$$\gamma_{I,M}^n : (I^n/I^{n+1}) \underset{R/I}{\otimes} (M/IM) \to I^nM/I^{n+1}M.$$

引理 5.8.1 对 R 的理想 I 和 R-模 M, 考虑以下陈述:

(i) 对所有 $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ 皆有 $\mathrm{Tor}_1^R(R/I^n, M) = 0$;

(ii) 对所有 $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$, 乘法诱导 $I^n \otimes M \xrightarrow{\sim} I^nM$;

(iii) 相应的 (5.8.1) 是同构.

蕴涵关系 (i) $\iff$ (ii) $\implies$ (iii) 总是成立, 而 I 幂零时 (i)—(iii) 相等价.

证明 (i) $\iff$ (ii): 应用引理 5.4.1.

(ii) $\implies$ (iii): 考虑行正合交换图表

$$\begin{tikzcd}
& I^{n+1}\otimes M \arrow[r] \arrow[d] & I^n \otimes M \arrow[r] \arrow[d] & (I^n/I^{n+1})\otimes M \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & I^{n+1}M \arrow[r] & I^nM \arrow[r] & I^nM/I^{n+1}M \arrow[r] & 0,
\end{tikzcd}$$

其中垂直箭头来自乘法, 皆为满射; 易见右上角等同于 $(I^n/I^{n+1}) \underset{R/I}{\otimes} (M/IM)$, 而最右垂直箭头等同于 $\gamma_{I,M}^n$. 若 (ii) 成立则中左两路箭头为同构, 故蛇形引理 [7, 命题 6.8.6] 给出 (iii).

若 I 幂零, 可取 $m \gg 0$ 使得 $I^m = 0$. 在上述图表中可以用蛇形引理逐步证明 $I^n \otimes M \to I^nM$ 对 $n = m-1, \ldots, 0$ 都是同构. 证毕. $\square$

定义 5.8.2 对于理想 I 和 R-模 M, 若对于 R 的所有理想 J 皆有 $\bigcap_{n\geq 0} I^n(J\otimes M) = 0$, 则称 M 对 I 为逐理想分离的.

定理 5.8.3 对 R 的理想 I 和 R-模 M, 考虑以下陈述:

(i) M 是平坦 R-模;

(ii) M/IM 是平坦 R/I-模, 且 $\mathrm{Tor}_1^R(R/I, M) = 0$;

(iii) M/IM 是平坦 R/I-模, 且 (5.8.1) 是同构;

(iv) $M/I^m M$ 对所有 $m \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ 皆是平坦 R/I^m-模.

其间有蕴涵关系 (i) $\implies$ (ii) $\implies$ (iii) $\implies$ (iv).

若进一步要求 I 幂零, 或要求 R 为 Noether 环且 M 对 I 逐理想分离, 则 (i) — (iv) 相互等价.

证明 (i) $\implies$ (ii): 应用平坦模的基变换性质和定理 5.4.2.

(ii) $\implies$ (iii): 鉴于引理 5.8.1, 证 $\mathrm{Tor}_1^R(R/I^n, M) = 0$ 对所有 $n \geq 1$ 成立即可. 取 R/I^n 的 I-进滤过

$$0 = I^n/I^n \subset \cdots \subset I/I^n \subset R/I^n,$$

再考虑 Tor-函子的长正合列, 问题化约为以下断言:

$$\forall\ R/I\text{-模 } N, \quad \mathrm{Tor}_1^R(N, M) = 0. \tag{5.8.2}$$

诚然, 存在 R/I-模的短正合列

$$0 \to K \to F \to N \to 0, \quad F:\ \text{自由};$$

由于 Tor-函子与直和交换, $\mathrm{Tor}_1^R(F, M) = 0$, 故 $\mathrm{Tor}_\bullet^R(\cdot, M)$ 的长正合列包含

$$0 \to \mathrm{Tor}_1^R(N, M) \to K \otimes M \to F \otimes M;$$

最右同态等同于 $K \underset{R/I}{\otimes} M/I \to F \underset{R/I}{\otimes} M/I$, 故单. 于是 (5.8.2) 得证.

(iii) $\implies$ (iv): 对所有 $n \geq 0$, 命 $R_n := R/I^{n+1}$ 和 $M_n := M/I^{n+1}M$. 对 $k = 1, \ldots, n$, 易得与引理 5.8.1 证明中类似的行正合交换图表

$$\begin{tikzcd}
& (I^{k+1}/I^{n+1}) \otimes M \arrow[r] \arrow[d] & (I^k/I^{n+1}) \otimes M \arrow[r] \arrow[d] & (I^k/I^{k+1}) \otimes M \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & I^{k+1}M_n \arrow[r] & I^k M_n \arrow[r] & I^k M/I^{k+1}M \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

最右垂直箭头总是同构, 而 $(I^{k+1}/I^{n+1}) \otimes M \to I^{k+1}M_n$ 在 $k = n$ 时平凡地是同构, 由此可递归地推得 $(I^k/I^{n+1}) \otimes M \xrightarrow{\sim} I^k M_n$ 恒成立. 特别地, 如记 $I_n := I/I_{n+1}$ 则有

$$I_n \underset{R_n}{\otimes} M_n \simeq (I/I^{n+1}) \otimes M \xrightarrow{\sim} IM_n,$$

而这无非是乘法对 R_n-模 M_n 诱导的同态. 根据引理 5.4.1, 这给出

$$\mathrm{Tor}_1^{R_n}(R_n/I_n, M_n) = 0. \tag{5.8.3}$$

为了得到 (iv), 对所有 $k = 0, \ldots, n$ 和 R_k-模 N 说明 $\mathrm{Tor}_1^{R_n}(N, M_n) = 0$, 再应用 $k = n$ 的特例即可.

当 $k > 0$ 时 IN 和 N/IN 都是 R_{k-1}-模, 正合列将问题递归地化约到 $k = 0$ 的情形. 注意到 $R_0 = R/I = R_n/I_n$. 剩余论证和 (5.8.2) 类似, 基于 (5.8.3) 和 M/IM 作为 R_0-模的平坦性.

当 I 幂零时, 取 $n \gg 0$ 使得 $R_n = R$ 而 $M_n = M$, 立见 (iv) $\implies$ (i).

以下在 R 为 Noether 环且 M 对 I 逐理想分离的前题下证明 (iv) $\implies$ (i). 基于推论 5.4.4, 问题化为对 R 的所有理想 J 证明乘法诱导的 $J \otimes M \to M$ 为单同态. 鉴于对 M 的条件, 说明对所有 n 皆有 $\ker[J \otimes M \to M] \subset I^n(J \otimes M)$ 即可.

对带有 I-进滤过的 R 及其子 R-模 J 应用定理 4.6.4, 可取到 $k > n$ 使得 $I^k \cap J \subset I^n J$. 考虑自明的交换图表

$$\begin{tikzcd}
J \otimes M \arrow[r] \arrow[d] & (J/I^k \cap J) \otimes M \arrow[r, two heads] \arrow[d] & (J/I^n J) \otimes M \arrow[r, "\sim"] & (J \otimes M)/I^n(J \otimes M) \\
M \arrow[r, two heads] & M/I^k M & &
\end{tikzcd}$$

依证明 (iii) $\implies$ (iv) 时的符号, $J/I^k \cap J$ 是 R_{k-1} 的理想, 故 (iv) 和推论 5.4.4 蕴涵

$$(J/I^k \cap J) \otimes M \simeq (J/I^k \cap J) \underset{R_{k-1}}{\otimes} M_{k-1} \hookrightarrow M_{k-1}.$$

这导致第二个垂直箭头为单, 故 $\ker[J \otimes M \to M] \subset I^n(J \otimes M)$. 明所欲证. □

注意到当 I 是极大理想时, 定理 5.8.3 (ii) 和 (iii) 中关于 M/IM 的平坦性自动成立.

引理 5.8.4 设 I 为环 R 的理想, S 为满足 $IS \subset \mathrm{rad}(S)$ 的 R-代数, 而且 S 也是 Noether 环. 若 N 是有限生成 R-模, M 是有限生成 S-模, 则作为 R-模的 $N \otimes M$ 满足 $\bigcap_{n \geq 0} I^n(N \otimes M) = 0$.

证明 注意到 $N \otimes M$ 不只是 R-模, 还具有来自 M 的 S-模结构. 对所有 $n \geq 0$ 皆有

$$I^n (N \otimes M) \subset \mathrm{rad}(S)^n (N \otimes M).$$

考虑有限生成 S-模 $\tilde{N} := S \otimes N$, 则有 S-模的典范同构 $N \otimes M \simeq \tilde{N} \underset{S}{\otimes} M$, 而命题 1.5.7 (i) 说明 $\tilde{N} \underset{S}{\otimes} M$ 有限生成. 定理 3.7.1 遂蕴涵 $\mathrm{rad}(S)^n(N \otimes M)$ 之交为零. □

定理 5.8.5 设 I 为环 R 的理想, S 为满足 $IS \subset \mathrm{rad}(S)$ 的 R-代数, 而且 R 和 S 都是 Noether 环. 给定有限生成 S-模 M, 以下陈述等价:

(i) M 是平坦 R-模;

(ii) M/IM 是平坦 R/I-模, 且 $\mathrm{Tor}_1^R(R/I, M) = 0$;

(iii) M/IM 是平坦 R/I-模, 且 (5.8.1) 是同构;

(iv) $M/I^m M$ 对所有 $m \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ 皆是平坦 R/I^m-模.

证明 引理 5.8.4 表明 M 作为 R-模对 I 是逐理想分离的, 故对 R-模 M 应用定理 5.8.3 即可. □

以下是定理 5.8.5 在局部环上的一种形式. 关于局部环的定义和符号, 请回顾 §1.11.

定理 5.8.6 (平坦性的局部判准) 设 $(R, \mathfrak{m}) \to (S, \mathfrak{n})$ 为 Noether 局部环之间的局部同态 (定义 1.11.7), M 为有限生成 S-模, 则 M 是平坦 R-模当且仅当 $\mathrm{Tor}_1^R(R/\mathfrak{m}, M) = 0$.

证明 因为 $R/\mathfrak{m}$ 是域, $M/\mathfrak{m}M$ 总是平坦 $R/\mathfrak{m}$-模. 代入定理 5.8.5 (取 $I = \mathfrak{m}$) 即所求. □

尽管定理 5.8.5 和 5.8.6 的表述略显复杂, 但最常用的是 $R = S$ 或 $M = S$ 的特例.

5.9 Govorov–Lazard 定理

本节探讨的 Govorov–Lazard 定理将厘清平坦模和自由模的关系, 它涉及以下构造. 给定环 R 以及 R-模 M, 定义范畴 $\mathcal{F} = \mathcal{F}_M$ 如下.

- ◇ 它的对象是任一列元素 $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in M^n$, 其中 $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ 可变; 对之构造以 $x_1, \ldots, x_n$ 为基的自由 R-模, 记为 $F_\mathbf{x} = \bigoplus_{i=1}^n Rx_i$, 相应地有映 x_i 为 x_i 的同态 $\alpha(\mathbf{x}) : F_\mathbf{x} \to M$.
- ◇ 从对象 $\mathbf{x}$ 到 $\mathbf{y}$ 的态射定义为 R-Mod 中的交换图表

$$\begin{tikzcd} F_\mathbf{x} \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "\alpha(\mathbf{x})"'] & & F_\mathbf{y} \arrow[dl, "\alpha(\mathbf{y})"] \\ & M & \end{tikzcd}$$

简记为 φ, 按自明方式定义态射的合成.

显然 $\mathcal{F}$ 是非空小范畴. 定义函子 $F : \mathcal{F} \to R$-Mod 如下: 对象层次是 $\mathbf{x} \mapsto F_\mathbf{x}$, 态射层次则按自明方式定义. 另记 $\varinjlim F$ 为 $\varinjlim_\mathbf{x} F_\mathbf{x}$. 态射族 $(\alpha(\mathbf{x}))_{\mathbf{x} \in \mathrm{Ob}(\mathcal{F})}$ 诱导 R-模同态

$$\alpha : \varinjlim_\mathbf{x} F_\mathbf{x} \to M.$$

引理 5.9.1 取 R-模 M 并定义 $\mathcal{F}$ 如上, 则 $\alpha : \varinjlim_{\mathbf{x}} F_{\mathbf{x}} \to M$ 是同构.

证明 目标是对所有 R-模 N 给出典范同构

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_R(M, N) &\xrightarrow{\sim} \varprojlim_{\mathbf{x}\in\mathrm{Ob}(\mathcal{F})} \mathrm{Hom}_R(F_{\mathbf{x}}, N) \\ &:= \left\{ (\theta_{\mathbf{x}})_{\mathbf{x}} \in \prod_{\mathbf{x}} \mathrm{Hom}_R(F_{\mathbf{x}}, N) \;\middle|\; \begin{array}{l} \forall \mathbf{x} \xrightarrow{\varphi} \mathbf{y}, \\ \theta_{\mathbf{x}} = \theta_{\mathbf{y}}\varphi \end{array} \right\},\end{aligned}$$

从而对同态族 $\alpha(\mathbf{x}) : F_{\mathbf{x}} \to M$ 验证 $\varinjlim$ 的泛性质. 具体方法是让 $\theta \in \mathrm{Hom}_R(M, N)$ 映至 $(\theta\alpha(\mathbf{x}))_{\mathbf{x}}$, 这显然是典范同态. 此同态为单: 若 θ 被映为 0, 则代入 $\mathbf{x} = (x)$ 可见 $\theta(x) = 0$ 对所有 $x \in M$ 成立.

以下说明满性. 给定右侧元素 $(\theta_{\mathbf{x}})_{\mathbf{x}}$, 定义映射 $\theta : M \to N$ 如下: 对所有 $x \in M$ 将 $F_{(x)}$ 写成 Rx, 命 $\theta(x) := \theta_{(x)}(x)$. 考虑 $t \in R$, 从交换图表

$$\begin{tikzcd}
st \cdot x \arrow[d, phantom, "\rotatebox{90}{$\in$}"] & & s \cdot tx \arrow[ll, mapsto] \arrow[d, phantom, "\rotatebox{90}{$\in$}"] \\
Rx \arrow[dr, "\alpha((x))"'] & & Rtx \arrow[ll] \arrow[dl, "\alpha((tx))"] \\
& M &
\end{tikzcd}$$

见得 $t\theta(x) = t\theta_{(x)}(x) = \theta_{(x)}(tx) = \theta_{(tx)}(tx) = \theta(tx)$.

接着考虑 $x, y \in M$. 从交换图表

$$\begin{tikzcd}
R(x+y) \arrow[r, "\text{包含}"] \arrow[dr, "\alpha((x,y))"'] & Rx \oplus Ry \arrow[d, "\alpha((x,y))"] & Rx \text{ 或 } Ry \arrow[l, "\text{包含}"'] \arrow[dl, "\alpha((x)) \text{ 或 } \alpha((y))"] \\
& M &
\end{tikzcd}$$

见得

$$\begin{aligned}\theta(x+y) = \theta_{(x+y)}(x+y) = \theta_{(x,y)}(x+y) &= \theta_{(x,y)}(x) + \theta_{(x,y)}(y) \\ &= \theta_{(x)}(x) + \theta_{(y)}(y) = \theta(x) + \theta(y).\end{aligned}$$

综上, θ 是模同态. 类似思路可证 $\theta\alpha(\mathbf{x}) = \theta_{\mathbf{x}}$ 对所有 $\mathbf{x}$ 成立, 方法是对所有 $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ 和 $x = \sum_{i=1}^n a_i x_i \in F_{\mathbf{x}}$ 定义 $F_{(x)} = Rx \to F_{\mathbf{x}}$ 和 $\mathcal{F}$ 中相应的态射 $(x) \to \mathbf{x}$. 满性得证. $\square$

定理 5.9.2 (V. E. Govorov, D. Lazard) 设 M 为 R-模, 则 M 平坦当且仅当它是一族自由 R-模的滤过 $\varinjlim$; 此时引理 5.9.1 中的 $\mathcal{F}$ 是滤过小范畴, 而对应的 $\varinjlim$ 可以取为该处的 $\varinjlim_{\mathbf{x}} F_{\mathbf{x}}$.

证明 自由模必平坦, 故 “仅当” 方向来自命题 5.1.10. 以下处理 “当” 的方向.

设 M 平坦. 鉴于引理 5.9.1 的同构 $\varinjlim_{\mathbf{x}} F_{\mathbf{x}} \simeq M$, 剩余任务是论证 $\mathcal{F}$ 滤过. 这分成两个条件 [7, 定义 2.7.6].

给定 $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n)$ 和 $\mathbf{y}' = (y'_1, \ldots, y'_{n'})$, 取 $\mathbf{z} = (y_1, \ldots, y_n, y'_1, \ldots, y'_{n'})$, 便有 $\mathcal{F}$ 中的态射 $\mathbf{y} \to \mathbf{z} \leftarrow \mathbf{y}'$, 相应的模同态 $F_{\mathbf{y}} \to F_{\mathbf{z}} \leftarrow F_{\mathbf{y}'}$ 由有序基的包含关系诱导. 这是滤过范畴的第一则条件.

为了验证第二则条件[1], 考虑 $\mathcal{F}$ 中的态射 $\mathbf{y} \leftarrow \mathbf{x} \to \mathbf{y}'$, 具体表作模同态 $F_{\mathbf{y}} \xleftarrow{\varphi} F_{\mathbf{x}} \xrightarrow{\varphi'} F_{\mathbf{y}'}$. 记 $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_m)$, 然后按照前一段的符号展开 $\mathbf{y}$, $\mathbf{y}'$ 及两者的合并 $\mathbf{z}$; 相应地

$$F_{\mathbf{z}} = F_{\mathbf{y}} \oplus F_{\mathbf{y}'},$$

并且有同态 $\xi := \alpha(\mathbf{z}) : F_{\mathbf{z}} \to M$, 映基中的 y_i (或 y'_j) 为 M 中的 y_i (或 y'_j).

留意到 $\mathbf{x} \xrightarrow{\varphi} \mathbf{y} \to \mathbf{z}$ 和 $\mathbf{x} \xrightarrow{\varphi'} \mathbf{y}' \to \mathbf{z}$ 的合成未必相等. 为了解决这个问题, 取 $\ker(\xi)$ 的有限生成子模

$$K := \sum_{i=1}^{m} R(\varphi(x_i), -\varphi'(x_i)).$$

代入推论 5.4.8 可得交换图表

$$\begin{tikzcd}
F_{\mathbf{z}} \arrow[rr, "\beta"] \arrow[dr, "\xi"'] & & R^{\oplus s} \arrow[dl, "\eta"] \\
 & M &
\end{tikzcd}$$

使得 $K \subset \ker(\beta)$. 记 $R^{\oplus s}$ 的标准基对 η 的像为 $w_1, \ldots, w_s$, 它们给出 $\mathcal{F}$ 的对象 $\mathbf{w}$. 由构造易见有 $\mathcal{F}$ 中的交换图表

$$\begin{tikzcd}[row sep=small]
 & \mathbf{y} \arrow[r] & \mathbf{z} \arrow[dr, "\beta"] & \\
\mathbf{x} \arrow[ur, "\varphi"] \arrow[dr, "\varphi'"'] & & & \mathbf{w}. \\
 & \mathbf{y}' \arrow[r] & \mathbf{z} \arrow[ur, "\beta"'] &
\end{tikzcd}$$

至此验证使 $\mathcal{F}$ 滤过所需的全部条件. □

习题

1. 设 R 为整环, $K := \mathrm{Frac}(R)$. 证明 K 是平坦 R-模, 而 K 是投射 R-模当且仅当 $R = K$.

提示 若 K 投射则存在模同态 $f : K \to R$ 连同 $x \in K$ 使得 $a := f(x) \neq 0$. 论证 $bf(x/ab) = 1$ 对所有 $b \in R \smallsetminus \{0\}$ 成立.

[1] 其实处理特例 $\mathbf{y} = \mathbf{y}'$ 即可, 但这反而会使符号费解.

2. 对所有域 $\Bbbk$, 说明

(i) $\Bbbk[X,Y]/(XY-X)$ 在 $\Bbbk[X]$ 上非平坦,

(ii) $\Bbbk[\![t]\!][Y,Z]/(YZ-t)$ 在 $\Bbbk[\![t]\!]$ 上平坦.

3. 从导出函子的基本操作证明定义 5.3.7 的平坦维数满足

$$\begin{aligned}\mathrm{fl.dim}(M)\leq n &\iff \mathrm{Tor}^R_{n+1}(M,\cdot)=0\\ &\iff M \text{ 有长度 } \leq n \text{ 的平坦解消.}\end{aligned}$$

提示 以平坦解消计算 Tor 函子, 参考 [8, 命题 4.9.6] 的论证.

4. 取环 R 为 $C^\infty(\mathbb{R})$, 乘法是逐点相乘; 其中在 0 的某个邻域上为零的函数构成理想 I, 在 0 处为 0 的函数构成极大理想 $\mathfrak{m}$. 证明 R-模的同构 $R_\mathfrak{m}\simeq R/I$, 以此说明 R/I 是有限生成平坦 R-模, 然而非投射模.

5. 举例说明存在 Noether 环 R 和有限生成 R-模 M, 使得 $\mathfrak{p}\mapsto \dim_{\kappa(\mathfrak{p}} M\otimes\kappa(\mathfrak{p})$ 是 $\mathrm{Spec}(R)$ 上的局部常值映射, 但 M 非投射模.

6.

7.

8.

9. (**Amitsur 复形**) 给定交换环 R 上的代数 S 和 R-模 N, 对所有 $n\geq 0$ 定义 $X^n = S^{\otimes(n+1)}\otimes N$, 张量积默认取在 R 上. 对所有 $0\leq i\leq n$ 定义

$$d^{n,i}: X^n\to X^{n+1},\quad x_0\otimes\cdots\otimes x_n\otimes y\mapsto \cdots\otimes x_{i-1}\otimes 1\otimes x_i\otimes\cdots\otimes y$$

以及 $\delta^n = \sum_{i=0}^n (-1)^i d^{n,i} : X^n\to X^{n+1}$. 另记 $X^{-1} := N$, 以 $\delta^{-1}(y) = 1\otimes y$ 定义 $\delta^{-1}: N\to S\otimes N$.

(i) 验证 $\mathcal{A}^\bullet_N := \left[0\to X^{-1}\xrightarrow{\delta^{-1}} X^0\xrightarrow{\delta^0} X^1\xrightarrow{\delta^1}\to\cdots\right]$ 是 R-模的复形, 称为 Amitsur 复形.

(ii) 设 $R\to R'$ 是环同态, $S' := R'\otimes S$ 而 $N' := R'\otimes N$, 验证 R'-模的复形 $R'\otimes\mathcal{A}^\bullet_N$ 同构于 $\mathcal{A}^\bullet_{N'}$.

(iii) 设存在环同态 $\lambda: S\to R$ 使之为 $R\to S$ 的左逆, 证明此时 $\mathcal{A}^\bullet_N$ 正合.

提示 计算 $h^{n+1}\delta^n + \delta^{n-1}h^n$, 其中 $h^n: X^n\to X^{n-1}$ 的映法是

$$\begin{aligned} h^0(x_0\otimes y) &= \lambda(x_0)y,\\ h^n(x_0\otimes\cdots\otimes x_n\otimes y) &= \lambda(x_0)x_1\otimes\cdots\otimes x_n\otimes y\quad (n\geq 1).\end{aligned}$$

(iv) 证明若 S 是忠实平坦 R-代数, 则 $\mathcal{A}^\bullet_N$ 正合. 定理 5.6.4 的等化子图表 (取 $M = S\otimes N$) 不过是此正合列的开头.

提示 对 $R\to S$ 取 $S\otimes(\cdot)$ 得到环同态 $S\xrightarrow{s\mapsto s\otimes 1} S\otimes S$, 它有左逆.

复形 $\mathcal{A}^\bullet_N$ 也可以用余杠构造 [8, 例 8.7.2] 来诠释, 它来自命题 1.3.3 中的伴随对给出的单子.

第六章 整性

6.1 环的整扩张

设 R 为环而 S 为 R-代数; 等价地说, 给定环同态 $R \to S$, 其中的环均默认交换. 以下是 [7, 定义 7.2.1] 在交换环场景下的重述.

定义 6.1.1 (整元) 取定 R-代数 S 如上. 设 $x \in S$. 若存在 $n \geq 1$ 与 $a_0, \ldots, a_{n-1} \in R$ 使得

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0 = 0$$

则称 x 是 R-代数 S 中的整元, 或称 x 在 R 上是整的.

整元在 R-代数同态之下的像仍是整元.

以下事实来自 [7, 定理 7.2.2, 推论 7.2.3], 其证明依赖于 Cayley–Hamilton 定理, 不再重复.

定理 6.1.2 取定 R-代数 S 如上. 对所有 $x \in S$, 以下陈述等价:

(i) x 是 R 上的整元;

(ii) $R[x]$ 是有限 R-代数 (定义 1.9.1);

(iii) x 包含于 S 的一个忠实 $R[x]$-子模 M (定义 1.1.6), 其中 M 作为 R-模有限生成.

进一步, S 中的所有整元构成一个 R-子代数.

定义 6.1.3 给定 R-代数 S.

◇ 称 S 中所有整元构成的子代数为 R 在 S 中的**整闭包**, 记为 $S^{R\text{-int}}$.

◇ 如果 S 的所有元素皆整, 亦即 $S^{R\text{-int}} = S$, 则称 S 是 R 的**整扩张**.

◇ 如果 $R \to S$ 为单, 而且 $S^{R\text{-int}}$ 等于 R 的像, 则称 R 在 S 之中**整闭**.

如果 S 作为 R-代数由一族整元生成, 则定理 6.1.2 蕴涵 S 是 R 的整扩张.

命题 6.1.4 给定 R-代数 S, 它是有限 R-代数当且仅当它既是 R 的整扩张, 同时也是有限生成 R-代数.

证明 设 S 是有限 R-代数. 代入定理 6.1.2 可得整性, 方法是对所有 $x \in S$ 取 $M = S$; 这总是忠实 $R[x]$-子模.

反之设 S 是 R 的整扩张, 且作为 R-代数有生成元 $x_1, \ldots, x_n$. 分段扩张可得

$$\begin{aligned} S = R[x_1, \ldots, x_n] &= R[x_1, \ldots, x_{n-1}][x_n] \\ &= \cdots = R[x_1][x_2] \cdots [x_n]. \end{aligned}$$

迭代引理 1.9.4 (i), 问题化约为证 $R[x_1] \cdots [x_{i+1}]$ 对所有 $0 \leq i < n$ 都是有限 $R[x_1] \cdots [x_i]$-代数.

由于 x_{i+1} 在 $R[x_1] \cdots [x_i] = R[x_1, \ldots, x_i]$ 上也是整的, 问题化为对一般扩张 $R \to S$ 中的整元 $x \in S$ 说明 $R[x]$ 是有限 R-代数, 这正是定理 6.1.2 的内容. □

推论 6.1.5 给定 R-代数 S, 则 $S^{R\text{-int}}$ 是 S 的所有有限 R-子代数的滤过并.

证明 已知若 $x \in S$ 属于 R 的某个有限 R-子代数, 则 x 是整的. 反之若 $x \in S$ 在 R 上整, 则 x 属于 S 的有限 R-子代数 $R[x]$. 因此整闭包是 S 的所有有限 R-子代数之并.

给定 S 的两个有限 R-子代数 S_1 和 S_2, 选取生成元表之为

$$S_1 = R[x_1, \ldots, x_m], \quad S_2 = R[y_1, \ldots, y_n],$$

则有限生成 R-代数 $S' := R[x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n]$ 的元素仍都是整的, 故命题 6.1.4 蕴涵 S' 是有限 R-代数. □

引理 6.1.6 (整扩张的塔性质) 考虑一列环同态 $R \to S \to T$.

(i) 如果 $R \to T$ 整, 则 $S \to T$ 整, 而且在 $S \to T$ 单的前提下 $R \to S$ 亦整.

(ii) 如果 $S \to T$ 和 $R \to S$ 皆整, 则 $R \to T$ 亦整.

证明 (i). 显然 $R \to T$ 整蕴涵 $S \to T$ 整. 另一方面, 设 $S \to T$ 单, 记 $x \in S$ 在 T 中的像为 y, 则 y 满足方程 $y^n + a_{n-1}y^{n-1} + \cdots + a_0 = 0$ (其中 $a_0, \ldots, a_{n-1} \in R$), 由此推得 $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0 = 0$ 在 S 中成立, 故 x 在 R 上为整.

(ii). 设 $x \in T$ 满足方程 $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0 = 0$, 其中 $a_0, \ldots, a_{n-1} \in S$. 视此为系数在 S 的 R-子代数 $R[a_0, \ldots, a_{n-1}]$ 上的方程, 则 x 是 $R[a_0, \ldots, a_{n-1}]$ 上的整元. 于是有一列环同态

$$R \to R[a_0, \ldots, a_{n-1}] \to R[a_0, \ldots, a_{n-1}][x];$$

每段都是环的有限生成整扩张, 故命题 6.1.4 说明每段皆有限. 代入引理 1.9.4 (i) 知 $R[a_0, \ldots, a_{n-1}, x]$ 是有限 R-代数, 从而 x 在 R 上为整. □

命题 6.1.7 给定 R-代数 S, 则 $S^{R\text{-int}}$ 在 S 之中整闭. 因此整闭包的称呼是合理的.

证明 设 $x \in S$ 在 $S^{R\text{-int}}$ 上为整, 则 x 属于 S 的某个整 $S^{R\text{-int}}$-子代数 A; 而因为 R-代数 $S^{R\text{-int}}$ 为整, 于是引理 6.1.6 (ii) 表明 A 是 S 的整 R-子代数. 综上 $x \in S^{R\text{-int}}$. □

对于 R 的乘性子集 U, 依定义–命题 1.8.3 来理解任意 R-代数 S 的局部化 $S[U^{-1}]$. 以下说明局部化与取整闭包交换.

命题 6.1.8 给定 R-代数 S 和 R 的乘性子集 U, 我们有

$$S^{R\text{-int}}[U^{-1}] = S[U^{-1}]^{R[U^{-1}]\text{-int}};$$

两边都视为 $S[U^{-1}]$ 的子环. 特别地, 若 S 是 R 的整扩张, 则 $S[U^{-1}]$ 是 $R[U^{-1}]$ 的整扩张.

证明 将 $S[U^{-1}]$ 的元素写成 $\frac{x}{u}$, 其中 $x \in S$ 而 $u \in U$.

对于包含关系 $\subset$, 设有 $a_0, \ldots, a_{n-1} \in R$ 使得 $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0 = 0$, 则在 $S[U^{-1}]$ 中亦有

$$\left(\frac{x}{u}\right)^n + \frac{a_{n-1}}{u}\left(\frac{x}{u}\right)^{n-1} + \cdots + \frac{a_0}{u^n} = 0.$$

故 $\frac{x}{u}$ 在 $R[U^{-1}]$ 上为整.

对于 $\supset$, 设 $\frac{x}{u}$ 在 $R[U^{-1}]$ 上为整, 则存在 $u_0, \ldots, u_{n-1} \in U$ 和 $a_0, \ldots, a_{n-1} \in R$ 使得

$$\left(\frac{x}{u}\right)^n + \frac{a_{n-1}}{u_{n-1}}\left(\frac{x}{u}\right)^{n-1} + \cdots + \frac{a_0}{u_n} = 0$$

在 $S[U^{-1}]$ 中成立. 因此存在 $v \in U$ 使得

$$(vu_0 \cdots u_{n-1}x)^n + \sum_{i=0}^{n-1} (uv)^{i+1} u_i^i \prod_{j \neq i} u_j^{i+1} \cdot (vu_0 \cdots u_{n-1}x)^{n-1-i} = 0$$

在 R 中成立. 故 $y := vu_0 \cdots u_{n-1}x$ 在 R 上为整, 而 $\frac{x}{u} = \frac{y}{vu_0 \cdots u_{n-1}u}$. □

最后探讨环的变换与张量积对整性的影响.

命题 6.1.9 设 $R \to R'$ 为环同态, 则相应的函子 $R' \underset{R}{\otimes} (\cdot) : R\text{-CAlg} \to R'\text{-CAlg}$ 保持整性.

如果 S_1 和 S_2 都是 R 的整扩张, 则 $S_1 \underset{R}{\otimes} S_2$ 亦然.

证明 对于第一部分, 设 S 是 R 的整扩张. 观察到 $R' \underset{R}{\otimes} S$ 作为 R'-代数由子集 $1 \otimes S$ 生成. 给定 $x \in S$, 因为 $y \mapsto 1 \otimes y$ 给出 R-代数的同态 $S \to R' \underset{R}{\otimes} S$, 故 $1 \otimes x$ 在 R 上为整, 因而在 R' 上为整. 综上可得 $R' \underset{R}{\otimes} S$ 是 R' 的整扩张.

对于第二部分, 可沿用类似思路, 或作如下论证: 由第一部分 (取 $R' = S_1$) 蕴涵 $S_1 \underset{R}{\otimes} S_2$ 是 S_1 的整扩张, 再由引理 6.1.6 (ii) 即知 $S_1 \underset{R}{\otimes} S_2$ 是 R 的整扩张. □

6.2 正规整环

本节考虑整环 R, 嵌入为分式域 $\mathrm{Frac}(R)$ 的子环.

定义 6.2.1 (正规整环) 若整环 R 在 $\mathrm{Frac}(R)$ 之中整闭 (定义 6.1.3), 则称 R 为正规整环.

命题 6.2.2 唯一分解整环必正规. 作为特例, 主理想整环必正规.

证明 设 R 为唯一分解整环, 而 $x \in \mathrm{Frac}(R)$ 满足 $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0 = 0$, 其中 $a_0, \ldots, a_{n-1} \in R$, 则一次因式检验法 [7, 命题 5.7.10] 蕴涵 $x = \frac{p}{q}$, 其中 $p, q \in R$ 互素而 $p \mid a_0$, $q \mid 1$. 这便说明 $x \in R$. □

命题 6.2.3 设 R 为正规整环, U 为 R 的乘性子集, 则 $R[U^{-1}]$ 仍是正规整环.

证明 命 $K := \mathrm{Frac}(R) = \mathrm{Frac}(R[U^{-1}])$. 命题 6.1.8 在 K 中给出子环的等式

$$K^{R\text{-int}}[U^{-1}] = K^{R[U^{-1}]\text{-int}};$$

因 R 正规, 左边等于 $R[U^{-1}]$, 故 $R[U^{-1}]$ 正规. □

引理 6.2.4 设 I 为非空集, $\{R_i\}_{i \in I}$ 为某个域 K 的一族子环. 若每个 R_i 都是正规整环, 则 $\bigcap_{i \in I} R_i$ 亦然.

证明 命 $R := \bigcap_{i \in I} R_i$, 则 $K \supset \mathrm{Frac}(R_i) \supset \mathrm{Frac}(R)$ 对所有 $i \in I$ 成立. 设有 $x \in \mathrm{Frac}(R)$ 和 $a_0, \ldots, a_{n-1} \in R$ 使得 $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0 = 0$, 则 R_i 正规蕴涵对所有 $i \in R$ 皆有 $x \in R_i$, 故 $x \in R$. □

命题 6.2.5 对于整环 R, 以下表述等价:

(i) R 是正规整环,

(ii) $R_{\mathfrak{p}}$ 对所有素理想 $\mathfrak{p}$ 都是正规整环,

(iii) $R_{\mathfrak{m}}$ 对所有极大理想 $\mathfrak{m}$ 都是正规整环.

证明 命题 6.2.3 给出 (i) $\implies$ (ii), 而 (ii) $\implies$ (iii) 平凡. 至于 (iii) $\implies$ (i), 应用引理 1.10.12 给出的 $R = \bigcap_{\mathfrak{m}} R_{\mathfrak{m}}$ 以及引理 6.2.4. □

我们将借助以下概念来证明正规整环上的多项式代数依然正规.

定义 6.2.6 (殆整元) 对于整环 R 和 $x \in \mathrm{Frac}(R)$, 若存在 $r \in R \smallsetminus \{0\}$ 使得 $rx^n \in R$ 对所有 $n \geq 0$ 成立, 则称 x 为殆整元.

显然 R 的元素皆为殆整元.

引理 6.2.7 对于整环 R, 所有殆整元构成 $K := \mathrm{Frac}(R)$ 的子环. 若 $x \in K$ 在 R 上为整, 则 x 是殆整元; 如果要求 R 是 Noether 环, 则反向亦然.

证明 设 $x, y \in K$ 和 $a, b \in R \smallsetminus \{0\}$ 对所有 $n \geq 0$ 皆满足 $ax^n \in R$ 和 $by^n \in R$, 则 $(ab)(xy)^n \in R$ 和 $(ab)(x+y)^n \in R$ 对所有 $n \geq 0$ 成立. 故殆整元构成子环.

设 $x \in K$ 在 R 上为整, 则定理 6.1.2 说明 $R[x]$ 是有限 R-代数; 考虑其生成元的分母, 可见有 $r \in R \smallsetminus \{0\}$ 使得 $rR[x] \subset R$, 这表明 x 殆整.

反之设 R 为 Noether 环, $x \in K$ 殆整. 按定义可取 $r \in R \smallsetminus \{0\}$ 使得 $R[x] \subset \frac{1}{r}R$, 这蕴涵 $R[x]$ 是有限生成 R-模. 代入定理 6.1.2 知 x 在 R 上为整. □

引理 6.2.8 设 R 为整环, $K := \mathrm{Frac}(R)$. 考虑多项式 $f = a_r X^r + \cdots + a_0 \in K[X]$, 其中 $a_r \neq 0$.

(i) 若 f 是 $K(X) = \mathrm{Frac}(R[X])$ 中的殆整元, 则每个 a_i 都是 K 中的殆整元.

(ii) 若 f 在 $R[X]$ 上为整, 则每个 a_i 都在 R 上为整.

证明 (i). 存在 $g = b_s X^s + \cdots + b_0 \in R[X] \smallsetminus \{0\}$, 其中 $b_s \neq 0$, 而 $gf^n \in R[X]$ 对所有 $n \geq 0$ 成立. 这蕴涵 $b_s a_r^n \in R$, 因此 a_r 是殆整元. 由于 $K(X)$ 中的殆整元成环, 并包含 $R[X]$, 故 $f - a_r X^r$ 仍殆整, 依此类推.

(ii). 设 $f^n + c_{n-1} f^{n-1} + \cdots + c_0 = 0$, 其中 $c_i \in R[X]$. 将每个 a_i 都表成分式 $\frac{u_i}{v_i}$, 取 R_0 为 R 中由所有 u_i, v_i 和 c_j 生成的子环, 然后记 $K_0 = \mathrm{Frac}(R_0) \subset K$. 此时 $f \in K_0[X]$ 在 $R_0[X]$ 上为整. 根据 (i) 可知每个 a_i 都是 K_0 中的殆整元. 注意到 R_0 是 Noether 整环, 故引理 6.2.7 蕴涵 a_i 在 R_0 上为整, 因而在 R 上为整. □

引理 6.2.9 若 R 是正规整环, 则 $R[X]$ 亦然.

证明 命 $K = \mathrm{Frac}(R)$, 则 $\mathrm{Frac}(R[X]) = K(X)$. 如果 $f \in K(X)$ 在 $R[X]$ 上为整, 则它在 $K[X]$ 上为整; 由 $K[X]$ 的唯一分解性得到 $f \in K[X]$. 引理 6.2.8 (ii) 和 R 的正规条件进一步蕴涵 $f \in R[X]$. □

本章习题将说明正规 Noether 整环上的一元形式幂级数环也是正规整环.

6.3 一般的正规环

受命题 6.2.5 启发, 我们将正规性推广到一般的环上.

定义 6.3.1 (正规环) 设 R 为环. 如果 $R_{\mathfrak{p}}$ 对所有素理想 $\mathfrak{p}$ 都是正规整环, 则称 R 为正规环.

根据命题 6.2.5, 上述条件只需对 R 的极大理想来检验.

命题 6.3.2 若 R 是正规环, 则 R 对任意乘性子集 U 的局部化仍是正规环.

证明 将 $R[U^{-1}]$ 的素理想写作 $\mathfrak{p}[U^{-1}]$ 之形, 其中 $\mathfrak{p}$ 是 R 的素理想, $\mathfrak{p} \cap U = \varnothing$, 亦即 $R \smallsetminus \mathfrak{p} \supset U$, 然后应用局部化的传递性 (命题 1.6.5). □

命题 6.3.3 若 R 是正规环, $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, 则 $R[X_1, \ldots, X_n]$ 仍是正规环.

证明 不妨设 $n = 1$. 设 $\mathfrak{q}$ 为 $R[X]$ 的素理想, $\mathfrak{p} := R \cap \mathfrak{q}$, 则 $R[X]_{\mathfrak{q}}$ 是 $R_{\mathfrak{p}}[X]$ 的局部化, 而引理 6.2.9 说明 $R_{\mathfrak{p}}[X]$ 是正规整环. 由命题 6.2.3 遂知 $R[X]_{\mathfrak{q}}$ 是正规整环. □

引理 6.3.4 若 R_1 和 R_2 是正规环, 则 $R_1 \times R_2$ 仍是正规环.

证明 命题 1.2.3 之下的讨论表明 $R_1 \times R_2$ 的素理想皆形如 $\mathfrak{p}_1 \times R_2$ 或 $R_1 \times \mathfrak{p}_2$, 其中 $\mathfrak{p}_i$ 代表 R_i 的素理想. 易见相应的局部化分别是 $R_{1,\mathfrak{p}_1}$ 和 $R_{2,\mathfrak{p}_2}$. □

命题 6.3.5 设非零环 R 为仅有有限多个极小素理想的既约环 (定义 2.1.2), 则以下陈述等价:

(i) R 是正规环,

(ii) R 在其全分式环 $\mathrm{Frac}(R)$ (定义 2.9.1) 中整闭,

(iii) 存在正规整环 $R_1, \ldots, R_m$ 使得 $R \simeq \prod_{i=1}^{m} R_i$.

对于一般的环 R, 仍有蕴涵关系 (iii) $\implies$ (i) $\implies$ (ii).

证明 对于一般的 R, 蕴涵关系 (iii) $\implies$ (i) 来自引理 6.3.4. 下面说明 (i) $\implies$ (ii).

考虑 $x \in \mathrm{Frac}(R)$ 及 R 的理想 $I := \{r \in R : rx \in R\}$. 设 x 在 R 上整, 目标是证 $I = R$. 对 R 的所有素理想 $\mathfrak{p}$, 局部化的正合性导致 $R_{\mathfrak{p}} \hookrightarrow \mathrm{Frac}(R) \underset{R}{\otimes} R_{\mathfrak{p}}$, 映法是 $\frac{r}{u} \mapsto r \otimes \frac{1}{u}$. 将右边视为整环 $R_{\mathfrak{p}}$ 对某个乘性子集的局部化, 则又有 $\mathrm{Frac}(R) \underset{R}{\otimes} R_{\mathfrak{p}} \hookrightarrow \mathrm{Frac}(R_{\mathfrak{p}})$.

留意到 $x \otimes 1$ 在 $R_{\mathfrak{p}}$ 上依然整, 故存在 $r \in R$ 和 $u \in R \smallsetminus \mathfrak{p}$ 使得 $x \otimes 1 = r \otimes \frac{1}{u}$. 于是 $(ux - r) \otimes 1 = 0$, 等价地说存在 $v \in R \smallsetminus \mathfrak{p}$ 使得 $v(ux - r) = 0$, 故 $vu \in I$.

综上可见 $I \not\subset \mathfrak{p}$. 由于 $\mathfrak{p}$ 任意, $I = R$. 于是 $x \in R$.

接着设 R 既约, 且仅有有限多个相异极小素理想 $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_m$, 目标是证 (ii) $\implies$ (iii). 定理 2.9.3 给出 $\mathrm{Frac}(R) \xrightarrow{\sim} \prod_{i=1}^m R_{\mathfrak{p}_i}$, 每个 $R_{\mathfrak{p}_i}$ 都是域. 相应于此直积分解, 有幂等元 $e_1, \ldots, e_m$.

既然 R 在 $\mathrm{Frac}(R)$ 中整闭, 它必包含 $e_1, \ldots, e_m$. 用这 m 个幂等元可对所有 i 得到 $R_{\mathfrak{p}_i}$ 的子环 R_i, 使得下图交换:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Frac}(R) \arrow[r, "\sim"] & \prod_{i=1}^m R_{\mathfrak{p}_i} \\
R \arrow[u, hook] \arrow[r, "\sim"] & \prod_{i=1}^m R_i. \arrow[u, hook, "包含"']
\end{tikzcd}$$

容易验证每个 R_i 都在域 $R_{\mathfrak{p}_i}$ 中整闭, 继而验证 R_i 是正规整环. 证毕. □

注意到 Noether 环的极小素理想个数有限, 见命题 3.4.6 和 3.4.8.

6.4 赋值环和整闭包

先来回顾赋值环的定义, 如 [7, 定义 10.6.2].

定义 6.4.1 (赋值环) 设 R 为整环, 命 $K = \mathrm{Frac}(R)$. 若对任意 $x \in K^\times$ 皆有 $x \in R$ 或 $x^{-1} \in R$, 则称 R 为赋值环.

引理 6.4.2 赋值环必为局部环.

证明 见 [7, 定义 10.6.2] 之下的讨论, 或对赋值环 R 直接验证 $R \smallsetminus R^\times$ 为其唯一极大理想. □

今后以 $\mathfrak{m}_R$ 代表局部环 R 的唯一极大理想, 因此 $R = \mathfrak{m}_R \sqcup R^\times$.

命题 6.4.3 赋值环必为正规整环.

证明 设 R 为赋值环, $K := \mathrm{Frac}(R)$. 设 $x \in K$ 满足

$$x^n + c_{n-1}x^{n-1} + \cdots + c_0 = 0, \quad n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}, \quad c_0, \ldots, c_{n-1} \in R.$$

以下说明 $x \in R$. 设 $x \notin \mathfrak{m}_R$, 则 $y := x^{-1} \in R$. 将上述方程的两边同除以 x^n, 得到

$$1 + y(c_{n-1} + \cdots + c_0 y^{n-1}) = 0;$$

然而这说明 $y \in R^\times$, 亦即 $x \in R^\times$. □

命题 6.4.4 选定域 K.

(i) 若 R 是 K 的子环, 而且 R 是局部环, 则存在赋值环 $S \subset K$ 使得 $K = \mathrm{Frac}(S)$, $S \supset R$ 而 $\mathfrak{m}_R = R \cap \mathfrak{m}_S$.

(ii) 若以上的 R 已是赋值环, 而且 $K = \mathrm{Frac}(R)$, 则 (i) 中的 S 只能是 R 本身.

证明 断言 (i) 是 [7, 定理 10.6.3] 的特例. 对于 (ii), 设有满足条件之 S, 则对于所有 $s \in S \subset K$, 若 $s \notin R$ 则存在非零之 $r \in \mathfrak{m}_R$ 使得 $s = \frac{1}{r}$, 特别地 $s \in S^\times$ 而 $s^{-1} = r \in \mathfrak{m}_S$; 这与 $S = \mathfrak{m}_S \sqcup S^\times$ 矛盾. 综上, $S = K$. □

如果将域 K 的所有局部子环按照

$$R \preceq S \iff R \subset S \text{ 且 } \mathfrak{m}_R = R \cap \mathfrak{m}_S \tag{6.4.1}$$

作成偏序集, 则命题 6.4.4 说明其中以 K 为分式域的赋值环恰是对 $\preceq$ 的极大元.

命题 6.4.5 设整环 R 包含于域 K. 命 $\mathcal{V}_R := \{\text{赋值环 } V : R \subset V \subset K\}$.

(i) 若 R 在 K 中整闭, 则:

(a) $R = \bigcap_{V \in \mathcal{V}_R} V$;

(b) 当 R 为局部环时 $R = \bigcap_{\substack{V \in \mathcal{V}_R \\ R \preceq V}} V$, 此处符号如 (6.4.1).

(ii) 对于一般情形, R 在 K 中的整闭包等于 $\bigcap_{V \in \mathcal{V}_R} V$.

证明 对于 (i.a), 证明 $x \in K \smallsetminus R$ 蕴涵存在 $V \in \mathcal{V}_R$ 使得 $x \notin V$ 即可. 考虑 K 的子环 $S := R[x^{-1}] \supset R$. 观察到 $x \notin S$: 设若不然, 则 $x = c_n x^{-n} + \cdots + c_1 x^{-1} + c_0$, 其中 $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ 而 $c_i \in R$, 继而 $x^{n+1} - c_0 x^n - \cdots - c_n = 0$, 和 R 的整闭条件矛盾.

因此 $x^{-1} \notin S^\times$, 可取 S 的素理想 $\mathfrak{q}$ 使得 $x^{-1} \in \mathfrak{q}$. 以命题 6.4.4 (i) 取 $V \in \mathcal{V}_R$ 使得 $S_\mathfrak{q} \preceq V$. 由 $x^{-1} \in \mathfrak{q} \subset \mathfrak{m}_V$ 可得 $x \notin V$.

对于 (i.b), 目标是证 $x \in K \smallsetminus R$ 蕴涵存在 $V \in \mathcal{V}_R$ 使得 $x \notin V$ 而 $R \preceq V$. 兹断言在 (i.a) 的论证中必有 $x^{-1}S + \mathfrak{m}_R S \neq S$. 设若不然, 则有

$$\begin{gathered} x^{-1}(c_n x^{-n} + \cdots + c_1 x^{-1} + c_0) + (d_m x^{-m} + \cdots + d_1 x^{-1} + d_0) = 1, \\ n, m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, \quad c_i \in R, \quad d_j \in \mathfrak{m}_R. \end{gathered}$$

补零可设 $m = n$, 两边同乘以 x^{n+1} 得到

$$(1 - d_0)x^{n+1} - (c_0 + d_1)x^n - \cdots - c_n = 0,$$

其首项系数属于 $R^\times$. 这仍与 R 整闭和 $x \in K \smallsetminus R$ 矛盾. 断言得证.

于是在 (i.a) 的论证中可取到 $\mathfrak{q} \supset x^{-1}S + \mathfrak{m}_R S$. 从 $S_\mathfrak{q} \preceq V$ 可得 $\mathfrak{m}_R \subset \mathfrak{m}_V$, 而 $\mathfrak{m}_R \supset R \cap \mathfrak{m}_V$ 总成立, 故 $R \preceq V$.

对于 (ii), 记 R 在 K 中的整闭包为 S. 命题 6.4.3 蕴涵 $\mathcal{V}_R = \mathcal{V}_S$. 既然 S 整闭, 所求等式化为 (i.a). □

6.5 离散赋值环

离散赋值环是赋值环 (定义 6.4.1) 的特例, 其在赋值论中的一般定义见诸 [7, 定义 10.6.2], 简单回顾如下.

定义 6.5.1 (离散赋值环) 域 K 上的离散赋值意谓满足以下性质的满射 $v : K^\times \to \mathbb{Z}$: 对所有 $x, y \in K^\times$ 皆有

- $\diamond$ $v(xy) = v(x) + v(y)$, 换言之 v 是群同态;
- $\diamond$ $v(x + y) \geq \min\{v(x), v(y)\}$, 此处规定 $v(0) = \infty$.

对于整环 R, 若 $K := \mathrm{Frac}(R)$ 有离散赋值 v 使得

$$R = v^{-1}([0, \infty]),$$

则称 R 为离散赋值环, 而满足 $v(\varpi) = 1$ 的元素 $\varpi \in R$ 称为离散赋值环 R 的一致化元.

在 [7, §10.6] 中, 以上的 $R \subset K$ 被记为 $K^\circ \subset K$.

例 6.5.2 对于素数 p, 考虑 p-进数域 $\mathbb{Q}_p = \mathrm{Frac}(\mathbb{Z}_p)$ 上的 p-进赋值 $v_p : \mathbb{Q}_p^\times \to \mathbb{Z}$, 这使得 p-进整数环 $\mathbb{Z}_p$ 成为相应的离散赋值环, 而 p 是其一致化元. 类似地, 任意域 $\Bbbk$ 上的形式幂级数代数 $\Bbbk[\![X]\!]$ 也是离散赋值环: $\mathrm{Frac}(\Bbbk[\![X]\!]) = \Bbbk(\!(X)\!)$ (形式 Laurent 级数代数) 上相应的赋值 v 映 $\sum_n a_n X^n$ 为 $\min\{n \in \mathbb{Z} : a_n \neq 0\}$, 它以 X 为一致化元.

以上两类例子中, 离散赋值环都是 (ϖ)-进完备的, 其中 ϖ 是任意一致化元.

在几何场景中, 考虑复流形 (或整代数簇) 上的亚纯 (或有理) 函数在余一维子流形 (或满足适当正则条件的子簇) 上的消没次数, 依然能得到离散赋值和相应的离散赋值环.

尽管定义 6.5.1 涉及辅助资料 $v : K^\times \to \mathbb{Z}$, 以下观察表明 v 的选取实则唯一.

引理 6.5.3 设 R 为离散赋值环, $K = \mathrm{Frac}(R)$, 而 $v : K^\times \to \mathbb{Z}$ 满足定义 6.5.1 的条件, 则:

(i) $R^\times = v^{-1}(0)$;

(ii) R 的一致化元精确到 $R^\times$ 是唯一的, 而且当一致化元 ϖ 选定, 所有 $x \in K^\times$ 都能唯一写成

$$x = \varpi^n u, \quad n \in \mathbb{Z},\ u \in R^\times;$$

(iii) R 是主理想环, 且有双射

$$\begin{aligned} \mathbb{Z}_{\geq 0} \sqcup \{\infty\} &\xrightarrow{1:1} \{R \text{ 的理想}\} \\ n &\longmapsto v^{-1}([n, \infty]); \end{aligned}$$

(iv) R 是局部环, 以 $\mathfrak{m} := v^{-1}([1,\infty])$ 为极大理想, $\mathfrak{m}$ 的生成元恰是 R 的任意一致化元;

(v) R 的所有非零理想都能唯一地表作 $\mathfrak{m}^n$, 其中 $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$.

给定离散赋值环 R, 定义 6.5.1 中的 v 由 R 唯一确定.

证明 对于 (i), $v(x) = 0$ 蕴涵 $v(x^{-1}) = 0$, 此时 $x^{-1} \in R$ 故 $x \in R^\times$. 反之若 $x, x^{-1} \in R$, 则从 $0 = v(1) = v(x) + v(x^{-1})$ 可得 $v(x) = 0$.

对于 (ii), 给定一致化元 ϖ, 设 $x \in K^\times$ 而 $n := v(x)$, 则 $v(x/\varpi^n) = 0$ 和 (i) 蕴涵 $u := x/\varpi^n \in R^\times$ 而 $x = \varpi^n u$. 反之若 $x = \varpi^n u$, 其中 $u \in R^\times$, 则必有 $n = v(x)$. 综上可见 x 有唯一表法 $x = \varpi^n u$. 这也顺带说明一致化元精确到 $R^\times$ 唯一.

对于 (iii), 先前讨论说明对任意 $x, y \in K^\times$, 必有 $x \mid y$ (当 $v(x) \leq v(y)$) 或 $y \mid x$ (当 $v(x) \geq v(y)$). 因此 R 的所有非零理想 I 皆形如 $I = (t)$, 其中 t 是满足 $v(t) = \min\{v(x) : x \in I\}$ 的任意元素, 而且对所有 t 皆有

$$(t) = v^{-1}([n,\infty]), \quad n := v(t).$$

注意到上式对 $t = 0$ 也成立, 此时 $n = \infty$. 这给出所求双射.

特别地, $\mathfrak{m} := v^{-1}([1,\infty])$ 是 R 的唯一极大理想, 它的生成元恰是任意一致化元 ϖ. 而 $v^{-1}([n,\infty]) = (\varpi^n) = \mathfrak{m}^n$. 由此得到 (iv) 和 (v).

总结上述讨论, 知对所有 $x \in R \smallsetminus \{0\}$ 皆有

$$x \in \mathfrak{m}^n \smallsetminus \mathfrak{m}^{n+1} \implies v(x) = n;$$

因为 $K = \mathrm{Frac}(R)$ 而 $v : K^\times \to \mathbb{Z}$ 是群同态, 上式从 R 的环结构唯一地确定 v. □

命题 6.5.4 对于整环 R, 以下陈述等价:

(i) R 是离散赋值环;

(ii) R 是 Noether 赋值环 (定义 6.4.1), 且 R 非域.

证明 以下均取 $K = \mathrm{Frac}(R)$.

(i) $\implies$ (ii). 引理 6.5.3 (iii)—(v) 表明 R 是主理想整环而且 R 非域, 因此 R 是 Noether 环; 由引理 6.5.3 (ii) 的唯一表法知对于所有 $x \in K^\times$ 皆有 $x \in R$ 或 $x^{-1} \in R$, 故 R 是赋值环.

(ii) $\implies$ (i). 引理 6.4.2 说明 R 是局部整环, 记其极大理想为 $\mathfrak{m}$. 因为赋值环中任两个元素必有整除关系, 而 $\mathfrak{m}$ 有限生成, 故 $\mathfrak{m}$ 必由某个 $\varpi \in R \smallsetminus \{0\}$ 生成. 考虑乘法群 $K^\times/R^\times$, 按照 $xR^\times \preceq yR^\times \iff x^{-1}y \in R$ 赋予全序 $\preceq$, 兹断言有群同构

$$\mathbb{Z} \xrightarrow{1:1} K^\times/R^\times, \quad n \mapsto \varpi^n R^\times.$$

首先易见这是群同态. 关于单性: 设 $\varpi^n R^\times = R^\times$, 则 $\varpi^n \in R^\times$ 故 $n = 0$. 以下论证满性: 给定陪集 $xR^\times$, 不失一般性可设 $x \in R \smallsetminus \{0\}$. 若 $x \notin R^\times$ 则 $x \in \mathfrak{m} = (\varpi)$, 故 $(x) \subsetneq (x/\varpi)$, 而当 $x/\varpi \notin R^\times$ 时继续迭代, 得到理想的严格升链, 它必在有限步内停止; 换言之存在 $n \geq 0$ 使得 $x/\varpi^n \in R^\times$. 满性得证.

按此得到群同态 $v : K^\times \to K^\times/R^\times \simeq \mathbb{Z}$, 它满足定义 6.5.1 所要求的性质, 特别是 $v^{-1}([0, \infty]) = R$. 细节请读者自理或见 [7, 命题 10.6.1] 证明. 由此知 R 是离散赋值环. □

6.6 整扩张和素谱

本节旨在探讨整扩张 $R \to S$ 在素谱层次诱导的映射. 问题容易化到 $R \to S$ 为单的情形, 因此以下均要求 R 为 S 的子环.

引理 6.6.1 设 R 为整环 S 的子环. 若 S 为 R 的整扩张, 则 R 为域当且仅当 S 为域.

证明 设 S 为域, $x \in R$ 非零, 则 $x^{-1} \in S$ 满足

$$x^{-n} + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0 = 0, \quad a_0, \ldots, a_{n-1} \in R, \quad n \in \mathbb{Z}_{\geq 1};$$

两边同乘以 x^{n-1} 得出 $x^{-1} = -a_{n-1} + \cdots - a_0 x^{n-1} \in R$.

反之设 R 为域, $y \in S$ 非零, 则有

$$y^n + a_{n-1}y^{n-1} + \cdots + a_0 = 0, \quad a_0, \ldots, a_{n-1} \in R, \quad n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$$

取尽可能小的 n, 则因为 S 是整环, 必有 $a_0 \neq 0$. 由此得到 $y(y^{n-1} + \cdots + a_1) = -a_0 \in R^\times$, 继而得到 $y^{-1} = -a_0^{-1}(y^{n-1} + \cdots + a_1)$. □

记任意域扩张 $L|K$ 的自同构群为 $\mathrm{Aut}(L|K)$, 并在 Galois 扩张的情形记之为 $\mathrm{Gal}(L|K)$.

引理 6.6.2 设 R 为整环, $K := \mathrm{Frac}(R)$, 而 $L|K$ 是域的代数扩张. 记 R 在 L 中的整闭包为 S, 则 $L = \mathrm{Frac}(S)$.

证明 设 $x \in L$. 因为 $L|K$ 是代数扩张, 存在 $n \geq 1$ 和 $c_0, \ldots, c_{n-1} \in K$ 使得 $x^n + c_{n-1}x^{n-1} + \cdots + c_0 = 0$. 将每个 c_i 表成分式, 用 $K^\times$ 适当伸缩 x 后可设 $c_0, \ldots, c_{n-1} \in R$, 此时 $x \in S$. □

定理 6.6.3 (Krull–Cohen–Seidenberg) 设 R 为环 S 的子环, 使得 S 是 R 的整扩张. 此时有以下性质.

(i) 由 $\mathfrak{q} \mapsto \mathfrak{q} \cap R$ 给出的映射 $\mathrm{Spec}(S) \to \mathrm{Spec}(R)$ 为满.

(ii) 映射 $\mathrm{Spec}(S) \to \mathrm{Spec}(R)$ 的每个纤维中的素理想互不包含.

(iii) 对所有满足 $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{p}'$ 的 $\mathfrak{p}, \mathfrak{p}' \in \mathrm{Spec}(R)$, 以及满足 $\mathfrak{q} \cap R = \mathfrak{p}$ 的 $\mathfrak{q} \in \mathrm{Spec}(S)$, 存在 $\mathfrak{q}' \in \mathrm{Spec}(S)$ 使得 $\mathfrak{q}' \supset \mathfrak{q}$ 而且 $\mathfrak{q}' \cap R = \mathfrak{p}'$.

(iv) 若 R 是局部环而 $\mathfrak{p} \in \mathrm{MaxSpec}(R)$, 则纤维 $\{\mathfrak{q} : \mathfrak{q} \cap R = \mathfrak{p}\}$ 等于 $\mathrm{MaxSpec}(S)$.

(v) 设 S 为整环, 而且 R 正规 (定义 6.2.1). 对所有满足 $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{p}'$ 的 $\mathfrak{p}, \mathfrak{p}' \in \mathrm{Spec}(R)$, 以及满足 $\mathfrak{q}' \cap R = \mathfrak{p}'$ 的 $\mathfrak{q}' \in \mathrm{Spec}(S)$, 皆存在 $\mathfrak{q} \in \mathrm{Spec}(S)$ 使得 $\mathfrak{q}' \supset \mathfrak{q}$ 而且 $\mathfrak{q} \cap R = \mathfrak{p}$.

(vi) 承上, 进一步设 S 是 R 在一个正规域扩张 $L \supset K := \mathrm{Frac}(R)$ 中的整闭包, 则 $\mathrm{Aut}(L|K)$ 在 $\mathrm{Spec}(S) \to \mathrm{Spec}(R)$ 的每个纤维上传递地作用.

证明 先证 (iv). 设 $\mathfrak{q} \in \mathrm{MaxSpec}(S)$. 命 $\mathfrak{p}_0 := \mathfrak{q} \cap R$. 易见域 $S/\mathfrak{q}$ 是其子环 $R/\mathfrak{p}_0$ 的整扩张, 故引理 6.6.1 说明 $R/\mathfrak{p}_0$ 也是域. 于是局部环的定义蕴涵 $\mathfrak{p}_0 = \mathfrak{p}$.

对于反方向, 须证所有满足 $\mathfrak{q} \cap R = \mathfrak{p}$ 的 $\mathfrak{q} \in \mathrm{Spec}(S)$ 都是极大理想. 一如既往, $R/\mathfrak{p} \hookrightarrow S/\mathfrak{q}$ 是整环的整扩张, 而 $R/\mathfrak{p}$ 是域, 代入引理 6.6.1 知 $S/\mathfrak{q}$ 是域, 故 $\mathfrak{q}$ 极大.

接着论证 (i) 和 (ii). 选定 $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R)$, 并观察到其纤维中的 $\mathfrak{q}$ 必不交 $R \smallsetminus \mathfrak{p}$. 考虑单同态 $R_{\mathfrak{p}} \hookrightarrow S_{\mathfrak{p}} \simeq S \underset{R}{\otimes} R_{\mathfrak{p}}$ (基于定义–命题 1.8.3), 这仍是整扩张 (命题 6.1.9). 问题遂化约到 R 为局部环, 其极大理想为 $\mathfrak{p}$ 的情形. 由 (iv) 知 $\mathfrak{p}$ 的纤维无非 $\mathrm{MaxSpec}(S)$. 这足以说明 (i) (因为 S 含 R 故非零) 和 (ii) (因为极大理想互不包含).

继续处理 (iii). 考虑断言中的 $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{p}'$ 和 $\mathfrak{q}$. 对 $R/\mathfrak{p} \hookrightarrow S/\mathfrak{q}$ 应用 (i), 得到 $\overline{\mathfrak{q}'} \in \mathrm{Spec}(S/\mathfrak{q})$ 使得 $\overline{\mathfrak{q}'} \cap (R/\mathfrak{p}) = \mathfrak{p}'/\mathfrak{p}$; 相应的 $\mathfrak{q}' \in \mathrm{Spec}(S)$ 因而满足 $\mathfrak{q}' \supset \mathfrak{q}$ 和 $\mathfrak{q}' \cap R = \mathfrak{p}'$.

对于 (vi), 记 $\Gamma := \mathrm{Aut}(L|K)$. 由条件推得每个 $\sigma \in \Gamma$ 都诱导 S 作为 R-代数的自同态. 考虑中间域 $K' := L^{\Gamma}$. 根据 Galois 理论 [7, 定理 9.2.8], 我们知道 $L|K'$ 是 Galois 扩张, $K'|K$ 纯不可分. 令 R' 为 R 在 K' 中的整闭包, 则 $\mathrm{Frac}(R') = K'$ (引理 6.6.2). 先观察到

$$\mathrm{Spec}(R') \to \mathrm{Spec}(R), \quad \mathfrak{p}' \mapsto \mathfrak{p} = \mathfrak{p}' \cap R$$

是双射. 诚然, 仅当 $p := \mathrm{char}(K) > 0$ 时才可能有 $K' \neq K$; 基于纯不可分性, 此时逆映射由 $\mathfrak{p}' = \left\{ t \in R' : t^{p^m} \in \mathfrak{p},\ m \gg 0 \right\}$ 给出. 因此以下不妨设 $L|K$ 为 Galois 扩张.

先处理 $[L : K] < \infty$ 的情形. 考虑 $\mathfrak{p}$ 的纤维中的元素 $\mathfrak{q}, \mathfrak{q}' \in \mathrm{Spec}(S)$. 使用反证法, 设 $\Gamma\mathfrak{q}$ 不含 $\mathfrak{q}'$, 则 (ii) 蕴涵 $\mathfrak{q}' \not\subset \sigma(\mathfrak{q})$ 对所有 $\sigma \in \Gamma$ 成立. 由于 Γ 有限, 素避性质 (命题 1.1.3) 遂说明存在 $x \in \mathfrak{q}' \smallsetminus \bigcup_{\sigma \in \Gamma} \sigma(\mathfrak{q})$. 考虑范数 $y := \mathrm{N}_{L|K}(x) \in K$, 由于 $L|K$ 是 Galois 扩张, $y = \prod_{\sigma \in \Gamma} \sigma(x) \in S$. 注意到

- ◇ y 在 R 上为整, 故 R 正规导致 $y \in R$;
- ◇ 对所有 $\sigma \in \Gamma$ 皆有 $x \notin \sigma^{-1}(\mathfrak{q})$, 导致 $y \notin \mathfrak{p}$;
- ◇ 然而由 $x \in \mathfrak{q}'$ 知 $y \in \mathfrak{q}' \cap R = \mathfrak{p}$, 矛盾.

下面设 $[L:K]$ 无穷, 而 $\mathfrak{q}, \mathfrak{q}'$ 属于 $\mathfrak{p}$ 的纤维. 在此需要考虑 Γ 上的 Krull 拓扑. 对 $L|K$ 的每个有限 Galois 子扩张 $E|K$, 定义集合

$$\mathcal{T}(E) := \{\sigma \in \Gamma : \sigma(\mathfrak{q} \cap E) = \mathfrak{q}' \cap E\};$$

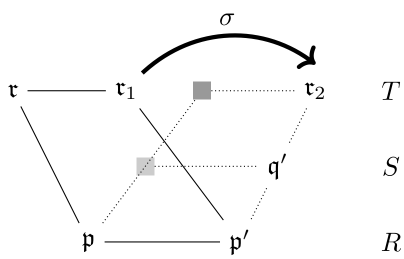
在上式中, 和 E 取交相当于和 R 在 E 中的整闭包取交. 从有限扩张情形知 $\mathcal{T}(E) \neq \varnothing$. 进一步,

- $\diamond$ $\mathcal{T}(E)$ 在 Γ 中闭 (它是 $\mathrm{Gal}(E|K)$ 的某个子集的原像);
- $\diamond$ $E_0 \subset E \implies \mathcal{T}(E_0) \supset \mathcal{T}(E)$ (可用 (ii) 的结论);
- $\diamond$ 所有 $\mathcal{T}(E)$ 之交非空 (用 Γ 的紧性和上一步).

取 $\sigma \in \bigcap_E \mathcal{T}(E)$ 给出 $\sigma(\mathfrak{q}) = \mathfrak{q}'$.

最后证 (v). 命 $L_0 := \mathrm{Frac}(S)$ 和 $K := \mathrm{Frac}(R)$, 则 $L_0|K$ 是代数扩张, 故可取 L_0 在 K 上的正规闭包 L. 令 T 为 R 在 L 中的整闭包. 考虑如断言中的 $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{p}'$ 和 $\mathfrak{q}'$, 满足 $\mathfrak{q}' \cap R = \mathfrak{p}'$. 用 (i) 取 $\mathfrak{r} \in \mathrm{Spec}(T)$ 使之映至 $\mathfrak{p}$. 对 $R \hookrightarrow T$ 应用 (iii), 得到 $\mathfrak{r}_1 \in \mathrm{Spec}(T)$ 使得 $\mathfrak{r}_1$ 映至 $\mathfrak{p}'$ 而 $\mathfrak{r}_1 \supset \mathfrak{r}$. 其次, 用 (i) 取 $\mathfrak{r}_2 \in \mathrm{Spec}(T)$ 使之映至 $\mathfrak{q}'$; 由 (vi) 知存在 $\sigma \in \mathrm{Aut}(L|K)$ 使得 $\sigma(\mathfrak{r}_1) = \mathfrak{r}_2$. 易见 $\mathfrak{q} := \sigma(\mathfrak{r}) \cap S$ 即所求素理想. □

关于定理 6.6.3 (v) 的论证可图解为:



思路是先构造 $\mathfrak{r}$, 以 (iii) 构造上位之 $\mathfrak{r}_1$, 然后用某个 σ 来 “摆动” 图像, 以使 $\mathfrak{r}_1$ 变至 $\mathfrak{q}'$ 的纤维中某个选定之 $\mathfrak{r}_2$, 使得 $\sigma(\mathfrak{r}) \cap S$ 给出所求的下位素理想.

6.7 上行和下行性质

出于几何的动机, 我们希望对给定的环同态 $R \to S$ 研究连续映射 $\mathrm{Spec}(S) \to \mathrm{Spec}(R)$ 的像, 和此映射的拓扑性质. 这些问题往往牵涉以下环论概念.

定义 6.7.1 (上行和下行) 给定环同态 $\varphi: R \to S$.

▷ **上行** 如果对所有满足 $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{p}'$ 的 $\mathfrak{p}, \mathfrak{p}' \in \mathrm{Spec}(R)$ 和满足 $\varphi^{-1}(\mathfrak{q}) = \mathfrak{p}$ 的 $\mathfrak{q} \in \mathrm{Spec}(S)$, 皆存在 $\mathfrak{q}' \in \mathrm{Spec}(S)$ 使得 $\mathfrak{q}' \supset \mathfrak{q}$ 而且 $\varphi^{-1}(\mathfrak{q}') = \mathfrak{p}'$, 则称 φ 有上行性质.

▷ **下行** 如果对所有满足 $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{p}'$ 的 $\mathfrak{p}, \mathfrak{p}' \in \operatorname{Spec}(R)$ 和满足 $\varphi^{-1}(\mathfrak{q}') = \mathfrak{p}'$ 的 $\mathfrak{q}' \in \operatorname{Spec}(S)$, 皆存在 $\mathfrak{q} \in \operatorname{Spec}(S)$ 使得 $\mathfrak{q}' \supset \mathfrak{q}$ 而且 $\varphi^{-1}(\mathfrak{q}) = \mathfrak{p}$, 则称 φ 有下行性质.

图解如下:

<table>
<tr><th>上行</th><th>下行</th><th>图例</th></tr>
<tr>
<td>$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & \exists\mathfrak{q}' \arrow[dd, mapsto] \\ \mathfrak{q} \arrow[dd, mapsto] \arrow[ur, phantom, "\subset"] & \\ & \mathfrak{p}' \\ \mathfrak{p} \arrow[ur, phantom, "\subset"] & \end{tikzcd}$$</td>
<td>$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & \mathfrak{q}' \arrow[dd, mapsto] \\ \exists\mathfrak{q} \arrow[dd, mapsto] \arrow[ur, phantom, "\subset"] & \\ & \mathfrak{p}' \\ \mathfrak{p} \arrow[ur, phantom, "\subset"] & \end{tikzcd}$$</td>
<td>$$\begin{tikzcd} \star \arrow[d, mapsto] & \in & \operatorname{Spec}(S) \arrow[d, "\operatorname{Spec}(\varphi)"'] & S \\ \varphi^{-1}(\star) & \in & \operatorname{Spec}(R) & R \arrow[u, "\varphi"'] \end{tikzcd}$$</td>
</tr>
</table>

注记 6.7.2 基于引理 2.5.6 和命题 2.5.7 对素理想及其包含关系的拓扑诠释, φ 的上行与下行性质分别翻译为特化与泛化沿 $\operatorname{Spec}(\varphi)$ 的提升性质, 见定义 A.5.4.

引理 6.7.3 若 $\varphi : R \to S$ 和 $\psi : S \to T$ 皆有上行 (或下行) 性质, 则 $\psi\varphi : R \to T$ 亦然.

证明 观图自见, 或翻译为引理 A.5.5. □

引理 6.7.4 环同态 $\varphi : R \to S$ 的下行性质等价于以下性质: 对所有满足 $\varphi(\mathfrak{p})S \neq S$ 的 $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(R)$, 以及 $V(\varphi(\mathfrak{p})S)$ 中任何对偏序 $\subset$ 的极小元 $\mathfrak{q}$, 我们有 $\varphi^{-1}(\mathfrak{q}) = \mathfrak{p}$.

证明 设 φ 有下行性质. 取定断言中的 $\mathfrak{p}$ 和 $\mathfrak{q}$, 则

$$\mathfrak{p}^\natural := \varphi^{-1}(\mathfrak{q}) \supset \varphi^{-1}(\varphi(\mathfrak{p})S) \supset \mathfrak{p}.$$

下行性质给出 $\mathfrak{q}^\flat \subset \mathfrak{q}$ 使得 $\varphi^{-1}(\mathfrak{q}^\flat) = \mathfrak{p}$. 从 $\mathfrak{q} \supset \mathfrak{q}^\flat \supset \varphi(\mathfrak{p})S$ 与 $\mathfrak{q}$ 的极小性得到 $\mathfrak{q} = \mathfrak{q}^\flat$, 对 φ 取原像便有 $\mathfrak{p}^\natural = \mathfrak{p}$.

反之, 考虑下行性质中的资料 $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{p}'$ 和 $\mathfrak{q}'$, 对此有

$$\varphi(\mathfrak{p})S \subset \varphi(\mathfrak{p}')S \subset \mathfrak{q}' \subsetneq S.$$

由引理 2.8.1 取 $V(\varphi(\mathfrak{p})S)$ 对 $\subset$ 的极小元 $\mathfrak{q}$, 使得 $\mathfrak{q} \subset \mathfrak{q}'$. 按假设必有 $\varphi^{-1}(\mathfrak{q}) = \mathfrak{p}$, 故下行性质成立. □

引理 6.7.5 设 I 为 R 的理想, 则取商 $R \to R/I$ 有上行性质; 设 $f \in R$, 则局部化 $R \to R[f^{-1}]$ 有下行性质.

证明 鉴于推论 1.10.11, 素谱层次的映射在两种情形分别等同于闭嵌入 $V(I) \hookrightarrow \operatorname{Spec}(R)$ 和开嵌入 $D(f) \hookrightarrow \operatorname{Spec}(R)$, 而闭子集和开子集分别对点的特化和泛化封闭 (命题 A.5.2). □

接着介绍上行性质和下行性质的重要实例. 首先是 Krull–Cohen–Seidenberg 定理 6.6.3 的一则体现.

定理 6.7.6 (整扩张的上行性质) 设 $R \to S$ 为环的整扩张, 则它有上行性质.

证明 一般的整扩张分解为取商和嵌入, 两者皆整; 引理 6.7.5 表明取商有上行性质, 而嵌入的上行性质不外是定理 6.6.3 (iii). 根据引理 6.7.3, 合成后仍有上行性质. □

如对整扩张施加更强条件, 则亦有下行性质.

定理 6.7.7 设 S 为整环, 其子环 R 是正规整环, 而且 $R \to S$ 是环的整扩张, 则此时 $R \to S$ 有下行性质.

证明 定理 6.6.3 (v) 的改述. □

定理 6.7.8 (平坦扩张的下行性质) 设 $R \to S$ 为环的平坦扩张, 则它有下行性质.

证明 考虑下行性质中给定的 $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{p}'$ 和 $\mathfrak{q}'$. 命题 5.2.2 说明 $S_{\mathfrak{q}'}$ 是平坦 $R_{\mathfrak{p}'}$-代数. 因为 $R_{\mathfrak{p}'} \to S_{\mathfrak{q}'}$ 是局部环同态 (定义 1.11.7), 推论 5.5.2 进一步表明它忠实平坦. 定理 5.5.4 (ii) 遂蕴涵 $\mathrm{Spec}(S_{\mathfrak{q}'}) \to \mathrm{Spec}(R_{\mathfrak{p}'})$ 满.

任取 $S_{\mathfrak{q}'}$ 的素理想使之映至 $\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}'} \in \mathrm{Spec}(R_{\mathfrak{p}'})$, 记其在 $\mathrm{Spec}(S)$ 中的像为 $\mathfrak{q}$, 因此 $\mathfrak{q} \subset \mathfrak{q}'$. 鉴于交换图表

$$
\begin{tikzcd}
S \arrow[r] & S_{\mathfrak{q}'} \\
R \arrow[r] \arrow[u, "\varphi"] & R_{\mathfrak{p}'} \arrow[u, "\varphi_{\mathfrak{p}'}"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathrm{Spec}(S) \arrow[d, "\mathrm{Spec}(\varphi)"'] & \mathrm{Spec}(S_{\mathfrak{q}'}) \arrow[l] \arrow[d, "\mathrm{Spec}(\varphi_{\mathfrak{p}'})"] \\
\mathrm{Spec}(R) & \mathrm{Spec}(R_{\mathfrak{p}'}) \arrow[l]
\end{tikzcd}
$$

可知 $\mathfrak{q}$ 是下行性质所寻求的素理想. □

6.8 初探整闭包的有限性

代数几何学中的一个自然问题是考虑整环 R 在 $K := \mathrm{Frac}(R)$ 的扩域 L 中的整闭包, 并在适当条件下判断它是不是有限 R-代数. 这类问题颇为困难. 本章仅介绍其中最基础的情形.

首先回忆 R 在 L 中的整闭包 S 是正规整环 (命题 6.1.7), 而且在 $L|K$ 是代数扩张时满足 $\mathrm{Frac}(S) = L$ (引理 6.6.2).

定理 6.8.1 设 R 为 Noether 正规整环, $K = \mathrm{Frac}(R)$, 而 L 是 K 的有限可分扩张. 记 R 在 L 中的整闭包为 $S := L^{R\text{-int}}$, 则 S 是有限 R-代数.

证明 如果断言对扩张 $L|K$ 成立, 则对任何中间域 $K'|K$ 亦然. 因此取正规闭包后不妨设 $L|K$ 是 Galois 扩张. 记 R 在 L 中的整闭包为 S. 选取 L 作为 K-向量空间的基

$x_1, \ldots, x_n$, 用 $K^\times$ 伸缩后可设 $x_1, \ldots, x_n \in S$. 另一方面, $|\mathrm{Gal}(L|K)| = [L:K] = n$, 故可将 $\mathrm{Gal}(L|K)$ 的元素列为 $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$. 定义

$$\begin{aligned} A &:= \begin{pmatrix} \sigma_1(x_1) & \cdots & \sigma_1(x_n) \\ \vdots & & \vdots \\ \sigma_n(x_1) & \cdots & \sigma_n(x_n) \end{pmatrix}, \\ d &:= \det A. \end{aligned}$$

根据 [7, 引理 9.5.5] 有 $d \in L^\times$. 兹断言有 L 中的包含关系

$$d^2 S \subset \sum_{i=1}^n R x_i.$$

若此式成立, 则 $S \subset d^{-2} \sum_{i=1}^n R x_i$ 蕴涵 S 也是有限生成 R-模, 从而完成证明.

为此, 首先观察到 $\mathrm{Gal}(L|K)$ 的作用保持 S, 故 $d \in S$. 给定 $x \in S$, 作唯一的 K-线性展开 $x = \sum_{i=1}^n c_i x_i$, 则从 $\sum_{j=1}^n c_j \sigma_i(x_j) = \sigma_i(\sum_{j=1}^n c_j x_j) = \sigma_i(x)$ 可得 L 上的矩阵等式

$$A \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_1(x) \\ \vdots \\ \sigma_n(x) \end{pmatrix}$$

将两边左乘以经典伴随矩阵 $A^\vee$, 并且注意到 $A^\vee$ 的矩阵元和每个 $\sigma_j(x)$ 都属于 S, 便得到 $dc_i \in S$ 对所有 $1 \leq i \leq n$ 成立.

另外, $\mathrm{Gal}(L|K)$ 的作用重排 A 的行, 因此 $d^2 = (\det A)^2$ 是 $\mathrm{Gal}(L|K)$-不变的, 故 $d^2 \in K$. 于是 $d^2 c_i \in K \cap S$. 然而 R 正规蕴涵 $K \cap S = R$, 综上可得 $d^2 x = \sum_i d^2 c_i x_i \subset \sum_i R x_i$. 证毕. □

以下结论的证明涉及 §7.7 介绍的 Noether 正规化.

定理 6.8.2 (E. Noether) 设 $\Bbbk$ 为域, R 为有限生成 $\Bbbk$-代数, 也是整环. 记 $K = \mathrm{Frac}(R)$, 设域 L 是 K 的有限扩张, 记 R 在 L 中的整闭包为 $S := L^{R\text{-int}}$, 则 S 是有限 R-代数.

证明 根据 Noether 正规化定理的推论 7.7.4, 存在 R 的子代数 $R^\flat$ 使得 $R^\flat \simeq \Bbbk[X_1, \ldots, X_n]$, 而 R 在 $R^\flat$ 上为整; 后者也相当于说 R 是有限 $R^\flat$-代数 (命题 6.1.4), 特别地 K 是 $K^\flat := \mathrm{Frac}(R^\flat)$ 的有限扩张.

留意到 $L^{R\text{-int}} = L^{R^\flat\text{-int}}$, 若它是有限 $R^\flat$-代数, 当然也是有限 R-代数, 故不妨以 $R^\flat$ 代 R, 化约到 $R = \Bbbk[X_1, \ldots, X_n]$ 的情形.

由于 R 是 Noether 环, 若 $L'|L$ 是有限扩张, 而断言对 R 和 $L'|K$ 成立, 则对 R 和 $L|K$ 亦成立. 因此可取 $L|K$ 的正规闭包, 在不改变 R 的前提下化约到 $L|K$ 是正规扩张的情形.

记 $K' = L^{\mathrm{Aut}_K(L)}$. 根据 Galois 理论 [7, 定理 9.2.8] 可知 $L|K'$ 是 Galois 扩张, $K'|K$ 纯不可分. 以下先处理 $L = K'$ 的特例.

可设 $L \neq K$, 否则因为 $R = \Bbbk[X_1, \ldots, X_n]$ 已是正规的, 问题平凡. 此时 $p := \mathrm{char}(\Bbbk)$ 是素数, 而存在 $q \in p^{\mathbb{Z}_{\geq 1}}$ 使得 $L^q \subset K$; 见 [7, 定义–定理 8.7.3]. 向 $\Bbbk$ 连同 L 添入有限多个元素的 q 次根, 可得有限纯不可分扩张 $\Bbbk'|\Bbbk$ 使得

$$L \subset L' := \Bbbk'\left(X_1^{1/q}, \ldots, X_n^{1/q}\right), \quad [L' : L] < \infty.$$

问题化为证 $\Bbbk[X_1, \ldots, X_n]$ 在 L' 中的整闭包 S' 的有限性. 然而

$$S' \supset \Bbbk'\left[X_1^{1/q}, \ldots, X_n^{1/q}\right],$$

而右式已是以 L' 为分式域的正规整环 (命题 6.2.2), 因此 $S' = \Bbbk'\left[X_1^{1/q}, \ldots, X_n^{1/q}\right]$, 这显然是有限 $\Bbbk[X_1, \ldots, X_n]$-代数.

最后回到一般的 $L \supset K' \supset K$. 已知 R 在 K' 中的整闭包 S' 是有限 R-代数, 满足 $\mathrm{Frac}(S') = K'$. 再说明 S' 在 L 中的整闭包是有限 S'-代数即可. 既然 S' 作为整闭包是正规的, 有限性蕴涵它是 Noether 环, 而且 $L|K'$ 可分, 应用定理 6.8.1 即可完成证明.□

6.9 Krull–秋月定理

本节探讨 1 维 Noether 整环在分式域的有限扩张中的行为. 首先阐明 1 维整环的定义, 这是定义 7.1.1 的预告.

定义 6.9.1 设 R 为整环. 若 R 的非零素理想皆为极大理想, 则称 R 为 1 维整环.

记有限长度 R-模的长度为 $\ell(\cdot)$.

引理 6.9.2 设 R 为 1 维 Noether 整环, $K := \mathrm{Frac}(R)$, 而 M 为满足 $r := \dim_K K \underset{R}{\otimes} M \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ 的无挠 R-模. 若 $x \in R \smallsetminus \{0\}$, 则 $R/(x)$ 是有限长度 R-模, 而且

$$\ell(M/xM) \leq r\ell(R/(x)).$$

证明 按定义, 零理想不属于 $\mathrm{Ass}(R/(x))$, 因此推论 3.4.11 蕴涵 $R/(x)$ 长度有限. 其次设前提中的 M 有限生成, 则 $K \underset{R}{\otimes} M \simeq K^{\oplus r}$ 导致存在子 R-模 $M_0 \subset M$ 使得 $M_0 \simeq R^{\oplus r}$, 而 $\overline{M} := M/M_0$ 的元素皆是挠元; 熟习的论证说明零理想不属于 $\mathrm{Ass}(M/M_0)$, 故 M/M_0 长度有限. 对所有 $n \geq 1$, 从

$$\ker\left[M/x^n M \twoheadrightarrow \overline{M}/x^n\overline{M}\right] = (M_0 + x^n M)/x^n M \simeq M_0/(x^n M \cap M_0) \twoheadleftarrow M_0/x^n M_0$$

可得

$$\ell(M/x^n M) \leq \ell(M_0/x^n M_0) + \ell(\overline{M}/x^n\overline{M}) \leq \ell(M_0/x^n M_0) + \ell(\overline{M}).$$

由于 M 无挠, 乘以 x 给出同构 $M/xM \xrightarrow{\sim} xM/x^2M$, 迭代给出 $\ell(M/x^nM) = n\ell(M/xM)$; 同理有 $\ell(M_0/x^nM_0) = n\ell(M_0/xM_0)$. 代入先前不等式给出

$$\ell(M/xM) \leq \ell(M_0/xM_0) + \frac{1}{n}\ell(\overline{M}),$$

而另一方面 $\ell(M_0/xM_0) = r\ell(R/(x))$. 让 $n \to +\infty$ 即所求.

对于一般的 M, 表之为有限生成子模 $M' \subset M$ 的滤过并, 则 M/xM 也是诸 $(M'+xM)/xM \simeq M'/(xM \cap M')$ 的滤过并. 由于 $M'/xM' \twoheadrightarrow M'/(xM\cap M')$ 而 $K \underset{R}{\otimes} M' \hookrightarrow K \underset{R}{\otimes} M$ (因为 $R \to K$ 平坦), 上一步给出 $\ell((M'+xM)/xM) \leq r\ell(R/(x))$. 引理 3.1.9 遂说明 M/xM 长度有限且 $\ell(M/xM) \leq r\ell(R/(x))$. □

定理 6.9.3 (W. Krull, 秋月康夫) 设 R 为 1 维 Noether 整环, 域 L 是 $K := \mathrm{Frac}(R)$ 的有限扩张, S 是 L 的子环, 而且 $R \subset S$, 则:

(i) S 是 1 维 Noether 整环;

(ii) 若 $\mathfrak{p}$ 是 R 的素理想, 则 S 中满足 $R \cap \mathfrak{q} = \mathfrak{p}$ 的素理想 $\mathfrak{q}$ 个数有限;

(iii) 对所有非零理想 $J \subset S$ 皆有 $R \cap J \neq 0$, 而且 S/J 是有限长度 R-模.

证明 先证 (iii). 任取 $x \in J \smallsetminus \{0\}$, 则存在 $a_0, \ldots, a_n \in R$ 使得 $a_0, a_n \neq 0$ 而 $a_nx^n + \cdots + a_0 = 0$. 由此知 $a_0 \in R \cap J \smallsetminus \{0\}$. 引理 6.9.2 蕴涵 R/a_0R 长度有限. 另一方面, $K \underset{R}{\otimes} S \simeq K \cdot S \subset L$ (引理 1.6.4), 故引理 6.9.2 蕴涵 S/a_0S 作为 R-模长度有限, 从而其商模 S/J 和子模 J/a_0S 亦然. 由 J/a_0S 长度有限进一步推得 J 是有限生成理想.

(i). 由 (iii) 可知 S 是 Noether 环. 在 (iii) 中取 J 为非零素理想, 则 S/J 既是整环又是有限维 $R/(R\cap J)$-向量空间, 代入引理 6.6.1 知 S/J 是域, 故 J 极大. 综上, S 是 1 维 Noether 整环.

(ii). 当 $\mathfrak{p} = 0$ 时, (iii) 表明 $R \cap \mathfrak{q} = 0 \implies \mathfrak{q} = 0$, 故以下设 $\mathfrak{p} \neq 0$. 由 (iii) 知 $S/\mathfrak{p}S$ 是有限维 $R/\mathfrak{p}$-向量空间, 因而是 Artin 环, 其素理想个数有限 (定理 3.3.1), 因此 $\mathfrak{q}$ 的选法亦有限. □

习题

1. 设 R 为 Noether 正规整环, $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. 证明 $R[\![X_1, \ldots, X_n]\!]$ 仍是正规整环.

提示 可设 $n = 1$. 将分式域中的元素写成 $f = a_rX^r + a_{r+1}X^{r+1} + \cdots$, 其中 $r \in \mathbb{Z}$ 而 $a_i \in K$. 仿照引理 6.2.8 的证法, 但改用 f 的最低次系数 a_r, 不必再化约到 R_0.

2.

3.

第七章 维数理论

7.1 维数的定义

本节的 R 代表选定的交换环. 以下的素理想链都默认为严格递增的.

定义 7.1.1 (维数和高度) 对于 R 中的素理想链 $\mathfrak{p}_0 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathfrak{p}_m$, 称 m 为此链的长度.

◇ 若 R 非零, 定义 R 的 Krull 维数为

$$\begin{aligned}\dim R &:= \sup\{m \in \mathbb{Z}_{\geq 0} : \text{存在长度 } m \text{ 的素理想链}\} \\ &\in \mathbb{Z}_{\geq 0} \sqcup \{\infty\};\end{aligned}$$

在 R 为零环时另外规定 $\dim R := -\infty$. 不致混淆时, 将 $\dim R$ 简称为 R 的维数.

◇ 若 $\mathfrak{p}$ 是 R 的素理想, 定义其高度为

$$\begin{aligned}\operatorname{ht}(\mathfrak{p}) &:= \sup\{m \in \mathbb{Z}_{\geq 0} : \text{存在长度 } m \text{ 的素理想链, 末项为 } \mathfrak{p}\} \\ &\in \mathbb{Z}_{\geq 0} \sqcup \{\infty\}.\end{aligned}$$

◇ 对 R 的任意真理想 I, 定义

$$\operatorname{ht}(I) = \inf_{\mathfrak{p} \supset I} \operatorname{ht}(\mathfrak{p}).$$

命题 2.5.7 说明 R 的素理想和拓扑空间 $\operatorname{Spec}(R)$ 的不可约闭子集通过 $\mathfrak{p} \mapsto V(\mathfrak{p})$ 一一对应, 而且对应关系严格反序. 比照定义 A.9.1, 立见:

◇ $\dim R$ 即空间 $\operatorname{Spec}(R)$ 的 Krull 维数,

◇ 设 $\mathfrak{p}$ 为 R 的素理想, 则 $\mathrm{ht}(\mathfrak{p})$ 即 $V(\mathfrak{p})$ 的余维数 $\mathrm{codim}\,(V(\mathfrak{p}),\mathrm{Spec}(R))$.

◇ 对于任意真理想 I, 由于 $\mathfrak{p}\supset I \iff V(\mathfrak{p})\subset V(I)$, 上一条蕴涵 $\mathrm{ht}(I) = \mathrm{codim}(V(I),\mathrm{Spec}(R))$.

◇ 推而广之, 对于任意真理想 I 和素理想 $\mathfrak{p}'\subset I$, 参考推论 1.10.11 (i) 可见

$$\begin{aligned}\mathrm{ht}(I/\mathfrak{p}') &= \mathrm{codim}\,(V(I/\mathfrak{p}'),\mathrm{Spec}(R/\mathfrak{p}'))\\ &= \mathrm{codim}\,(V(I),V(\mathfrak{p}'))\,.\end{aligned}\tag{7.1.1}$$

当 R 非零时, 定义 7.1.1 (或 §A.9 的一般理论) 即刻给出 $\dim R = \sup_{\mathfrak{p}}\mathrm{ht}(\mathfrak{p})$, 其中 $\mathfrak{p}$ 遍历 R 的素理想; 遍历极大理想亦同.

例 7.1.2 域的维数是 0.

例 7.1.3 若 R 是主理想整环而非域, 则 $\dim R = 1$, 这是因为此时 R 的非零素理想皆极大.

引理 7.1.4 环的维数有以下性质.

(i) 非零环 R 满足 $\dim R = 0$ 当且仅当所有素理想皆极大; 在 R 为 Noether 环的情形, 这也等价于 R 是 Artin 环.

(ii) 对所有素理想 $\mathfrak{p}$ 皆有 $\mathrm{ht}(\mathfrak{p}) = \dim R_{\mathfrak{p}}$.

(iii) 对所有真理想 I 都有 $\dim R \geq \dim(R/I) + \mathrm{ht}(I)$, 特别地 $\dim R \geq \dim(R/I)$.

(iv) 对所有乘性子集 U 都有 $\dim R \geq \dim R[U^{-1}]$.

(v) 对所有乘性子集 U 和满足 $\mathfrak{p}\cap U = \varnothing$ 的素理想 $\mathfrak{p}$ 都有 $\mathrm{ht}(\mathfrak{p}) = \mathrm{ht}(\mathfrak{p}[U^{-1}])$.

证明 对于 (i), 显然 $\dim R = 0$ 等价于素理想皆极大; Noether 环的情形来自定理 3.3.3.

应用 (1.7.3) 的保序双射即得 (ii).

对于 (iii), 若 $\dim(R/I) = \infty$ 则显然也有 $\dim R = \infty$. 以下设 $m := \dim(R/I) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, 则存在 R/I 的素理想链

$$\overline{\mathfrak{p}_0} \subsetneq \cdots \subsetneq \overline{\mathfrak{p}_m},$$

其中 $\overline{\mathfrak{p}_i}$ 对应到 $\mathfrak{p}_i \in V(I)$. 将 $\mathfrak{p}_0 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathfrak{p}_m$ 与以 $\mathfrak{p}_0$ 为末项的链接合, 便有

$$\dim R \geq m + \mathrm{ht}(\mathfrak{p}_0),$$

而右式又 $\geq \dim(R/I) + \mathrm{ht}(I)$.

断言 (iv) 和 (v) 缘自命题 1.7.6 (ii). □

定义 7.1.5 (模的维数) 设 M 为 R-模. 当 M 非零时, 定义其维数为

$$\dim M := \dim R/\mathrm{ann}(M);$$

另对零模定义 $\dim\{0\} = -\infty$. 在强调环 R 的场合, 记之为 $\dim_R M$.

若取 $M = R$, 则回归定义 7.1.1.

注记 7.1.6 当 M 有限生成时, 由 $\mathrm{Supp}(M) = V(\mathrm{ann}(M))$ (引理 2.4.5) 可知 $\dim M = \dim \mathrm{Supp}(M)$; 一些文献只对有限生成的 M 考虑其维数, 例如 [2, Chapitre VIII, §1.4].

引理 7.1.7 模的维数有以下性质.

(i) 若有短正合列 $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$, 则

$$\max\{\dim M', \dim M''\} \leq \dim M;$$

若要求 M 和 M' 皆有限生成, 则等号成立.

(ii) 设 M 有限生成, 则对所有 $\mathfrak{p} \in \mathrm{Supp}(M)$ 都有

$$\dim_{R_\mathfrak{p}} M_\mathfrak{p} = \mathrm{codim}(V(\mathfrak{p}), \mathrm{Supp}(M)),$$

而且

$$\begin{aligned}\dim_R M &= \sup_{\mathfrak{p} \in \mathrm{Supp}(M)} \dim_{R_\mathfrak{p}} M_\mathfrak{p} \\ &= \sup_{\substack{\mathfrak{m} \in \mathrm{Supp}(M) \\ \cap \mathrm{MaxSpec}(R)}} \dim_{R_\mathfrak{m}} M_\mathfrak{m}.\end{aligned}$$

(iii) 设 R 为 Noether 环, M 有限生成且非零, 则以下陈述等价.

(a) $\dim M = 0$,

(b) $R/\mathrm{ann}(M)$ 为 Artin 环,

(c) M 是有限长度 R-模.

证明 对于 (i), 由 $\mathrm{ann}(M) \subset \mathrm{ann}(M') \cap \mathrm{ann}(M'')$ 可得第一部分. 若 M 和 M' 皆有限生成, 则 $\mathrm{Supp}(M) = \mathrm{Supp}(M') \cup \mathrm{Supp}(M'')$ (命题 2.4.6) 和命题 A.9.3 蕴涵第二部分.

对于 (ii), 首先有 $V(\mathfrak{p}) \subset \mathrm{Supp}(M)$. 命 $\overline{R} = R/\mathrm{ann}_R(M)$, 记 $\overline{\mathfrak{p}}$ 为 $\mathfrak{p}$ 在其中的像. 由 $\mathrm{ann}_R(M)_\mathfrak{p} = \mathrm{ann}_{R_\mathfrak{p}}(M_\mathfrak{p})$ (命题 5.2.6) 知

$$\begin{aligned}\mathrm{codim}\left(V(\mathfrak{p}), V(\mathrm{ann}_R M)\right) &\xlongequal{\text{推论 } 1.10.11} \mathrm{codim}\left(V(\overline{\mathfrak{p}}), \mathrm{Spec}(\overline{R})\right) \\ &= \mathrm{ht}(\overline{\mathfrak{p}}) \xlongequal{\text{引理 } 7.1.4\text{ (ii)}} \dim \overline{R}_{\overline{\mathfrak{p}}} = \dim R_\mathfrak{p}/\mathrm{ann}_R(M)_\mathfrak{p} = \dim M_\mathfrak{p}.\end{aligned}$$

根据 (A.9.1), 取 $\sup_{\mathfrak{p}}$ 即是 $\dim \operatorname{Supp}(M) = \dim M$. 又因为 $\operatorname{Supp}(M)$ 向上封闭而 $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{p}'$ 蕴涵 $\operatorname{ht}(\overline{\mathfrak{p}}) \leq \operatorname{ht}(\overline{\mathfrak{p}'})$, 此 sup 也可以取在 $\operatorname{Supp}(M) \cap \operatorname{MaxSpec}(R)$ 上.

对于 (iii), 引理 7.1.4 蕴涵 (a) $\iff$ (b). 现在设 (a) 成立, $M = Rx_1 + \cdots + Rx_n$, 其中 $x_1, \ldots, x_n \in M \smallsetminus \{0\}$, 则 (i) 说明 $\dim Rx_i = 0$; 为了证明 (c), 对所有 i 证 Rx_i 为有限长度模即可.

于是可设 $M = R/I$, 其中 I 是满足 $\dim(R/I) = 0$ 的真理想. 然而 (a) $\iff$ (b) 表明 R/I 为 Artin 环, 故为有限长度 R-模.

下面证明 (c) $\implies$ (a). 取 $\operatorname{Supp}(M)$ 对包含关系的极小元 $\mathfrak{p}$ (引理 2.8.1), 它属于 $\operatorname{Ass}(M)$ (命题 3.4.6 (v)), 故存在 R-模的单同态 $R/\mathfrak{p} \hookrightarrow M$. 由于 M 长度有限, $R/\mathfrak{p}$ 是 Artin 环. 定理 3.3.1 蕴涵 $\mathfrak{p}$ 是极大理想. 由此立得 $\dim M = \dim R = 0$. □

以下再介绍几则和维数相关的概念, 它们都能翻译为拓扑语言.

定义 7.1.8 如果对 R 的所有极小素理想 $\mathfrak{p}$ 都有相同的 $\dim R/\mathfrak{p}$, 其值有限, 则称 R 等维.

由于极小素理想对应到 $\operatorname{Spec}(R)$ 的不可约分支 (命题 2.8.1), 上述定义相当于要求 $\operatorname{Spec}(R)$ 是定义 A.9.8 所谓的等维空间. 对于一般的 R, 命题 A.9.7 (或直接验证) 给出

$$\dim R = \sup_{\mathfrak{p}:\text{极小素理想}} \dim R/\mathfrak{p}. \tag{7.1.2}$$

注记 7.1.9 定义–命题 A.9.5 对任意拓扑空间 X 和点 x 定义了局部 Krull 维数 $\dim_x X$, 它在 $X = \operatorname{Spec}(R)$ 的情形也有环论诠释: 鉴于 Zariski 拓扑中开集的描述, 我们有

$$\begin{aligned}\dim_{\mathfrak{p}} R &:= \dim_{\mathfrak{p}} \operatorname{Spec}(R) \\ &= \inf_{f \in R \smallsetminus \mathfrak{p}} \dim R[f^{-1}].\end{aligned}$$

7.2 参数理想

回忆到仅有有限多个极大理想的环称为半局部环 (定义 1.11.2), 而 $\operatorname{rad}(R)$ 代表环 R 的 Jacobson 根基 (定义 2.3.1).

定义 7.2.1 (参数理想) 设 R 为半局部 Noether 环. 设 M 为有限生成 R-模. 如果理想 I 满足 $I \subset \operatorname{rad}(R)$, 而且 M/IM 为有限长度模, 则称 I 为 M 的一个参数理想.

一些文献将参数理想称为定义理想.

引理 7.2.2 设 R 为半局部 Noether 环. 对于理想 $I \subset \operatorname{rad}(R)$ 和有限生成 R-模 M, 以下陈述等价:

(i) I 是 M 的参数理想;

(ii) $\overline{R} := R/(I + \mathrm{ann}(M))$ 是 Artin 环;

(iii) 存在 $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ 使得 $\mathrm{rad}(R)^k \subset I + \mathrm{ann}(M)$.

特别地, $\mathrm{rad}(R)$ 总是 M 的参数理想.

证明 不妨设 M 非零, 否则问题是平凡的.

首先断言 $V(\mathrm{ann}(M/IM)) = \mathrm{Supp}(M/IM)$ 等于 $V(I + \mathrm{ann}(M))$. 诚然, 局部化的正合性和定理 2.3.4 给出

$$\varnothing \neq \mathrm{Supp}(M/IM) = \mathrm{Supp}(M) \cap \{\mathfrak{p} : IR_{\mathfrak{p}} \subsetneq R_{\mathfrak{p}}\};$$

根据命题 1.7.6 (i), 末项是 $\mathrm{Supp}(M) \cap V(I) = V(I + \mathrm{ann}(M))$, 断言得证.

对 M/IM 应用引理 7.1.7 (iii), 定理 3.3.3 和上述断言, 可知

$$\begin{aligned} I \text{ 是 } M \text{ 的参数理想} &\iff \frac{R}{\mathrm{ann}(M/IM)} \text{是 Artin 环} \\ &\iff V(\mathrm{ann}(M/IM)) \subset \mathrm{MaxSpec}(R) \\ &\iff V(I + \mathrm{ann}(M)) \subset \mathrm{MaxSpec}(R) \\ &\iff \overline{R} \text{ 是 Artin 环.} \end{aligned}$$

这给出 (i) $\iff$ (ii). 下证 (ii) $\implies$ (iii). 因为 $\mathrm{rad}(R)$ 在 $\overline{R}$ 中的像包含于 $\mathrm{rad}(\overline{R})$, 若 $\overline{R}$ 是 Artin 环则 $k \gg 0 \implies \mathrm{rad}(\overline{R})^k = 0$ (定理 3.3.1), 故 $\mathrm{rad}(R)^k \subset I + \mathrm{ann}(M)$.

接着证明 (iii) $\implies$ (i). 设存在 $k \geq 0$ 使得 $\mathrm{rad}(R)^k \subset I + \mathrm{ann}(M)$. 由于 $\mathrm{rad}(R)$ 包含 R 的所有极大理想之积, 若 $\mathfrak{p} \in V(I + \mathrm{ann}(M))$, 则 $\mathfrak{p}$ 必包含 R 的某个极大理想, 因而 $\mathfrak{p} \in \mathrm{MaxSpec}(R)$. □

给定半局部环 R 上的有限生成模 M 及其参数理想 I. 取 R 和 M 上的 I-进滤过 (例 4.2.12), 得到相应的分次对象

$$\mathrm{gr}_I(R) = \bigoplus_{n \geq 0} \frac{I^n}{I^{n+1}}, \quad \mathrm{gr}_I(M) = \bigoplus_{n \geq 0} \frac{I^n M}{I^{n+1} M}.$$

由于 M/IM 是有限长度 R/I-模, 将定义–命题 4.7.1 应用于 M 及其 I-进滤过, 便有:

- ◇ Hilbert–Samuel 函数 $\chi_I(M, \cdot) : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_{\geq 0}$, 它映 $p \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ 为 $\ell(\mathrm{gr}_I^p M)$ (此处 $\ell(\cdot)$ 代表模的长度), 而在负整数上取值恒为零;
- ◇ Hilbert–Samuel 多项式 $H_{I,M} \in \mathbb{Q}[X]$, 这是整值多项式, 其刻画为

$$p \gg 0 \implies \chi_I(M, p) = H_{I,M}(p);$$

◇ 相应的 $K_{I,M} \in \mathbb{Q}[X] \smallsetminus \{0\}$, 满足 $K_{I,M}(X+1) - K_{I,M}(X) = H_{I,M}(X)$ 和

$$q \gg 0 \implies K_{I,M}(q) = \ell(M/I^q M) = \sum_{p=0}^{q-1} \chi_I(M,p).$$

定义 7.2.3 对于半局部 Noether 环 R 上的有限生成模 M, 选定参数理想 I 以定义 $K_{I,M}$. 记 $d(M) := \deg K_{I,M}$.

注意到 $H_{I,M} \neq 0$ 时 $d(M) = \deg H_{I,M} + 1$, 而 $H_{I,M} = 0$ 时有 $d(M) = 0$ 或 $-\infty$ 两种可能.

命题 7.2.4 在上述场景中, 若 $\mathrm{gr}_I(R)$ 作为 $\mathrm{gr}_I^0(R) = R/I$ 上的分次代数可由 n 个齐次元生成, 则 $d(M) \leq n$.

证明 定理 4.4.8 说明 $\deg H_{I,M} \leq n-1$. 如果 $H_{I,M} \neq 0$ 则这直接导致 $d(M) \leq n$, 而 $H_{I,M} = 0$ 时无论 $d(M) = 0$ 或 $-\infty$ 都满足所示估计. □

引理 7.2.5 设 R 为半局部 Noether 环, M 为有限生成 R-模, 以 I 为参数理想.

(i) 多项式 $K_{I,M}$ 的最高次项不依赖参数理想 I 的选取. 特别地, 定义 7.2.3 的 $d(M)$ 不依赖 I 的选取.

(ii) 我们有 $d(M) = -\infty$ 当且仅当 $M = 0$.

(iii) 给定有限生成 R-模的短正合列 $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$, 我们有

$$d(M) = \max\{d(M'), \deg d(M'')\},$$
$$\deg(K_{I,M} - K_{I,M'} - K_{I,M''}) \leq d(M') - 1.$$

证明 对于 (i), 应用引理 7.2.2 比较不同参数理想给出的分次对象: 给定 I, 取 $J = \mathrm{rad}(R)$, 则存在 $m \geq 1$ 使得有

$$J^m + \mathrm{ann}(M) \subset I + \mathrm{ann}(M) \subset J + \mathrm{ann}(M).$$

上式蕴涵 $\ell(M/J^n M) \leq \ell(M/I^n M) \leq \ell(M/J^{mn} M)$ 对所有 $n \geq 0$ 成立, 由此证得 (i). 留意到这与命题 4.7.2 (i) 的论证类似.

对于 (ii), 定义表明 $d(M) = -\infty$ 当且仅当 $M = \bigcap_{q \geq 0} I^q M$, Krull 交定理 3.7.1 表明后者蕴涵 $M = 0$.

鉴于 (ii), 当 M, M', M'' 皆非零时, 断言 (iii) 来自推论 4.7.3, 而涉及零模的情况容易分开讨论. □

引理 7.2.6 设 R 为半局部 Noether 环, M 为有限生成 R-模, 而 $t \in \mathrm{rad}(R)$, 则

$$d(M) \geq d(M/tM) \geq d(M) - 1;$$

若要求乘以 t 给出的同态 $M \xrightarrow{t} M$ 为单, 则 $d(M/tM) = d(M) - 1$.

证明 引理 7.2.5 (iii) 第一式蕴涵 $d(M) \geq d(M/tM)$. 任取参数理想 $I \ni t$. 对所有 $n \geq 0$ 皆有

$$\ell\left(\frac{M}{tM + I^n M}\right) = \ell\left(\frac{M}{I^n M}\right) - \ell\left(\frac{tM + I^n M}{I^n M}\right).$$

注意到

$$\frac{M}{I^{n-1}M} \twoheadrightarrow \frac{M}{\{x \in M : tx \in I^n M\}} \xrightarrow{\sim} \frac{tM}{tM \cap I^n M} \simeq \frac{tM + I^n M}{I^n M}$$
$$y \mapsto ty.$$

因此当 $n \gg 0$ 时

$$K_{I,M/tM}(n) \geq K_{I,M}(n) - K_{I,M}(n-1);$$

基于多项式次数和增长速率的关系, 遂有 $d(M/tM) \geq d(M) - 1$.

若要求 $M \xrightarrow{t} M$ 为单, 则有正合列 $0 \to M \to M \to M/tM \to 0$, 故引理 7.2.5 (iii) 第二式化为 $d(M/tM) \leq d(M) - 1$, 配合上一段得到 $d(M/tM) = d(M) - 1$. □

定义 7.2.7 对于半局部 Noether 环 R 上的非零有限生成模 M, 定义 $s(M) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ 为 M 的所有参数理想中最小可能的生成元个数; 对于 $M = 0$ 的情形另外规定 $s(M) = -\infty$.

定理 7.2.8 对于半局部 Noether 环 R 上的有限生成模 M, 我们有

$$s(M) = \dim M = d(M).$$

证明 鉴于定义和引理 7.2.5 (ii), 无妨设 M 非零.

先对 $d(M)$ 递归地论证 $\dim M \leq d(M)$. 选定 M 的参数理想 I. 若 $d(M) = 0$, 则当 $n \gg 0$ 时 $I^n M = I^{n+1} M = \cdots$. 定理 3.7.1 蕴涵 $n \gg 0$ 时 $I^n M = 0$, 故 $M = M/I^n M$ 长度有限; 引理 7.1.7 (iii) 蕴涵 $\dim M = 0$.

以下设 $d(M) \geq 1$. 在 $\mathrm{Supp}(M) = V(\mathrm{ann}(M))$ 中取极小元 $\mathfrak{p}$ 使得 $\dim(R/\mathfrak{p}) = \dim M$, 则命题 3.4.6 (v) 表明 $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(M)$; 从 $R/\mathfrak{p} \hookrightarrow M$ 知 $d(R/\mathfrak{p}) \leq d(M)$, 故问题化约到特例 $M = R/\mathfrak{p}$. 考虑 R 的素理想链

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_0 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathfrak{p}_m.$$

兹断言 $m \leq d(R/\mathfrak{p})$. 显然可设 $m \geq 1$. 任选 $t \in \mathfrak{p}_1 \smallsetminus \mathfrak{p}_0$, 则有 $R/(Rt + \mathfrak{p})$ 中长度为 $m-1$ 的素理想链

$$\frac{\mathfrak{p}_1}{Rt + \mathfrak{p}} \subsetneq \cdots \subsetneq \frac{\mathfrak{p}_m}{Rt + \mathfrak{p}}.$$

故 $\dim(R/(Rt + \mathfrak{p})) \geq m - 1$. 由 t 的取法可知 $R/\mathfrak{p} \xrightarrow{t} R/\mathfrak{p}$ 单, 故引理 7.2.6 给出 $d(R/(Rt + \mathfrak{p})) = d(R/\mathfrak{p}) - 1$. 递归知 $\dim(R/(Rt + \mathfrak{p})) \leq d(R/\mathfrak{p}) - 1$, 故 $m \leq d(R/\mathfrak{p})$.

接着论证 $s(M) \leq \dim M$. 命 $r := \dim M$. 兹断言存在 $t_1, \ldots, t_r \in \mathrm{rad}(R)$ 使得 $M/\sum_{i=1}^r t_i M$ 长度有限, 由此可得 $(t_1, \ldots, t_r)$ 是 M 的参数理想, 故 $s(M) \leq r$.

当 $r=0$ 时, 这来自引理 7.1.7. 设 $r>0$, 则对 $\mathrm{Supp}(M)$ 中所有满足 $\dim R/\mathfrak{p}=r$ 的极小元 $\mathfrak{p}$ (参考先前论证) 皆有 $\mathrm{rad}(R)\not\subset\mathfrak{p}$, 否则因为 R 是半局部环, $\mathfrak{p}$ 将会包含, 从而等于 R 的某个极大理想, 从而导致 $r=0$, 矛盾.

符合上述要求的素理想 $\mathfrak{p}$ 皆属于 $\mathrm{Ass}(M)$, 故个数有限. 对 $I:=\mathrm{rad}(R)$ 及这些素理想 $\mathfrak{p}$ 应用素避性质 (命题 1.1.3), 可选取 $t_1\in\mathrm{rad}(R)$ 使之不属于任何上述之 $\mathfrak{p}$. 从 $\mathrm{ann}(M/t_1M)\supset Rt_1+\mathrm{ann}(M)$ 和 t_1 的取法, 可见 $\dim M/t_1M<\dim M$. 对 r 递归即可继续取到 $t_2,\ldots,t_r$ 从而证明断言.

为了完成证明, 以下论证 $d(M)\leq s(M)$. 设 $M/\sum_{i=1}^s t_iM$ 长度有限. 考虑 $M, M/t_1M, M/(t_1M+t_2M),\ldots$. 引理 7.2.6 蕴涵每一步 $d(\cdots)$ 至多降 1, 而末项 $L:=M/\sum_{j=1}^s t_jM$ 满足 $d(L)=0$, 这是因为 L 长度有限导致 $\ell(L/I^nL)\leq\ell(L)$ 对所有 $n\geq 0$ 成立, 而 $M\neq 0$ 蕴涵 $L\neq 0$ (定理 2.3.4). 综之 $d(M)\leq s(M)$. □

注记 7.2.9 在定理 7.2.8 的场景中, 设 $M\neq 0$ 而 $d:=\dim M$, 取 $t_1,\ldots,t_d$ 使得 $(t_1,\ldots,t_d)$ 是 M 的参数理想. 既然已知 $s(M)=d=d(M)$, 上述证明末段的 $d(\cdots)$ 每一步恰好降 1, 因此对所有 $0\leq i\leq d$ 皆有

- ⋄ $\dim(M/(t_1,\ldots,t_i)M)=d-i$,
- ⋄ $(t_{i+1},\ldots,t_d)$ 是 $M/(t_1,\ldots,t_i)M$ 的参数理想.

推论 7.2.10 对于半局部 Noether 环 R 上的有限生成模 M, 若 $\mathrm{gr}_I(R)$ 作为分次 R/I-代数可由 n 个齐次元生成, 则 $\dim M\leq n$. 特别地, $\dim M<\infty$.

证明 结合命题 7.2.4 和定理 7.2.8. □

多项式 $K_{I,M}$ 的最高次系数也具有重要的几何意义, 称为 M 的重数.

定义 7.2.11 (重数) 对于半局部 Noether 环 R 上的有限生成模 M, 任取其参数理想 I. 当 M 非零时, 将 $K_{I,M}$ 写作

$$K_{I,M}=\frac{e(M)X^{d(M)}}{d(M)!}+\text{低次项},$$

称 $e(M)$ 为 M 的重数. 对于 $M=0$ 的情形, 规定重数 $e(M)=0$.

重数不依赖 I 的选取. 若 $H_{I,M}=0$, 则 $K_{I,M}$ 是属于 $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ 的常数多项式; 若 $H_{I,M}\neq 0$, 则 M 的重数正是 (4.7.1) 中的 $e(M)$. 无论在哪种情况, 均有 $e(M)\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$, 而且引理 7.2.5 (ii) 表明 $e(M)=0\iff M=0$.

7.3 Krull 主理想定理

本节从定理 7.2.8 推导以下的重要结论, 适用于所有 Noether 环.

定理 7.3.1 (W. Krull) 设 R 为 Noether 环, $I = (t_1, \ldots, t_s)$ 为 R 的真理想, 则对偏序集 $(V(I), \subset)$ 中的所有极小元 $\mathfrak{p}$ 都有 $\mathrm{ht}(\mathfrak{p}) \leq s$, 特别地 $\mathrm{ht}(I) \leq s$.

证明 观察到 $IR_\mathfrak{p} \subset \mathfrak{p}R_\mathfrak{p} = \mathrm{rad}(R_\mathfrak{p})$. 以下说明 $\dim R_\mathfrak{p}/IR_\mathfrak{p} = 0$: 基于命题 1.7.6, 若素理想 $\mathfrak{p}' \subset \mathfrak{p}$ 使得 $\mathfrak{p}'R_\mathfrak{p} \supset IR_\mathfrak{p}$, 则取 R 中原像可得 $\mathfrak{p}' \supset I$, 从而 $\mathfrak{p}' = \mathfrak{p}$.

鉴于引理 7.1.7 (iii) 和引理 7.2.2, 上一段说明 $IR_\mathfrak{p}$ 是 $R_\mathfrak{p}$ 的参数理想. 然而 $IR_\mathfrak{p}$ 由 $t_1, \ldots, t_s$ 的像生成, 故定理 7.2.8 蕴涵 $\mathrm{ht}(\mathfrak{p}) = \dim R_\mathfrak{p} = s(R_\mathfrak{p}) \leq s$. 证毕. □

作为 $s = 1$ 时的特例, 若 I 是 Noether 环的主理想, 则对 $V(I)$ 中的所有极小元 $\mathfrak{p}$ 都有 $\mathrm{ht}(\mathfrak{p}) \leq 1$; 事实上, 一般情形可以从 $s = 1$ 情形推得. 是故定理 7.3.1 又称为 **Krull 主理想定理**.

推论 7.3.2 设 R 为 Noether 环, 真理想 I 满足 $\mathrm{ht}(I) = n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, 则存在 $x_1, \ldots x_n \in I$ 使得 x_i 不包含于 $(V((x_1, \ldots, x_{i-1})), \subset)$ 的任何极小元 ($1 \leq i \leq n$, 当 $i = 1$ 时规定 $(x_1, \ldots, x_{i-1}) = 0$), 而且 $\mathrm{ht}((x_1, \ldots, x_i)) = i$ 恒成立.

证明 递归选取. 设已有 $x_1, \ldots, x_{i-1}$, 记 $\mathcal{V} = V((x_1, \ldots, x_{i-1}))$, 兹断言存在 x_i 使之不属于 $(\mathcal{V}, \subset)$ 的任何极小元: 设若不然, 则素避性质 (命题 1.1.3) 给出 $(\mathcal{V}, \subset)$ 的极小元 $\mathfrak{p}$ 使得 $I \subset \mathfrak{p}$, 然而定理 7.3.1 蕴涵 $i - 1 \geq \mathrm{ht}(\mathfrak{p}) \geq \mathrm{ht}(I) = n$, 矛盾.

于是 $\mathrm{ht}((x_1, \ldots, x_i)) \geq i$. 定理 7.3.1 进而确保 $\mathrm{ht}((x_1, \ldots, x_i)) = i$. 证毕. □

作为初步应用, 下面证明唯一分解整环的一则刻画. 关于唯一分解整环的基础知识可见 [7, §5.7] 或 [9, §§6.2—6.3].

命题 7.3.3 设 R 为 Noether 整环, 则 R 是唯一分解整环当且仅当 R 中所有满足 $\mathrm{ht}(\mathfrak{p}) = 1$ 的素理想 $\mathfrak{p}$ 均为主理想.

证明 对于 “仅当” 方向, 设素理想 $\mathfrak{p}$ 满足 $\mathrm{ht}(\mathfrak{p}) = 1$. 任取 $\mathfrak{p}$ 中非零元, 则其每个不可约因子皆属于 $\mathfrak{p}$, 因此 $\mathfrak{p}$ 包含某个不可约元 p. 既然 R 是唯一分解整环, p 是素元, 换言之 (p) 是素理想, 故 $\mathrm{ht}(\mathfrak{p}) = 1$ 蕴涵 $\mathfrak{p} = (p)$.

对于 “当” 的方向, 依 [7, 命题 5.7.2] 需要两个性质: 所有 $\neq R$ 的主理想构成的升链均会停止, 以及不可约元皆是素元. 第一点由 Noether 条件确保. 对于第二点, 设 q 为 R 的不可约元, 任取 $(V((q)), \subset)$ 中的极小元 $\mathfrak{p}$, 定理 7.3.1 蕴涵 $\mathrm{ht}(\mathfrak{p}) = 1$, 因此存在 $p \in R$ 使得 $\mathfrak{p} = (p)$. 然而 $(q) \subset (p) \iff p \mid q$, 而 q 不可约导致 $(p) = (q)$, 故 q 确实是素元. 证毕. □

关于 Krull 主理想定理 7.3.1, 一个自然的问题是确定有哪些主理想满足 $\mathrm{ht} = 1$.

答案是简单的.

引理 7.3.4 设 R 为非零 Noether 环, $x \in R$, 则 $\mathrm{ht}((x)) = 0$ 当且仅当 x 是 R 的零因子.

证明 设 $\mathfrak{p}$ 为 R 的素理想, 则 $\mathrm{ht}(\mathfrak{p}) = 0$ 等价于 $\mathfrak{p}$ 是 R 的极小素理想, 故 $\mathrm{ht}((x)) = 0$ 等价于 x 包含于某个极小素理想. 但极小素理想之并正是 R 的零因子集; 见命题 3.4.6. □

7.4 纤维和维数

任何环同态 $\varphi : R \to S$ 都诱导连续映射 $\mathrm{Spec}(\varphi) : \mathrm{Spec}(S) \to \mathrm{Spec}(R)$, 映 $\mathfrak{q}$ 为 $\varphi^{-1}(\mathfrak{q})$. 对于 R 的素理想 $\mathfrak{p}$, 剩余类域 $\kappa(\mathfrak{p}) := R_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}$ 同构于 $\mathrm{Frac}(R/\mathfrak{p})$ (定义–命题 1.11.6). 命题 1.11.8 表明 $\mathrm{Spec}\left(S \underset{R}{\otimes} \kappa(\mathfrak{p})\right)$ 同胚于 $\mathfrak{p}$ 在 $\mathrm{Spec}(\varphi)$ 之下的纤维, 映法是对 $S \underset{R}{\otimes} \kappa(\mathfrak{p})$ 的素理想 $\mathfrak{Q}$ 取其在 S 中的原像.

由于 $R \smallsetminus \mathfrak{p}$ 在 $\kappa(\mathfrak{p})$ 中的像可逆, 有 $R_{\mathfrak{p}} \underset{R}{\otimes} \kappa(\mathfrak{p}) = \kappa(\mathfrak{p})$. 若 $\mathfrak{p} = \mathrm{Spec}(\varphi)(\mathfrak{q})$, 则 φ 诱导局部同态 $\varphi_{\mathfrak{p},\mathfrak{q}} : R_{\mathfrak{p}} \to S_{\mathfrak{q}}$, 见命题 1.11.9. 对于 $S \underset{R}{\otimes} \kappa(\mathfrak{p})$ 的任意素理想 $\mathfrak{Q}_0$, 它在 $\mathfrak{p}$ 的纤维中对应的元素 $\mathfrak{q}_0$ 满足 $\mathfrak{q}_0 \subset \mathfrak{q}$ 当且仅当 $\mathfrak{Q}_0 \cap ((S \smallsetminus \mathfrak{q}) \otimes 1) = \varnothing$, 当且仅当 $\mathfrak{Q}_0$ 来自 S-代数的局部化

$$\begin{aligned}\left(S \underset{R}{\otimes} \kappa(\mathfrak{p})\right)_{\mathfrak{q}} &\simeq S_{\mathfrak{q}} \underset{S}{\otimes} \left(S \underset{R}{\otimes} \kappa(\mathfrak{p})\right) \\ &\simeq S_{\mathfrak{q}} \underset{R_{\mathfrak{p}}}{\otimes} \left(R_{\mathfrak{p}} \underset{R}{\otimes} \kappa(\mathfrak{p})\right) \simeq S_{\mathfrak{q}} \underset{R_{\mathfrak{p}}}{\otimes} \kappa(\mathfrak{p}),\end{aligned} \tag{7.4.1}$$

第二个同构基于命题 1.11.9 的交换图表.

引理 7.4.1 在上述场景中,

$$\dim S_{\mathfrak{q}} \underset{R_{\mathfrak{p}}}{\otimes} \kappa(\mathfrak{p}) = \mathrm{ht}\left(\mathfrak{q}S_{\mathfrak{q}}/\varphi(\mathfrak{p})S_{\mathfrak{q}}\right) = \mathrm{ht}\left(\mathfrak{q}/\varphi(\mathfrak{p})S\right).$$

证明 环 $S_{\mathfrak{q}}$ 以 $\mathfrak{q}S_{\mathfrak{q}}$ 为唯一极大理想, 它包含 $\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}$ 的像 $\varphi(\mathfrak{p})S_{\mathfrak{q}}$, 这说明第一个等式. 第二个等式来自命题 1.7.6 (ii) 的对应, 以及由其映法而来的以下结论: 若 $\mathfrak{q}_0 \subset \mathfrak{q}$ 是 S 的素理想, 则 $\varphi(\mathfrak{p})S_{\mathfrak{q}} \subset \mathfrak{q}_0 S_{\mathfrak{q}}$ 当且仅当 $\varphi(\mathfrak{p}) \subset \mathfrak{q}_0$. □

接着回忆定义 6.7.1 引入的上行和下行性质.

命题 7.4.2 设环同态 $\varphi : R \to S$ 有下行性质.

(i) 若 $\mathfrak{q} \in \mathrm{Spec}(S)$ 而 $\mathfrak{p} := \mathrm{Spec}(\varphi)(\mathfrak{q}) \in \mathrm{Spec}(R)$, 则

$$\dim S_{\mathfrak{q}} \geq \dim R_{\mathfrak{p}} + \dim S_{\mathfrak{q}} \underset{R_{\mathfrak{p}}}{\otimes} \kappa(\mathfrak{p}).$$

(ii) 进一步要求 $\mathrm{Spec}(\varphi)$ 满, 则有

$$\dim S \geq \dim R + \inf\{\dim S/\varphi(\mathfrak{m})S : \mathfrak{m} \in \mathrm{MaxSpec}(R)\},$$

特别地, $\dim S \geq \dim R$, 而且对 R 的所有理想 I 皆有

$$\varphi(I)S \neq S, \quad \mathrm{ht}(I) \leq \mathrm{ht}(\varphi(I)S).$$

证明 对于 (i), 须对所有 $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ 证明若 $\dim S_{\mathfrak{q}} \underset{R_{\mathfrak{p}}}{\otimes} \kappa(\mathfrak{p}) \geq m$, 则 $\dim S_{\mathfrak{q}} \geq \dim(R_{\mathfrak{p}}) + m$; 根据引理 7.4.1, 条件相当于说 S 有长度 m 的素理想链

$$\varphi(\mathfrak{p})S \subset \mathfrak{q}_0 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathfrak{q}_m = \mathfrak{q}.$$

在此不妨设 $\mathfrak{q}_0$ 是 $V(\varphi(\mathfrak{p})S)$ 的极小元, 其存在性来自引理 2.8.1. 于是 φ 的下行性质和引理 6.7.4 蕴涵 $\varphi^{-1}(\mathfrak{q}_0) = \mathfrak{p}$.

现在设 $\dim R_{\mathfrak{p}} \geq n$, 亦即存在长度 n 的素理想链 $\mathfrak{p}_o \subsetneq \cdots \subset \mathfrak{p}_n = \mathfrak{p}$. 从 $\mathfrak{q}_0$ 和 $\mathfrak{p}$ 起步, 反复应用下行性质可得 S 的素理想链

$$\mathfrak{q}_{-n} \subsetneq \cdots \subsetneq \mathfrak{q}_0.$$

接合后的素理想链 $\mathfrak{q}_{-n} \subsetneq \cdots \subsetneq \mathfrak{q}_m$ 说明 $\dim S_{\mathfrak{q}} \geq n + m$.

以下要求 $\mathrm{Spec}(\varphi)$ 满, 以处理 (ii). 若 $\mathfrak{m} \in \mathrm{MaxSpec}(R)$ 则 $V(\varphi(\mathfrak{m})S)$ 非空, 并且等于 $\mathfrak{m}$ 的纤维. 对纤维中的所有 $\mathfrak{q}$, 结合 (i) 与引理 7.4.1 可得

$$\dim S \geq \dim S_{\mathfrak{q}} \geq \dim R_{\mathfrak{m}} + \mathrm{ht}(\mathfrak{q}/\varphi(\mathfrak{m})S).$$

记所求不等式中的 inf 为 i. 由于 $\mathfrak{q}$ 可遍历 $V(\varphi(\mathfrak{m})S)$, 故

$$\dim S \geq \dim R_{\mathfrak{m}} + \dim S/\varphi(\mathfrak{m})S \geq \dim R_{\mathfrak{m}} + i = \mathrm{ht}(\mathfrak{m}) + i.$$

让 $\mathfrak{m}$ 遍历 $\mathrm{MaxSpec}(R)$, 即有 $\dim S \geq \dim R + i$. 这给出 (ii) 的第一条.

对于 (ii) 的第二条, 先观察到若 $\varphi^{-1}(\mathfrak{q}) \supset I$ 则 $\mathfrak{q} \supset \varphi(I)S$, 因此 $\varphi(I)S \neq S$. 可取 $V(\varphi(I)S)$ 的极小元 $\mathfrak{q}$ 使得 $\mathrm{ht}(\mathfrak{q}) = \mathrm{ht}(\varphi(I)S)$. 命 $\mathfrak{p} := \varphi^{-1}(\mathfrak{q}) \supset I$, 则由 $\mathfrak{q}$ 极小可知 $\dim S_{\mathfrak{q}} \underset{R_{\mathfrak{p}}}{\otimes} \kappa(\mathfrak{p}) = \mathrm{ht}(\mathfrak{q}/\varphi(\mathfrak{p})S) = 0$. 应用 (i) 遂有

$$\begin{aligned} \mathrm{ht}(\varphi(I)S) = \mathrm{ht}(\mathfrak{q}) &= \dim S_{\mathfrak{q}} \\ &\geq \dim R_{\mathfrak{p}} = \mathrm{ht}(\mathfrak{p}) \geq \mathrm{ht}(I), \end{aligned}$$

明所欲证. □

接着探讨 Noether 环的情形. 证明中将以参数理想的最小生成元个数描述维数, 详见引理 7.2.2 和定理 7.2.8.

命题 7.4.3 设 $\varphi: R \to S$ 为 Noether 环之间的同态, $\mathfrak{q} \in \mathrm{Spec}(S)$ 而 $\mathfrak{p} := \mathrm{Spec}(\varphi)(\mathfrak{q}) \in \mathrm{Spec}(R)$.

(i) 我们有 $\dim S_{\mathfrak{q}} \leq \dim R_{\mathfrak{p}} + \dim S_{\mathfrak{q}} \underset{R_{\mathfrak{p}}}{\otimes} \kappa(\mathfrak{p})$.

(ii) 若 φ 有下行性质, 则在 (i) 中等号成立.

(iii) 若 φ 有下行性质, 而且 $\mathrm{Spec}(\varphi): \mathrm{Spec}(S) \to \mathrm{Spec}(R)$ 为满射, 则对 R 的所有理想 I 皆有 $\mathrm{ht}(I) = \mathrm{ht}(\varphi(I)S)$.

证明 断言 (i) 仅依赖于 $\varphi_{\mathfrak{p},\mathfrak{q}}: R_{\mathfrak{p}} \to S_{\mathfrak{q}}$, 故不妨射 $(R, \mathfrak{p})$ 和 $(S, \mathfrak{q})$ 是局部环, φ 是局部同态. 命 $d := \dim R$, 则 R 有形如 $J = (t_1, \ldots, t_d)$ 的参数理想, 使得 $\mathfrak{p}^k \subset J \subset \mathfrak{p}$ 对某个 k 成立. 因此 $\sqrt{\varphi(\mathfrak{p})S} = \sqrt{\varphi(J)S}$, 从而

$$\dim S \underset{R}{\otimes} \kappa(\mathfrak{p}) = \dim S/\varphi(\mathfrak{p})S = \dim S/\varphi(J)S;$$

记上式之值为 e. 取一列 $s_1, \ldots, s_e \in \mathfrak{q}$ 使其在 $S/\varphi(J)S$ 中的像生成一个参数理想, 然后命 $K := (\varphi(t_1), \ldots, \varphi(t_d), s_1, \ldots, s_e) \subset \mathfrak{q}$. 易见 S/K 是 Artin 环, 因而 K 是 S 的参数理想; 由此得到 $\dim S \leq d + e$, 证得 (i).

在此基础上, (ii) 是命题 7.4.2 (i) 的应用. 至于 (iii), 命题 7.4.2 (ii) 已说明 $\varphi(I)S \neq S$ 和 $\mathrm{ht}(I) \leq \mathrm{ht}(\varphi(I)S)$. 为了证明 $\geq$, 取 $\mathfrak{p} \supset I$ 使得 $\mathrm{ht}(\mathfrak{p}) = \mathrm{ht}(I)$. 由下行性质, $\mathrm{Spec}(\varphi)$ 的满性和引理 6.7.4, 可取 $V(\varphi(\mathfrak{p})S)$ 的极小元 $\mathfrak{q}$ 使得 $\mathfrak{p} = \varphi^{-1}(\mathfrak{q})$. 这蕴涵 $\mathfrak{q} \supset \varphi(\mathfrak{p})S \supset \varphi(I)S$, 而 $\mathfrak{q}$ 极小也蕴涵 $\mathrm{ht}(\mathfrak{q}/\varphi(\mathfrak{p})S) = 0$. 鉴于 (i) 和引理 7.4.1, 这导致 $\mathrm{ht}(I) = \mathrm{ht}(\mathfrak{p}) \geq \mathrm{ht}(\mathfrak{q}) \geq \mathrm{ht}(\varphi(I)S)$. 明所欲证. □

命题 7.4.3 将 $\mathrm{Spec}(\varphi)$ 的源空间的维数用靶空间和纤维的维数来控制, 前提是在点 $\mathfrak{p}$ 及其原像 $\mathfrak{q}$ 处取局部化来考察. 为了得到等式, 需要一则使 $\mathrm{Spec}(\varphi)$ 形似 "浸入" 的条件, 这是要求下行性质的思路.

推论 7.4.4 考虑平坦同态 $\varphi: R \to S$.

(i) 设 R 和 S 皆为 Noether 环, 则对所有 $\mathfrak{q} \in \mathrm{Spec}(S)$ 和 $\mathfrak{p} := \varphi^{-1}(\mathfrak{q})$ 皆有

$$\dim S_{\mathfrak{q}} = \dim R_{\mathfrak{p}} + \dim S_{\mathfrak{q}} \underset{R_{\mathfrak{p}}}{\otimes} \kappa(\mathfrak{p}).$$

(ii) 设 φ 忠实平坦, 则 $\mathrm{Spec}(\varphi)$ 满而 $\dim S \geq \dim R$.

证明 定理 6.7.8 表明 φ 有下行性质, 代入命题 7.4.3 (ii) 给出 (i).

当 φ 忠实平坦时, 命题 5.5.3 说明 $\mathrm{Spec}(\varphi)$ 满, 故命题 7.4.2 (ii) 蕴涵 $\dim S \geq \dim R$, 此即 (ii). □

本节的若干结论将在 §7.11 得到细化.

7.5 实例: 多项式环和形式幂级数环

沿用 §7.4 的符号.

引理 7.5.1 令 X 为环 R 上的多项式或形式幂级数的变元, 则有 $\dim R[X] \geq \dim R+1$ 和 $\dim R[\![X]\!] \geq \dim R+1$.

证明 若 R 有素理想链 $\mathfrak{p}_1 \subsetneq \cdots \mathfrak{p}_m$, 则取 $\mathfrak{q}_i := \mathfrak{p}_i[X]$ 为系数全属于 $\mathfrak{p}_i$ 的多项式所成理想 $(0 \leq i \leq m)$, 再取 $\mathfrak{q}_{m+1} := \mathfrak{q}_m + XR[X]$, 便得到 $R[X]$ 中长度 $m+1$ 的素理想链. 同理可证幂级数版本: $\mathfrak{q}_i$ 的元素仍取为系数全属于 $\mathfrak{p}_i$ 的形式幂级数. □

引理 7.5.2 给定非零环之间的同态 $\varphi: R \to S$ 和 $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$.

(i) 设对所有 $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(R)$ 皆有 $\dim S \underset{R}{\otimes} \kappa(\mathfrak{p}) \leq n$, 则 $\dim S+1 \leq (\dim R+1)(n+1)$;

(ii) 设 R 和 S 皆为 Noether 环, 而且对所有来自 $\operatorname{MaxSpec}(S)$ 的 $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(R)$ 皆有 $\dim S \underset{R}{\otimes} \kappa(\mathfrak{p}) \leq n$, 则 $\dim S \leq \dim R + n$.

证明 为了证明 (i), 设 $\mathfrak{q}_0 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathfrak{q}_m$ 为 S 的素理想链, 命 $\mathfrak{p}_i := \varphi^{-1}(\mathfrak{q}_i)$, 并项后得到 R 中项数为 $k+1$ 的素理想链, $k \leq \dim R$. 然而对每个 $\mathfrak{p}_i$, 其纤维 $\operatorname{Spec}(\varphi)^{-1}(\mathfrak{p}_i)$ 既等同于 $\operatorname{Spec}\left(S \underset{R}{\otimes} \kappa(\mathfrak{p}_i)\right)$, 其中的素理想链至多仅有 $n+1$ 项. 综上, $m+1 \leq (k+1)(n+1)$.

对于 (ii), 对所有 $\mathfrak{q} \in \operatorname{MaxSpec}(S)$ 证明 $\dim S_{\mathfrak{q}} \leq \dim R + n$ 即可. 命 $\mathfrak{p} = \varphi^{-1}(\mathfrak{q})$, 则 $\dim R_{\mathfrak{p}} \leq \dim R$; 另一方面, (7.4.1) 表明 $S_{\mathfrak{q}} \underset{R_{\mathfrak{p}}}{\otimes} \kappa(\mathfrak{p})$ 是 S-代数 $S \underset{R}{\otimes} \kappa(\mathfrak{p})$ 在 $\mathfrak{q}$ 处的局部化, 故前者维数也 $\leq n$. 将这些资料代入命题 7.4.3 (i) 即得 (ii). □

命题 7.5.3 设 R 为非零环, 则有:

(i) $\dim R+1 \leq \dim R[X] \leq 2\dim R+1$ 而 $\dim R+1 \leq \dim R[\![X]\!]$;

(ii) 若 R 是 Noether 环, 则 $\dim R[X] = \dim R+1 = \dim R[\![X]\!]$.

证明 不等式 $\dim R+1 \leq \dim R[X]$ 和 $\dim R+1 \leq \dim R[\![X]\!]$ 见诸引理 7.5.1. 在 (i) 的情形, 基于引理 7.5.2 (i), 再对所有 $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(R)$ 证 $\dim R[X] \underset{R}{\otimes} \kappa(\mathfrak{p}) = 1$ 即可. 然而 $R[X] \underset{R}{\otimes} \kappa(\mathfrak{p}) \simeq \kappa(\mathfrak{p})[X]$ 是域上的一元多项式环, 可代入例 7.1.3.

在 (ii) 的情形, $R[X]$ 也是 Noether 环, 故可改用引理 7.5.2 (ii) 得到 $\dim R[X] \leq \dim R+1$, 从而等号成立.

接着考虑 $S := R[\![X]\!]$; 注记 3.2.5 表明它是 Noether 环. 我们希望证明 $\dim S \leq \dim R+1$. 考虑 S 的极大理想 $\mathfrak{q}$, 命 $\mathfrak{p} := \mathfrak{q} \cap R$, 它是 R 的极大理想: 这是因为 $R \smallsetminus \mathfrak{p} \subset S \smallsetminus \mathfrak{q} \subset S^{\times}$, 而 $S^{\times}$ 的元素其常数项必可逆.

于是 $\kappa(\mathfrak{p}) = R/\mathfrak{p}$. 考虑 $S \underset{R}{\otimes} \kappa(\mathfrak{p}) \simeq S/\mathfrak{p}S$. 已知 $S/\mathfrak{p}S \simeq (R/\mathfrak{p})[\![X]\!]$ (引理 B.2.5) 是以 (X) 为极大理想的局部主理想整环 (见 [7, 定义–定理 10.3.1 (iv)] 或自证), 因而是 1 维的 (例 7.1.3). 应用引理 7.5.2 (ii) 即知 $\dim S \leq \dim R + 1$. □

推论 7.5.4 设 $\Bbbk$ 为域, $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$, 则

$$\dim \Bbbk[X_1, \ldots, X_n] = n = \dim \Bbbk[\![X_1, \ldots, X_n]\!];$$

若 $\Bbbk$-代数 R 可由 n 个元素生成, 则 $\dim R \leq n$.

证明 结合例 7.1.2 和命题 7.5.3 (ii) 可得第一部分, 再用引理 7.1.4 (iii) 可得第二部分. □

推论 7.5.5 给定域 $\Bbbk$ 和 $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$. 对于所有 $1 \leq i \leq n$, 多项式环 $\Bbbk[X_1, \ldots, X_n]$ (或形式幂级数环 $\Bbbk[\![X_1, \ldots, X_n]\!]$) 中的理想 $(X_1, \ldots, X_i)$ 满足 $\mathrm{ht}(X_1, \ldots, X_i) = i$.

证明 考虑 $\Bbbk[X_1, \ldots, X_n]$ 的素理想链

$$0 \subsetneq (X_1) \subsetneq (X_1, X_2) \subsetneq \cdots \subsetneq (X_1, \ldots, X_n),$$

这表明 $\mathrm{ht}(X_1, \ldots, X_i) \geq i$ 随 i 严格递增. 另一方面, $n = \dim \Bbbk[X_1, \ldots, X_n]$ (推论 7.5.4), 故 $\mathrm{ht}(X_1, \ldots, X_i) = i$ 对所有 i 成立.

同理可证形式幂级数环 $\Bbbk[\![X_1, \ldots, X_n]\!]$ 的情形. □

7.6 整扩张和维数

接着探讨整扩张 (定义 6.1.3) 之下的维数关系.

命题 7.6.1 设环同态 $\varphi : R \to S$ 使 S 成为 R 的整扩张.

(i) 我们有 $\dim S \leq \dim R$; 若 $\mathrm{Spec}(\varphi) : \mathrm{Spec}(S) \to \mathrm{Spec}(R)$ 满, 则等式成立.

(ii) 设 M 为有限生成 R-模, 记 S-模 $S \underset{R}{\otimes} M$ 为 M_S, 则 $\dim_S M_S \leq \dim_R M$; 若 $\mathrm{Spec}(\varphi) : \mathrm{Spec}(S) \to \mathrm{Spec}(R)$ 满, 则等式成立.

(iii) 设 J 为 S 的真理想, 则 $\mathrm{ht}(J) \leq \mathrm{ht}(\varphi^{-1}J)$ 而 $\dim S/J = \dim R/\varphi^{-1}(J)$.

(iv) 设 I 为 R 的真理想. 若 $\mathrm{Spec}(\varphi)$ 满, 则 $\varphi(I)S \neq S$ 而 $\mathrm{ht}(\varphi(I)S) \leq \mathrm{ht}(I)$.

(v) 若 N 是 S-模, 则 $\dim_S N = \dim_R N$.

关于 $\mathrm{Spec}(\varphi)$ 满的条件在 φ 单时自动成立.

证明 首先, 定理 6.6.3 (i) 说明 φ 单时 $\mathrm{Spec}(\varphi)$ 满.

其次, 将 φ 拆成 $R \twoheadrightarrow R/\ker(\varphi)$ 和 $\overline{\varphi} : R/\ker(\varphi) \hookrightarrow S$; 第一段诱导闭嵌入 $V(\ker(\varphi)) \hookrightarrow \mathrm{Spec}(R)$, 而 $\overline{\varphi}$ 仍是整的.

对于 (i), 定理 6.6.3 (ii) 说明 $\mathrm{Spec}(\overline{\varphi})$ 的每个纤维里的元素互不包含, 故 $\mathrm{Spec}(\varphi)$ 亦然. 设有 S 的素理想链 $\mathfrak{q}_0 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathfrak{q}_m$, 命 $\mathfrak{p}_i := \varphi^{-1}(\mathfrak{q}_i)$, 则前述观察给出 R 的素理想链 $\mathfrak{p}_0 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathfrak{p}_m$. 因此 $\dim S \leq \dim R$.

若 $\mathrm{Spec}(\varphi)$ 满, 给定 R 的素理想链 $\mathfrak{p}_0 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathfrak{p}_m$, 可先取 $\mathfrak{q}_0$ 使得 $\varphi^{-1}(\mathfrak{q}_0) = \mathfrak{p}_0$, 然后应用 φ 的上行性质 (定理 6.7.6) 得到 S 的素理想链

$$\mathfrak{q}_0 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathfrak{q}_m, \quad \varphi^{-1}(\mathfrak{q}_i) = \mathfrak{p}_i \quad (0 \leq i \leq m),$$

推得 $\dim S \geq \dim R$. 综之, $\dim S = \dim R$.

对于 (ii), 对有限生成 R-模 M 记 $I := \mathrm{ann}(M)$. 由于 $\mathrm{Supp}(M_S)$ 是 $\mathrm{Supp}(M)$ 对 $\mathrm{Spec}(\varphi)$ 的原像 (引理 2.4.8 (ii)), 亦即 $V(\mathrm{ann}(\varphi(I)S))$ (命题 1.10.10), 故

$$\dim M = \dim R/I, \quad \dim M_S = \dim S/\varphi(I)S.$$

留意到 $R/I \to S/\varphi(I)S$ 仍是整扩张, 而且 $\mathrm{Spec}(\varphi)$ 满蕴涵其限制 $V(\varphi(I)S) = \mathrm{Spec}(\varphi)^{-1}(V(I)) \to V(I)$ 满, 而后者正是 $R/I \to S/\varphi(I)S$ 诱导的映射. 一切化约到 (i).

对于 (iii), 先留意到 φ 诱导的 $R/\varphi^{-1}(J) \to S/J$ 整且单, 故 (i) 蕴涵

$$\dim R/\varphi^{-1}(J) = \dim S/J.$$

为了处理剩余部分, 目标是对 R 的所有素理想 $\mathfrak{p} \in V(\varphi^{-1}J)$ 证 $\mathrm{ht}(J) \leq \mathrm{ht}(\mathfrak{p})$. 因为 $R/\varphi^{-1}(J) \to S/J$ 整且单, 存在 $\mathfrak{q} \in V(J)$ 使得 $\varphi^{-1}(\mathfrak{q}) = \mathfrak{p}$. 因为 $S_{\mathfrak{q}}$ 是 $S \underset{R}{\otimes} R_{\mathfrak{p}}$ 的局部化, 而 $R_{\mathfrak{p}} \to S \underset{R}{\otimes} R_{\mathfrak{p}}$ 整 (命题 6.1.9), 故配合 (i) 得到

$$\mathrm{ht}(J) \leq \mathrm{ht}(\mathfrak{q}) = \dim S_{\mathfrak{q}} \leq \dim \left(S \underset{R}{\otimes} R_{\mathfrak{p}} \right) \leq \dim R_{\mathfrak{p}} = \mathrm{ht}(\mathfrak{p}).$$

对于 (iv), 设 $\mathfrak{p} \in V(I)$, 存在 S 的素理想 $\mathfrak{q}$ 使得 $\varphi^{-1}(\mathfrak{q}) = \mathfrak{p}$, 特别地 $\mathfrak{q} \in V(\varphi(I)S)$, 顺带得出 $\varphi(I)S \neq S$. 对 $\mathfrak{q}$ 应用 (iii) 可得 $\mathrm{ht}(\varphi(I)S) \leq \mathrm{ht}(\mathfrak{q}) \leq \mathrm{ht}(\mathfrak{p})$. 对 $\mathfrak{p}$ 取 inf 即得 $\mathrm{ht}(\varphi(I)S) \leq \mathrm{ht}(I)$.

对于 (v), 取 $J := \mathrm{ann}_S(N)$, 则 $\varphi^{-1}(J) = \mathrm{ann}_R(N)$, 代入 (iii) 完成证明. □

命题 7.6.2 设 S 为整环, 其子环 R 正规 (定义 6.2.1), 而且 S 是 R 的整扩张.

- ◇ 对 R 的所有真理想 I 皆有 $\mathrm{ht}(I) = \mathrm{ht}(IS)$.
- ◇ 对 S 的所有真理想 J 皆有 $\mathrm{ht}(R \cap J) = \mathrm{ht}(J)$.

此处 ht 分别是对环 R 和 S 定义的.

证明 已知 $\mathrm{Spec}(S) \to \mathrm{Spec}(R)$ 满, 故对 R 的真理想 I 必有 $IS \subsetneq S$. 设 $\mathfrak{q} \in V(IS)$, 命 $\mathfrak{p} := R \cap \mathfrak{q} \supset I$, 然后考虑 R 的素理想链

$$\mathfrak{p}_0 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathfrak{p}_m = \mathfrak{p}.$$

定理 6.7.7 表明 $R \to S$ 有下行性质, 由此逐步得到 S 的素理想链

$$\mathfrak{q}_0 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathfrak{q}_m = \mathfrak{q}, \quad R \cap \mathfrak{q}_i = \mathfrak{p}_i \quad (0 \leq i \leq m).$$

因此 $\mathrm{ht}(I) \leq \mathrm{ht}(\mathfrak{p}) \leq \mathrm{ht}(\mathfrak{q})$. 对 $\mathfrak{q}$ 取 inf 即得 $\mathrm{ht}(I) \leq \mathrm{ht}(IS)$, 而反向不等式已包含于命题 7.6.1 (iv).

给定 S 的真理想 J, 命 $I := R \cap J$ 则有 $IS \subset J$, 结合上一段遂有 $\mathrm{ht}(I) = \mathrm{ht}(IS) \leq \mathrm{ht}(J)$, 而反向不等式已包含于命题 7.6.1 (iii). □

7.7 Noether 正规化及其应用

本节选定域 $\Bbbk$. 在表述并证明 Noether 正规化定理前, 需要一些准备工作.

引理 7.7.1 *设 $t \in \Bbbk[X_1, \ldots X_e] \smallsetminus \Bbbk$. 存在*

$$t_1, \ldots, t_{e-1} \in \Bbbk[X_1, \ldots, X_e]$$

使得 $\Bbbk[X_1, \ldots, X_e]$ 是有限 $S := \Bbbk[t_1, \ldots, t_{e-1}, t]$-代数.

当 $\Bbbk$ 无穷时, 重排变元后可取 $t_i = X_i - a_i X_e$, 其中 $a_i \in \Bbbk$ 而 $1 \leq i < e$.

证明 我们寻求形如 $X_i - X_e^{k^i}$ 的 t_i, 其中 k 是充分大的整数, $1 \leq i < e$. 如此一来, t 可以唯一地表作 $t_1, \ldots, t_{e-1}, X_e$ 的多项式. 兹断言用 $\Bbbk^\times$ 调整 t 后, 可选取 k 使得 t 作为 $\Bbbk[t_1, \ldots, t_{e-1}][X_e]$ 的元素是首一的, 记其次数为 δ. 承认这点, 则

$$t = X_e^\delta + \sum_{0 \leq j < \delta} \left(\text{关于 } t_1, \ldots, t_{e-1} \text{ 的多项式}\right) X_e^j$$

说明 X_e 在 S 上整, 继而 $\Bbbk[X_1, \ldots, X_e]$ 作为 S-模由 $1, X_e, \ldots, X_e^{\delta-1}$ 所生成.

为了选取 k, 请端详展开式

$$\begin{aligned} X_1^{a_1} \cdots X_e^{a_e} &= \left(t_1 + X_e^{k^1}\right)^{a_1} \cdots \left(t_{e-1} + X_e^{k^{e-1}}\right)^{a_{e-1}} \cdot X_e^{a_e} \\ &= X_e^{a_e + a_1 k^1 + \cdots + a_{e-1} k^{e-1}} + \text{混合项}. \end{aligned}$$

若 $k > \max\{a_1, \ldots, a_e\}$, 则 X_e 的指数不外是以 $a_e, a_1, \ldots, a_{e-1}$ 为各位数字的 k-进制展开. 现将 t 表作单项式 $X_1^{a_1} \cdots X_e^{a_e}$ 的线性组合, 将它们用 $t_1, \ldots, t_{e-1}, X_e$ 展开. 根据先前观察, 当 $k \gg 0$ 时不同的 $(a_1, \ldots, a_e)$ 对 X_e 贡献不同的指数. 用 $\Bbbk^\times$ 调整 t, 便得到所求性质.

当 $\Bbbk$ 无穷时, 先设 $t = h_d + \cdots + h_0$, 其中 $h_i \in \Bbbk[X_1, \ldots, X_e]$ 是 i 次齐次的, $h_d \neq 0$. 由 $t \notin \Bbbk$ 知 $d \geq 1$. 由于 $\Bbbk$ 无穷, 重排变元后可设有 $a_1, \ldots, a_{e-1} \in \Bbbk$ 使得 $h_d(a_1, \ldots, a_{e-1}, 1) \neq 0$. 对每个 $1 \leq i < e$ 命 $t_i := X_i - a_i X_e$, 则 t 仍可唯一表作 $t_1, \ldots, t_{e-1}, X_e$ 的多项式; 确切地说,

$$t = \sum_{i=0}^{d} h_i(t_1 + a_1 X_e, \ldots, t_{e-1} + a_{e-1} X_e, X_e).$$

观察到 X_e^d 在右边的系数是 $h_d(a_1, \ldots, a_{e-1}, 1) \neq 0$, 其它 h_i 仅贡献较低次项. 因此用 $\Bbbk^\times$ 调整 t 可使它成为 $\Bbbk[t_1, \ldots, t_{e-1}][X_e]$ 的首一元. 其余论证同前. □

引理 7.7.2 设 I 为整环 R 的非零理想, 则 $\dim(R/I) + 1 \leq \dim R$.

证明 在 R 中, 任意满足 $\mathfrak{p}_n \supset I$, 长度为 n 的素理想链 $\mathfrak{p}_0 \supsetneq \cdots \supsetneq \mathfrak{p}_n$ 都能延长为长度 $n+1$ 的素理想链, 方法是添入 $\mathfrak{p}_{n+1} := \{0\}$. □

后续内容涉及超越次数和代数无关性, 相关内容可参考 [7, §8.8]

定理 7.7.3 (E. Noether, 永田雅宜) 设 S 为非零有限生成 $\Bbbk$-代数, 而 $I_1 \subset \cdots \subset I_m$ 为 S 的真理想链, 其中 $m \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$. 此时存在 $\Bbbk$-子代数 $R \subset S$ 以及 $\Bbbk$-代数的同构 $R \simeq \Bbbk[X_1, \ldots, X_n]$ (其中 $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$), 使得:

- ◇ S 是有限 R-代数, 特别地 S 是 R 的整扩张;
- ◇ 上述同构对所有 $1 \leq j \leq m$ 限制为 $I_j \cap R \simeq (X_{d_j+1}, \ldots, X_n)$, 其中 $d_1 \geq \cdots \geq d_m$ 是唯一确定的非负整数列.

证明 不失一般性, $S = \Bbbk[Y_1, \ldots, Y_r]/J$, 并且记 I_j 在 $\Bbbk[Y_1, \ldots, Y_r]$ 中的原像为 $\tilde{I}_j$. 第一步是化约到 $J = 0$. 将 $I_0 = 0$ 添入 S 的理想链, 因此 $\tilde{I}_0 = J$. 设可找到 $\tilde{R} \subset \Bbbk[Y_1, \ldots, Y_r]$ 使得 $\tilde{R} \simeq \Bbbk[X_1, \ldots, X_{\tilde{n}}]$, 并且对理想链 $\tilde{I}_\bullet$ 满足所需性质; 特别地, 存在 n 使得 $\tilde{I}_0 \cap \tilde{R} = (X_{n+1}, \ldots, X_{\tilde{n}})$. 命 $R = \tilde{R}/(R \cap J)$, 则

$$\begin{gathered} I_j \cap R = \frac{\tilde{I}_j \cap (\tilde{R} + J)}{J} \xlongequal{\because \tilde{I}_j \supset J} \frac{(\tilde{I}_j \cap \tilde{R}) + J}{J} \simeq \frac{\tilde{I}_j \cap \tilde{R}}{J \cap \tilde{R}}, \quad 0 \leq j \leq m, \\ J \cap \tilde{R} = \tilde{I}_0 \cap \tilde{R} \simeq (X_{n+1}, \ldots, X_{\tilde{n}}). \end{gathered}$$

因此从 $\tilde{R}$ 过渡到 R 不外是截断变元 $X_{n+1}, \ldots, X_{\tilde{n}}$. 化约完成.

第二步如下. 今起设 $S = \Bbbk[Y_1, \ldots, Y_n]$. 只须选取 $x_1, \ldots, x_n \in S$ 使得

- ◇ S 是有限 $R := \Bbbk[x_1, \ldots, x_n]$-代数,
- ◇ 对所有 j 皆有 $I_j \cap R \supset (x_{d_j+1}, \ldots, x_n)$, 此处 $d_j := \dim S/I_j \leq n$.

诚然, 第一条蕴涵域 $\mathrm{Frac}(S)$ 是 $\mathrm{Frac}(R)$ 的有限扩张, 两者在 $\Bbbk$ 上有相同超越次数 n, 故 $x_1, \ldots, x_n$ 在 $\Bbbk$ 上代数无关. 另一方面, 第一条和命题 7.6.1 蕴涵 $d_j = \dim(R/(I_j \cap R))$;

但若 $I_j \cap R \supsetneq (x_{d_j+1}, \ldots, x_n)$, 则 $R/(I_j \cap R)$ 将是 $\Bbbk[x_1, \ldots, x_{d_j}]$ 对一个真理想的商, 引理 7.7.2 蕴涵其维数 $< d_j$, 矛盾.

今将递归地构造 $x_1, \ldots, x_n$. 设已有 $x'_1, \ldots, x'_e$ 和 $x_{e+1}, \ldots, x_n$ 使得:

A(e) S 是有限 $S_e := \Bbbk[x'_1, \ldots, x'_e, x_{e+1}, \ldots, x_n]$-代数;

B(e) 当 $d_j \leq e$ 时 $I_j \cap S_e \supset (x_{e+1}, \ldots, x_n)$;

C(e) 当 $d_j > e$ 时 $I_j \cap S_e \supset (x_{d_j+1}, \ldots, x_n)$.

此处 $0 \leq e \leq n$ 而 j 取遍 $1, \ldots, m$; 对 $d \geq n$ 规定 $(x_{d+1}, \ldots, x_n) = 0$.

对于初始情况 $e = n$, 取 $x'_i := Y_i$ 即可. 目标是抵达 $e = 0$. 以下处理从 $e \geq 1$ 到 $e - 1$ 的递归步骤. 基于 $\mathbf{A}(e)$ 和超越次数的论证表明

$$x'_1, \ldots, x'_e, x_{e+1}, \ldots, x_n \text{ 在 } \Bbbk \text{ 上代数无关,}$$

依此将 S_e 等同于多项式代数. 若 $e \leq d_j$ 对所有 $1 \leq j \leq m$ 成立, 则同样的资料满足 $\mathbf{A}(e-1)$—$\mathbf{C}(e-1)$. 否则命 $j := \min\{j' : e > d_{j'}\}$, 兹断言

$$I_j \cap \Bbbk[x'_1, \ldots, x'_e] \neq 0.$$

设若不然, 配合 $\mathbf{B}(e)$ 不难推得 $I_j \cap S_e = (x_{e+1}, \ldots, x_n)$, 再配合 $\mathbf{A}(e)$ 导致 $e = \dim(S_e/(I_j \cap S_e)) = \dim S/I_j = d_j$, 矛盾. 断言得证.

现在取 $x_e \in I_j \cap \Bbbk[x'_1, \ldots, x'_e] \smallsetminus \{0\}$. 注意到 $I_j \neq S$ 蕴涵 $x_e \notin \Bbbk$. 以引理 7.7.1 取

$$x''_1, \ldots, x''_{e-1} \in \Bbbk[x'_1, \ldots, x'_e]$$

使得 $\Bbbk[x'_1, \ldots, x'_e]$ 是有限 $\Bbbk[x''_1, \ldots, x''_{e-1}, x_e]$-代数. 仅需再验证新的元素列

$$x''_1, \ldots, x''_{e-1}, x_e, \ldots, x_n$$

满足 $\mathbf{A}(e-1)$—$\mathbf{C}(e-1)$. 命 $S_{e-1} := \Bbbk[x''_1, \ldots, x_n]$.

对于 $\mathbf{A}(e-1)$, 按构造 S_e 是有限 S_{e-1}-代数, 故 S 亦然 (引理 1.9.4 (i)).

其次设 $1 \leq k \leq m$. 若 $d_k > e-1$, 上述程序不影响 $x_{d_k+1}, \ldots, x_n$, 故它们属于 $I_k \cap S_{e-1}$. 若 $d_k \leq e-1$, 则 $j := \min\{j' : e > d_{j'}\} \leq k$ 而

$$I_k \cap S_{e-1} \supset I_j \cap S_{e-1} \supset (x_{e+1}, \ldots, x_n) + (x_e).$$

综上可知 $\mathbf{B}(e-1)$ 和 $\mathbf{C}(e-1)$ 成立. □

推论 7.7.4 *若 S 为非零有限生成 $\Bbbk$-代数, 则存在 $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ 和 $\Bbbk$-代数的同态 $\varphi : \Bbbk[X_1, \ldots, X_n] \to S$ 使得 φ 单, 而 S 在 $\Bbbk[X_1, \ldots, X_n]$ 上为整.*

对任何具备上述性质的 n 和 φ, 皆有 $\dim S = n$.

证明 对于第一部分, 命 $n = \dim S$. 按照 Noether 正规化定理 7.7.3 取子代数 $R \subset S$, 此处理想链 $I_1 \subsetneq \cdots \subsetneq I_m$ 可任取. 合成同态 $\Bbbk[X_1, \ldots, X_n] \simeq R \hookrightarrow S$ 即所求之 φ.

对于第二部分, 若 n 和同态 φ 具有断言中的性质, 推论 7.5.4 和命题 7.6.1 (i) 蕴涵 $n = \dim \Bbbk[X_1, \ldots, X_n] = \dim S$. □

推论 7.7.5 设 $\Bbbk'|\Bbbk$ 为域扩张, S 为有限生成 $\Bbbk$-代数, S' 为有限生成 $\Bbbk'$-代数, 则有

$$\dim S \underset{\Bbbk}{\otimes} S' = \dim S + \dim S'.$$

特别地, $\dim S = \dim S \underset{\Bbbk}{\otimes} \Bbbk'$.

证明 观察到 $S \underset{\Bbbk}{\otimes} S'$ 是 $\Bbbk'$-代数. 取推论 7.7.4 中的 $\varphi : \Bbbk[X_1, \ldots, X_n] \hookrightarrow S$ 和 $\varphi' : \Bbbk'[Y_1, \ldots, Y_{n'}] \hookrightarrow S'$, 则

$$\varphi \otimes \varphi' : \Bbbk'[X_1, \ldots, X_n, Y_1, \ldots, Y_{n'}] \to S \underset{\Bbbk}{\otimes} S'$$

是 $\Bbbk'$-代数的同态, 它单且有限, 因而是整的. 推论 7.7.4 第二部分蕴涵 $\dim S \underset{\Bbbk}{\otimes} S' = \dim S + \dim S'$. 取特例 $S' = \Bbbk'$ 即有 $\dim S = \dim S \underset{\Bbbk}{\otimes} \Bbbk'$. □

推论 7.7.6 设 $\Bbbk$ 为域, S 为有限生成 $\Bbbk$-代数. 若 S 是整环, 则对所有 $\mathfrak{q} \in \mathrm{Spec}(S)$ 皆有

$$\dim(S/\mathfrak{q}) + \mathrm{ht}(\mathfrak{q}) = \dim S.$$

证明 按照 Noether 正规化定理 7.7.3 (取 $m = 1$ 和 $I_1 = \mathfrak{q}$) 取 S 的子代数 R, 然后命 $\mathfrak{p} := \mathfrak{q} \cap R$. 对 $R \hookrightarrow S$ 和 $R/\mathfrak{p} \hookrightarrow S/\mathfrak{q}$ 应用命题 7.6.1 得到 $\dim R = \dim S$ 和 $\dim R/\mathfrak{p} = \dim S/\mathfrak{q}$. 另一方面, 由于 S 是整环而 R 正规, 命题 7.6.2 蕴涵 $\mathrm{ht}(\mathfrak{p}) = \mathrm{ht}(\mathfrak{q})$.

综上, 问题简化到 $S = \Bbbk[X_1, \ldots, X_n]$ 和 $\mathfrak{q} = (X_{d+1}, \ldots, X_n)$ 的特例. 代入推论 7.5.4 和 7.5.5 以完成证明. □

引理 7.7.7 设 $\Bbbk$ 为域, S 是有限生成 $\Bbbk$-代数. 选定 S 的素理想 $\mathfrak{q}' \subset \mathfrak{q}$, 则所有的素理想链

$$\mathfrak{q}' = \mathfrak{q}_0 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathfrak{q}_m = \mathfrak{q}$$

的长度有上界, 而且当它极长 (亦即无法再插项) 时有 $m = \dim S/\mathfrak{q}' - \dim S/\mathfrak{q}$.

证明 反复应用推论 7.7.6 得到

$$\begin{aligned} \dim S/\mathfrak{q}' = \dim S/\mathfrak{q}_0 = \dim S/\mathfrak{q}_1 + \mathrm{ht}(\mathfrak{q}_1/\mathfrak{q}_0) = \\ \dim S/\mathfrak{q}_2 + \mathrm{ht}(\mathfrak{q}_2/\mathfrak{q}_1) + \mathrm{ht}(\mathfrak{q}_1/\mathfrak{q}_0) = \cdots = \dim S/\mathfrak{q} + \sum_{i=0}^{m-1} \mathrm{ht}(\mathfrak{q}_{i+1}/\mathfrak{q}_i); \end{aligned}$$

特别地, 链长 $m \le \dim S/\mathfrak{q}' - \dim S/\mathfrak{q}$. 若此链无法再插项, 则 $\mathrm{ht}(\mathfrak{q}_{i+1}/\mathfrak{q}_i) = 1$ 对所有 $1 \le i < m$ 成立, 因此极长链总满足 $m = \dim S/\mathfrak{q}' - \dim S/\mathfrak{q}$. □

以下记域扩张 $\Bbbk'|\Bbbk$ 的超越次数为 $\operatorname{tr.deg}(\Bbbk'|\Bbbk)$.

定理 7.7.8 设 $\Bbbk$ 为域, S 是有限生成 $\Bbbk$-代数, 则

$$\dim S = \sup_{\mathfrak{p}:\text{极小素理想}} \operatorname{tr.deg}(\kappa(\mathfrak{p})|\Bbbk).$$

若进一步要求 S 是整环, 则

$$\dim S = \operatorname{tr.deg}(\operatorname{Frac}(S)|\Bbbk),$$

而且 $\dim S$ 是 S 的所有极长素理想链共有的长度, 特别地, 此时 S 等维 (定义 7.1.8).

证明 先设 S 为整环. 取推论 7.7.4 提供的整扩张 $\Bbbk[X_1,\ldots,X_n] \hookrightarrow S$, 于是 $\operatorname{Frac}(S)$ 是 $\Bbbk(X_1,\ldots,X_n)$ 的有限扩张,

$$\operatorname{tr.deg}(\operatorname{Frac}(S)|\Bbbk) = \operatorname{tr.deg}(\Bbbk(X_1,\ldots,X_n)|\Bbbk) = n = \dim S;$$

至于一般的 S, 应用 (7.1.2) 可得 $\dim S = \sup_{\mathfrak{p}} \operatorname{tr.deg}(\kappa(\mathfrak{p})|\Bbbk)$.

当 S 是整环时, 设 $\mathfrak{q}$ 为 S 的极大理想, 在引理 7.7.7 中取 $\mathfrak{q}'=0$ 可见 $\operatorname{ht}(\mathfrak{q}) = \dim S$, 因此 S 的极长素理想链的长度皆为 $\dim S$. □

推论 7.7.9 设 $\varphi: R \to S$ 为有限生成 $\Bbbk$-代数之间的同态, R 是整环而 S 作为 R-模无挠. 记 $K := \operatorname{Frac}(R)$, 则 $\dim S = \dim R + \dim S \underset{R}{\otimes} K$.

证明 先处理 S 为整环的情形. 此时 φ 单, 而有限生成 K-代数 $S \underset{R}{\otimes} K$ 也是以 $L := \operatorname{Frac}(S)$ 为分式域的整环. 超越次数的塔性质 [7, 命题 8.8.9] 给出 $\operatorname{tr.deg} L|\Bbbk = \operatorname{tr.deg} L|K + \operatorname{tr.deg} K|\Bbbk$, 定理 7.7.8 表明此即所求等式.

对于一般情形, 设 $\mathfrak{q}$ 是 S 的极小理想, 则 $\mathfrak{q}$ 的元素均为环 S 的零因子 (命题 3.4.6), 故 $\varphi^{-1}(\mathfrak{q}) = 0$, 而命题 1.7.6 (ii) 蕴涵 $\mathfrak{q} \mapsto \mathfrak{q} \otimes K$ 给出 S 和 $S \underset{R}{\otimes} K$ 的极小素理想之间的一一对应.

于是上一段的结论蕴涵 $\dim S/\mathfrak{q} = \dim R + \dim \left(S \underset{R}{\otimes} K / \mathfrak{q} \otimes K \right)$; 两边对 $\mathfrak{q}$ 取 sup 即所求. □

推论 7.7.10 若 $\varphi: R \to S$ 是有限生成 $\Bbbk$-代数之间的单同态, 则 $\dim S \geq \dim R$.

证明 设 $\mathfrak{p}$ 为 R 的极小素理想, 则 φ 的单性和命题 2.8.4 确保存在 S 的素理想 $\mathfrak{q}$ 使得 $\varphi^{-1}(\mathfrak{q}) = \mathfrak{p}$. 对 φ 诱导的 $R/\mathfrak{p} \hookrightarrow S/\mathfrak{q}$ 应用推论 7.7.9 可得 $\dim S \geq \dim S/\mathfrak{q} \geq \dim R/\mathfrak{p}$. 对 $\mathfrak{p}$ 取 sup 便有 $\dim S \geq \dim R$. □

注记 7.7.11 对于代数闭域 $\Bbbk$, 我们在 §2.7 业已说明有限生成 $\Bbbk$-代数和一些代数几何对象紧密联系. 具体地说, $S = \Bbbk[X_1,\ldots,X_n]/I$ 对应到由理想 I 在 $\Bbbk^n$ 中截出的代数子集 $Z(I)$. 当 I 是素理想, 亦即 S 是整环时, 对应的几何对象称为 $\Bbbk$ 上的不可约仿射代

数簇, 它们可作为稠密开子簇嵌入射影代数簇. 不妨在 $\Bbbk = \mathbb{C}$ 的情形与复解析几何作类比. 设 $\mathcal{X}$ 为复 n 维连通紧复流形, 其上所有亚纯函数构成域 $\mathscr{M}(\mathcal{X})$. C. L. Siegel 证明了 $\operatorname{tr.deg}(\mathscr{M}(\mathcal{X})|\mathbb{C}) \leq n$. 满足 $\operatorname{tr.deg}(\mathscr{M}(\mathcal{X})|\mathbb{C}) = \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{X}$ 的连通紧复流形 $\mathcal{X}$ 被称为 **Moishezon 流形**.

若 $\mathcal{X}$ 是 $\mathbb{C}$ 上的射影代数簇, 则 $\mathcal{X}$ 是 Moishezon 流形, 而且此时对 $\mathcal{X}$ 的所有稠密仿射开子簇 $\operatorname{Spec}(S)$ 皆有 $\mathscr{M}(\mathcal{X}) = \operatorname{Frac}(S)$; 特别地, 复几何意义的维数等同于环的 Krull 维数.

另一方面, 存在并非代数簇的 Moishezon 流形, 而 B. G. Moishezon 本人证明了一个 Moishezon 流形是射影代数簇当且仅当它是 Kähler 流形. 代数簇是概形的特例. 基于 M. Artin 和 D. Knutson 的工作, 可以将 $\mathbb{C}$ 上的概形范畴扩大为 $\mathbb{C}$ 上的**代数空间**范畴, 相应地有解析化函子 $\mathcal{X} \mapsto \mathcal{X}_{\mathrm{an}}$, 映有限型代数空间为复解析簇. M. Artin 证明了解析化诱导从 $\mathbb{C}$ 上的光滑有限型逆紧代数空间到 Moishezon 流形的范畴等价. 有鉴于此, 这类复流形依然具有代数的描述: 它们是某些 $\mathbb{C}$-概形对平展等价关系的商.

注记 7.1.9 对所有 $\mathfrak{q} \in \operatorname{Spec}(S)$ 定义了局部 Krull 维数 $\dim_{\mathfrak{q}} S$. 它在本节场景中有如下描述.

命题 7.7.12 设 S 为有限生成 $\Bbbk$-代数, $\mathfrak{q} \in \operatorname{Spec}(S)$. 记 S 中包含于 $\mathfrak{q}$ 的极小素理想为 $\mathfrak{q}_1, \ldots, \mathfrak{q}_s$, 则有

$$\begin{aligned}\dim_{\mathfrak{q}} S &= \sup_{1 \leq i \leq s} \dim S/\mathfrak{q}_i \\ &= \dim S/\mathfrak{q} + \dim S_{\mathfrak{q}}.\end{aligned}$$

证明 兹以 §A.4 和 §A.9 的拓扑语言处理第一个等号. 将 $X := \operatorname{Spec}(S)$ 的不可约分支 (个数有限) 记为 $C_1, \ldots, C_r$, 可设包含 $\mathfrak{q}$ 者为 $C_i = V(\mathfrak{q}_i)$, 其中 $1 \leq i \leq s$. 于是 $U := X \smallsetminus \bigcup_{i>s} C_i$ 是 $\mathfrak{q}$ 的开邻域. 对 U 中所有含 $\mathfrak{q}$ 的开子集 V, 命题 A.4.9 表明其不可约分支恰是 $C_i \cap V$, 其中 $1 \leq i \leq s$. 缩小 V 后可设 $V = D(f)$, 因而 $C_i \cap V \simeq \operatorname{Spec}\left((S/\mathfrak{q}_i)[f_i^{-1}]\right)$, 其中 $f_i := f + \mathfrak{q}_i \neq \mathfrak{q}_i$. 定理 7.7.8 遂蕴涵 $\dim C_i \cap V = \dim C_i$. 综上可得 $\sup_{V \ni x} \dim V = \sup_{1 \leq i \leq s} \dim C_i$, 左式无非 $\dim_{\mathfrak{q}} S$.

对于第二个等号, 在每个 $S/\mathfrak{q}_i$ 中考虑高度可得 $\dim S_{\mathfrak{q}} = \sup_{1 \leq i \leq s} \operatorname{ht}(\mathfrak{q}/\mathfrak{q}_i)$. 对每个 $1 \leq i \leq s$, 推论 7.7.6 给出 $\dim S/\mathfrak{q} + \operatorname{ht}(\mathfrak{q}/\mathfrak{q}_i) = \dim S/\mathfrak{q}_i$. 对 i 取极大值以完成证明. □

7.8 应用: 泛自由定理

对于整环 R 上的代数 S 和 S-模 M, 泛自由性质意谓对某个 $f \in R \smallsetminus \{0\}$ 作局部化之后, 可使 M 成为自由模; 就几何观点, 这相当于将模从 $\mathrm{Spec}(R)$ 限制到非空开子集 $D(f)$. 类似性质也有分次版本, 见定义 B.8.1.

定义 7.8.1 设 R 为整环, 给定环同态 $R \to S$ 和 S-模 M. 若存在 $f \in R \smallsetminus \{0\}$ 使得 $M[f^{-1}]$ 是自由 $R[f^{-1}]$-模, 则称泛自由性质成立.

泛自由性质需要一些有限性条件来确保. 以下先证明一个条件较为严格的版本.

引理 7.8.2 设 R 为任意环, R-模 M 带有滤过 $0 = M_0 \subsetneq \cdots \subsetneq M_k = M$ 使得 M_i/M_{i-1} 对所有 $0 < i \leq k$ 皆自由, 则 M 自由.

证明 化到 $k = 2$ 的情形, 然后应用推论 1.4.5. □

引理 7.8.3 设 R 是 Noether 整环, 环同态 $R \to S$ 使 S 成为有限生成 R-代数, 而 M 是有限生成 S-模. 此时定义 7.8.1 的泛自由性质成立.

证明 命 $K := \mathrm{Frac}(R)$. 以下对 $\dim S \underset{R}{\otimes} K$ 递归论证. 起点是 $\dim S \underset{R}{\otimes} K = -\infty$, 亦即 $S \underset{R}{\otimes} K$ 为零环的情形: 此时存在 $f \in R \smallsetminus \{0\}$ 使得 f 零化 1_S, 故 f 也零化 M 而 $M[f^{-1}] = 0$. 此时泛自由性质成立.

下设 $S \underset{R}{\otimes} K$ 非零. 它既是整环也是有限生成 K-代数, 由正规化定理 7.7.3 可取嵌入 $K[X_1, \ldots, X_n] \hookrightarrow S \underset{R}{\otimes} K$ 使之成为有限 $K[X_1, \ldots, X_n]$-代数, 而且将每个变元 X_i 适当伸缩后可设其像 x_i 属于 S. 设 $y_1, \ldots, y_m$ 为 S 作为 R-代数的生成元. 每个 y_j 都满足系数在 $K[X_1, \ldots, X_n]$ 上的首一多项式方程; 通分后可对每个 $1 \leq j \leq m$ 取到各项系数属于 $R[X_1, \ldots, X_n]$, 而首项系数 $c_j \in R \smallsetminus \{0\}$ 的多项式方程, 使得 y_j 代入为 0.

命 $c := \prod_j c_j \in R \smallsetminus \{0\}$. 由此知 $S[c^{-1}]$ 是 $S^\flat := R[c^{-1}][X_1, \ldots, X_n]$ 的整扩张, 因而有限 (命题 6.1.4), 而 $M^\flat := M[c^{-1}]$ 是有限生成 $S^\flat$-模. 留意到 $S^\flat$ 是 Noether 整环, 故命题 3.4.8 给出滤过 $0 = M_0^\flat \subsetneq \cdots \subsetneq M_k^\flat = M^\flat$ 使得 $M_i^\flat / M_{i-1}^\flat \simeq S^\flat/\mathfrak{q}_i$ 对所有 $0 < i \leq k$ 成立, 其中 $\mathfrak{q}_i$ 是 $S^\flat$ 的素理想.

若 $\mathfrak{q}_i \neq 0$ 则 $\dim \left((S^\flat/\mathfrak{q}_i) \underset{R}{\otimes} K \right) < \dim S \underset{R}{\otimes} K$, 故递归给出 $f_i \in R \smallsetminus \{0\}$ 使得 $c \mid f_i$ 而 $(S^\flat/\mathfrak{q}_i)[f_i^{-1}]$ 在 $R[c^{-1}][f_i^{-1}] = R[f_i^{-1}]$ 上自由. 若 $\mathfrak{q}_i = 0$, 则因为 $S^\flat$ 是自由 $R[c^{-1}]$-模, 此时可取 $f_i = c$.

命 $f := \prod_i f_i$. 综上, $M[f^{-1}]$ 作为 $R[f^{-1}]$-模具有有限滤过, 使得每一段子商皆自由, 引理 7.8.2 遂蕴涵 $M[f^{-1}]$ 是自由 $R[f^{-1}]$-模. □

定理 7.8.4 (A. Grothendieck) 设 R 是整环, 环同态 $R \to S$ 使 S 成为有限展示 R-代数, 而 M 是有限展示 S-模. 此时定义 7.8.1 的泛自由性质成立.

证明 任选 S 的非零生成元 $x_1, \ldots, x_n$, 化到 $S = R[X_1, \ldots, X_n]/(g_1, \ldots, g_m)$, 然后 M 的有限展示

$$S^{\oplus q} \xrightarrow{\phi} S^{\oplus p} \to M \to 0.$$

视 ϕ 为 S 上的 $p \times q$ 矩阵, 为每个 (i,j)-矩阵元选定 $R[X_1, \ldots, X_n]$ 中的原像 g_{ij}, 然后命 $\underline{R}$ 为所有 g_{ij} 和 g_k 的系数在 R 中生成的子环. 定义 $\underline{R}$-代数

$$\underline{S} := \underline{R}[X_1, \ldots, X_n]/(g_1, \ldots, g_m),$$

再定义 $\underline{S}$-模 $\underline{M}$ 使其带有展示

$$\underline{S}^{\oplus q} \xrightarrow{\underline{\phi}} \underline{S}^{\oplus p} \to \underline{M} \to 0, \quad \underline{\phi} = \left(g_{ij} \text{ 的像}\right)_{i,j}.$$

如此便有

- $\underline{R}$ 是 Noether 整环, $\underline{S}$ 是有限生成 $\underline{R}$-代数, $\underline{M}$ 是有限生成 $\underline{S}$-模;
- 对这些对象取 $R \underset{\underline{R}}{\otimes} (\cdot)$, 便得到原有的 R, S 和 M.

对 $\underline{M}$ 应用引理 7.8.3, 可得 $f \in \underline{R} \smallsetminus \{0\}$ 使得 $\underline{M}[f^{-1}]$ 是自由 $\underline{R}[f^{-1}]$-模. 鉴于显然的交换图表

$$\begin{tikzcd} \underline{R} \arrow[r, hook] \arrow[d, hook] & \underline{R}[f^{-1}] \arrow[d, hook] \\ R \arrow[r, hook] & R[f^{-1}], \end{tikzcd}$$

取 $R \underset{\underline{R}}{\otimes} (\cdot)$ 即知 $M[f^{-1}]$ 是自由 $R[f^{-1}]$-模. $\square$

关于泛自由定理的更多版本, 可见 [5, Tag 051Q].

7.9 应用: 平坦轨迹的开性

本节旨在以 §5.8 和 §7.8 的工具推导以下的定理 7.9.2.

引理 7.9.1 设 R 为环, S 为 Noether R-代数. 设 S-模 M 作为 R-模平坦.

(i) 若 M' 是平坦 S-模, 则 $M \underset{S}{\otimes} M'$ 作为 R-模平坦.

(ii) 若 U 是 S 的乘性子集, 则 $M[U^{-1}]$ 作为 R-模平坦.

证明 对于 (i), 对所有 R-模 N 皆有典范同构

$$N \underset{R}{\otimes} \left(M \underset{S}{\otimes} M'\right) \simeq \left(N \underset{R}{\otimes} M\right) \underset{S}{\otimes} M'.$$

由之立见 $M \underset{S}{\otimes} M'$ 作为 R-模平坦. 代入 $M' = S[U^{-1}]$ 即得 (ii). $\square$

定理 7.9.2 设 R 为 Noether 环, S 为有限生成 R-代数, M 是有限生成 S-模, 则集合

$$\mathcal{U} := \{\mathfrak{q} \in \mathrm{Spec}(S) : M_{\mathfrak{q}} \text{ 是平坦 } R\text{-模}\}$$

相对于 Zariski 拓扑是 $\mathrm{Spec}(S)$ 的开子集, 容许为空.

证明 鉴于引理 A.6.5, 只需说明 $\mathcal{U}$ 有以下性质:

- ◇ 若 $\mathfrak{q} \in \mathcal{U}$ 而 $\mathfrak{q}' \subset \mathfrak{q}$, 则 $\mathfrak{q}' \in \mathcal{U}$;
- ◇ 若 $\mathfrak{q} \in \mathcal{U}$, 则 $\mathcal{U}$ 包含 $V(\mathfrak{q})$ 的一个非空开子集.

第一则性质相对简单: 设 $\mathfrak{q}' \subset \mathfrak{q}$, 则因为 $M_{\mathfrak{q}'}$ 是 $M_{\mathfrak{q}}$ 的局部化, 代入引理 7.9.2 (ii) 即可.

以下考虑第二则性质. 设 $\mathfrak{q} \in \mathcal{U}$, 记 $\mathfrak{p}$ 为 $\mathfrak{q}$ 在 R 中的原像, 定义 $R_0 := R/\mathfrak{p}$. 设 $\mathfrak{r} \in V(\mathfrak{q})$, 此时 $\mathfrak{p}S_{\mathfrak{r}} \subset \mathrm{rad}(S_{\mathfrak{r}})$. 代入定理 5.8.5 (取 $I = \mathfrak{p}$) 给出

$$M_{\mathfrak{r}} \text{ 是平坦 } R\text{-模} \iff M_{\mathfrak{r}}/\mathfrak{p}M_{\mathfrak{r}} \text{ 是平坦 } R_0\text{-模且 } \mathrm{Tor}_1^R(M_{\mathfrak{r}}, R_0) = 0;$$

作为特例, $\mathfrak{r} = \mathfrak{q}$ 满足右式. 注意到一方面 $M_{\mathfrak{r}}/\mathfrak{p}M_{\mathfrak{r}} \simeq (M/\mathfrak{p}M)_{\mathfrak{r}}$, 另一方面每个 $\mathrm{Tor}_i^R(M_{\mathfrak{r}}, R_0)$ (或 $\mathrm{Tor}_i^R(M, R_0)$) 都从 $M_{\mathfrak{r}}$ (或 M) 得到 $S_{\mathfrak{r}}$-模 (或 S-模) 结构, 使得

$$\mathrm{Tor}_i^R(M_{\mathfrak{r}}, R_0) \simeq \mathrm{Tor}_i^R(M, R_0)_{\mathfrak{r}},$$

这是因为可对作为 R-模的 R_0 取平坦解消 $P_\bullet \to R_0 \to 0$ 以确定两边的 Tor_i.

进一步, Noether 条件确保每个 P_j 都能取为有限生成 R-模, 而 M 是有限生成 S-模, 故 $\mathrm{Tor}_i^R(M, R_0)$ 也是有限生成 S-模.

综上, 如将所求的非空开子集写作 $D(g)$, 则基于分段局部化和引理 7.9.1, 所需的仅是满足以下性质的 $g \in S \smallsetminus \mathfrak{q}$:

- ◇ $(M/\mathfrak{p}M)[g^{-1}]$ 是平坦 R_0-模,
- ◇ $\mathrm{Tor}_1^R(M.R_0)[g^{-1}] = 0$.

由于 $S/\mathfrak{p}S$ 是有限生成 R_0-代数, 而 $M/\mathfrak{p}M$ 是有限生成 $S/\mathfrak{p}S$-模, 定理 7.8.4 给出 $f_0 \in R_0 \smallsetminus \{0\}$ 使得 $(M/\mathfrak{p}M)[f_0^{-1}]$ 自由, 因而平坦. 任取 f_0 的原像 $f \in R \smallsetminus \mathfrak{p}$, 再记 $f_S \in S \smallsetminus \mathfrak{q}$ 为 f 的像, 便使 $(M/\mathfrak{p}M)[f_S^{-1}]$ 平坦.

另一方面, 已有 $\mathrm{Tor}_1^R(M, R_0)_{\mathfrak{q}} \simeq \mathrm{Tor}_1^R(M_{\mathfrak{q}}, R_0) = 0$. 由于 $\mathrm{Tor}_1^R(M, R_0)$ 是有限生成 S-模, 其支集闭 (引理 2.4.5), 故存在 $h \in S \smallsetminus \mathfrak{q}$ 使得 $\mathrm{Tor}_1^R(M, R_0)[h^{-1}] = 0$. 取 $g := f_S h$, 分段局部化可见 g 满足要求. 证毕. □

定理 7.9.2 可以推广到非 Noether 环 R, 但须将有限生成条件改为有限展示, 详见 [3, Théorème (11.3.1)] 或 [5, Tag 00RC]; 前者的进路仍以 Noether 情形为基础.

7.10 悬链环

在代数几何学的应用中, 实际处理的环经常是本节所论的悬链环, 甚至是泛悬链环.

定义 7.10.1 (悬链环) 如果 $\dim R < \infty$, 而且对于所有素理想 $\mathfrak{p}' \subset \mathfrak{p}$ 皆有:

- ◇ $\mathrm{ht}(\mathfrak{p}/\mathfrak{p}') < \infty$ (此处的高度是对环 $R/\mathfrak{p}'$ 而言的),
- ◇ 所有极长 (亦即无法再插项) 的素理想链

$$\mathfrak{p}' = \mathfrak{p}_0 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathfrak{p}_m = \mathfrak{p}$$

  都有相同长度 m.

则称 R 为悬链环.

由于 $\mathrm{ht}(\mathfrak{p}/\mathfrak{p}') = \mathrm{codim}(V(\mathfrak{p}), V(\mathfrak{p}'))$, 见 (7.1.1), 上述定义相当于要求 $\mathrm{Spec}(R)$ 是定义 A.9.9 所谓的悬链空间.

引理 7.10.2 若 R 是悬链环, 则 R 的商环和局部化都是悬链环.

证明 无论对于商环抑或局部化, 其中以给定的 $\mathfrak{p}'$ 和 $\mathfrak{p}$ 为首尾的素理想链都可以搬回 R 考量. □

命题 7.10.3 考虑关于环 R 的以下陈述:

(i) R 是悬链环;

(ii) 对任何素理想 $\mathfrak{p}'' \subset \mathfrak{p}' \subset \mathfrak{p}$ 皆有

  (a) $\mathrm{ht}(\mathfrak{p}/\mathfrak{p}') < \infty$ (不涉及 $\mathfrak{p}''$),

  (b) $\mathrm{ht}(\mathfrak{p}/\mathfrak{p}'') = \mathrm{ht}(\mathfrak{p}/\mathfrak{p}') + \mathrm{ht}(\mathfrak{p}'/\mathfrak{p}'')$;

(iii) 对任何素理想 $\mathfrak{p}' \subset \mathfrak{p}$ 皆有

$$\mathrm{ht}(\mathfrak{p}) = \mathrm{ht}(\mathfrak{p}/\mathfrak{p}') + \mathrm{ht}(\mathfrak{p}').$$

一般而言 (i) $\iff$ (ii); 当 R 为 Noether 环时 (iii) $\implies$ (ii), 而当 R 为 Noether 整环时 (iii) $\iff$ (ii).

证明 陈述 (i) 和 (ii) 的等价转译为关于悬链空间的命题 A.9.11.

以下设 R 为 Noether 环, 则 R 及其商环的所有素理想高度皆有限, 故 (ii.a) 总成立. 若 (iii) 成立, 则对 $\mathrm{ht}(\mathfrak{p}) = \mathrm{ht}(\mathfrak{p}/\mathfrak{p}') + \mathrm{ht}(\mathfrak{p}')$ 两边同减 $\mathrm{ht}(\mathfrak{p}'')$ 可得 (ii.b). 若 R 是整环且 (ii.b) 成立, 在其中取 $\mathfrak{p}'' = 0$ 便是 (iii). □

定义 7.10.4 (泛悬链环) 设 R 为 Noether 环. 如果所有有限生成 R-代数都是悬链环, 则称 R 为泛悬链环.

鉴于引理 7.10.2, 环 R 是泛悬链的当且仅当 R 是 Noether 环, 而且 $R[X_1, \ldots, X_n]$ 对所有 $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ 皆为悬链环.

引理 7.10.5 设 R 为泛悬链环, 则:

(i) R 的局部化仍是泛悬链环;

(ii) 任何有限生成 R-代数仍是泛悬链环.

证明 这是因为 $R[U^{-1}][X_1, \ldots, X_n] \simeq R[X_1, \ldots, X_n][U^{-1}]$, 而若 S 是有限生成 R-代数则 $S[X_1, \ldots, X_n]$ 亦然. □

命题 7.10.6 若 $R_{\mathfrak{m}}$ 对所有极大理想 $\mathfrak{m}$ 都是悬链环, 则 R 是悬链环.

若 R 是 Noether 环, 而且 $R_{\mathfrak{m}}$ 对所有极大理想 $\mathfrak{m}$ 都是泛悬链环, 则 R 是泛悬链环.

证明 对于第一部分, 给定素理想 $\mathfrak{p}' \subset \mathfrak{p}$, 取极大理想 $\mathfrak{m} \supset \mathfrak{p}$, 则从 $\mathfrak{p}'$ 到 $\mathfrak{p}$ 的素理想链可置于 $R_{\mathfrak{m}}$ 考量, 由此知 R 是悬链环.

对于第二部分, 给定有限生成 R-代数 S 及其素理想 $\mathfrak{q}$, 记它在 R 中的原像为 $\mathfrak{p}$, 而 $\mathfrak{m} \supset \mathfrak{p}$ 为极大理想. 观察到 $R_{\mathfrak{p}}$ 作为 $R_{\mathfrak{m}}$ 的局部化是泛悬链环, 故有限生成 $R_{\mathfrak{p}}$-代数 $S_{\mathfrak{p}}$ 是悬链环; $S_{\mathfrak{q}}$ 作为 $S_{\mathfrak{m}}$ 的局部化也是悬链环. 配合第一部分知 S 是悬链环. □

例 7.10.7 任意域 $\Bbbk$ 皆为泛悬链环. 这是因为对于所有有限生成 $\Bbbk$-代数 S, 引理 7.7.7 表明 S 满足悬链环定义 7.10.1 的条件.

尽管代数中常见的 Noether 环都是泛悬链环, 永田雅宜出人意料地构造了一个局部 Noether 整环, 它是悬链而非泛悬链的; 其细节涉及形式幂级数, 详见 [5, 02JE].

定理 7.10.8 (永田雅宜) 设 S 为整环而 R 为其 Noether 子环, 使得 S 为有限生成 R-代数. 记 $L = \mathrm{Frac}(S)$, $K = \mathrm{Frac}(R)$. 设 $\mathfrak{q}$ 为 S 的素理想, $\mathfrak{p} := \mathfrak{q} \cap R$, 则

$$\mathrm{ht}(\mathfrak{q}) \leq \mathrm{ht}(\mathfrak{p}) + \mathrm{tr.deg}(L|K) - \mathrm{tr.deg}(\kappa(\mathfrak{q})|\kappa(\mathfrak{p})), \tag{7.10.1}$$

而且当 R 为泛悬链环时 (7.10.1) 中等号成立.

证明 将 S 写成 $R[x_1, \ldots, x_n]$, 其中 $x_i \in S$, 则对塔 $R \subset R[x_1] \subset \cdots \subset S$ 逐步操作, 并且运用超越次数的塔性质, 可将问题化到 $n = 1$ 亦即 $S = R[x]$ 的情形. 对乘性子集 $R \smallsetminus \mathfrak{p}$ 作局部化, 则可进一步要求 $(R, \mathfrak{p})$ 为局部环. 以下记 $\kappa = \kappa(\mathfrak{p})$, 命 $I = \{f \in R[X] : f(x) = 0\}$, 将 S 等同于 $R[X]/I$.

先设 $I = 0$. 此时 $\mathrm{tr.deg}(L|K) = 1$, 在 $S/\mathfrak{p}S = \kappa[X]$ 中考虑高度得到

$$(\mathrm{ht}(\mathfrak{q}/\mathfrak{p}S), \mathrm{tr.deg}(\kappa(\mathfrak{q})|\kappa)) = \begin{cases} (1, 0), & \text{如果 } \mathfrak{q} \supsetneq \mathfrak{p}S \\ (0, 1), & \text{如果 } \mathfrak{q} = \mathfrak{p}S; \end{cases}$$

因此 $\mathrm{ht}(\mathfrak{q}/\mathfrak{p}S) = 1 - \mathrm{tr.deg}(\kappa(\mathfrak{q})|\kappa)$. 另一方面, 此时 $R \to S$ 平坦, 故推论 7.4.4 (i) 说明 $\mathrm{ht}(\mathfrak{q}) = \mathrm{ht}(\mathfrak{p}) + \mathrm{ht}(\mathfrak{q}/\mathfrak{p}S)$. 此时 (7.10.1) 中等号成立.

接着设 $I \neq 0$. 此时 $\mathrm{tr.deg}(L|K) = 0$. 记 $\mathfrak{q}^*$ 为 $\mathfrak{q}$ 在 $R[X]$ 中的原像, 则 $\kappa(\mathfrak{q}) = \kappa(\mathfrak{q}^*)$. 因为 $R \to S$ 为单射, $I \cap R = 0$, 故在 $K[X]$ 中考虑高度可得

$$\mathrm{ht}(I) = \mathrm{ht}(I \cdot K[X]) \leq \dim K[X] = 1;$$

又因为 $I \neq 0$, 故 $\mathrm{ht}(I) = 1$. 综上有

$$\mathrm{ht}(\mathfrak{q}) \leq \mathrm{ht}(\mathfrak{q}^*) - \mathrm{ht}(I) = \mathrm{ht}(\mathfrak{q}^*) - 1,$$

其中的 $\leq$ 来自高度定义, 而且在 R 为泛悬链环时为等号.

此外, 前一个情形蕴涵 $\mathrm{ht}(\mathfrak{q}^*) = \mathrm{ht}(\mathfrak{p}) + 1 - \mathrm{tr.deg}(\kappa(\mathfrak{q}^*)|\kappa) = \mathrm{ht}(\mathfrak{p}) + 1 - \mathrm{tr.deg}(\kappa(\mathfrak{q})|\kappa)$. 综上可得 (7.10.1), 且等号在 R 为泛悬链环时成立. □

对于 R 为 Noether 整环, 而 $S = R[X_1, \ldots, X_n]$ 的特例, 上述论证表明 (7.10.1) 中的等号恒成立.

7.11 纤维维数的上半连续性

给定环同态 $\varphi: R \to S$, 映射 $\mathrm{Spec}(\varphi): \mathrm{Spec}(S) \to \mathrm{Spec}(R)$ 的纤维维数具有重要的几何意义. 本节的相关结论涉及之前各节的工具; 纤维的环论诠释见诸 §7.4 第一段.

命题 7.11.1 设 R 为 Noether 整环, 环 S 包含 R 为其子环, 按此成为有限生成 R-代数. 存在 $f \in R \smallsetminus \{0\}$, 使得对 R 中所有满足 $f \notin \mathfrak{p}$ 的素理想 $\mathfrak{p}$, 存在 S 的素理想 $\mathfrak{q}$ 使得 $\mathfrak{q} \cap R = \mathfrak{p}$ 而且

$$\dim S_{\mathfrak{q}} = \dim R_{\mathfrak{p}} + \dim S_{\mathfrak{q}} \underset{R_{\mathfrak{p}}}{\otimes} \kappa(\mathfrak{p});$$

事实上, $\mathfrak{q}$ 可以取为 $(V(\mathfrak{p}S), \subset)$ 的任意极小元.

证明 以定理 7.8.4 取 $f \in R \smallsetminus \{0\}$ 使得 $S[f^{-1}]$ 是自由 $R[f^{-1}]$-模. 于是 $R[f^{-1}] \to S[f^{-1}]$ 忠实平坦. 设 $f \notin \mathfrak{p}$, 相应地有 $R[f^{-1}]$ 的素理想 $\underline{\mathfrak{p}}$. 代入推论 7.4.4 知存在 $\underline{\mathfrak{q}} \in \mathrm{Spec}(S[f^{-1}])$ 使得 $\underline{\mathfrak{q}} \cap R[f^{-1}] = \underline{\mathfrak{p}}$, 以及

$$\dim S[f^{-1}]_{\underline{\mathfrak{q}}} = \dim R[f^{-1}]_{\underline{\mathfrak{p}}} + \dim S[f^{-1}]_{\underline{\mathfrak{q}}} \underset{R[f^{-1}]_{\underline{\mathfrak{p}}}}{\otimes} \kappa(\underline{\mathfrak{p}}).$$

存在唯一的 $\mathfrak{q} \in \mathrm{Spec}(S)$ 使得 $f \notin \mathfrak{q}$ 而 $\mathfrak{q}[f^{-1}] = \underline{\mathfrak{q}}$. 如此则 $\mathfrak{q} \cap R = \mathfrak{p}$, 特别地 $\mathfrak{p}S \neq S$, 且可等同

$$S[f^{-1}]_{\underline{\mathfrak{q}}} = S_{\mathfrak{q}}, \quad R[f^{-1}]_{\underline{\mathfrak{p}}} = R_{\mathfrak{p}}, \quad \kappa(\underline{\mathfrak{p}}) = \kappa(\mathfrak{p}),$$

此即所求的维数公式. 最后, 关于 $\mathfrak{q}$ 可选为极小元的断言, 请见引理 6.7.4 和定理 6.7.8. □

命题 7.11.2 设 $\Bbbk$ 为域, $R \subset S$ 为有限生成 $\Bbbk$-代数, S 是整环. 记 $K = \mathrm{Frac}(R)$, $L = \mathrm{Frac}(S)$. 存在 $f \in R \smallsetminus \{0\}$ 使得对 R 中所有满足 $f \notin \mathfrak{m}$ 的极大理想 $\mathfrak{m}$ 皆有 $\mathfrak{m}S \neq S$, 而且 $(V(\mathfrak{m}S), \subset)$ 的每个极小元 $\mathfrak{q}$ 均满足 $\dim S/\mathfrak{q} = \mathrm{tr.deg}(L|K)$.

证明 按照命题 7.11.1 的方式选 f, 由此也顺带得到 $\mathfrak{m}S \neq S$. 设 $(V(\mathfrak{m}S), \subset)$ 的相异极小元为 $\mathfrak{q}, \mathfrak{q}_1, \ldots, \mathfrak{q}_n$. 对所有 $1 \leq i \leq n$ 取 $f_i \in \mathfrak{q}_i \smallsetminus \mathfrak{q}$. 零根定理 2.6.8 蕴涵 $\mathfrak{q}$ 是 $(V(\mathfrak{q}), \subset)$ 的极大元之交, 故存在包含 $\mathfrak{q}$ 但不含 $\prod_{i=1}^n f_i$ (空积规定为 1) 的极大理想 $\mathfrak{n}$, 它必满足 $\mathfrak{n} \cap R = \mathfrak{m}$. 回忆到 S (或 R) 的所有极大理想的高度都是 $\dim S$ (或 $\dim R$), 定理 7.7.8, 命题 7.11.1 和超越次数的塔性质遂给出

$$\begin{aligned}\dim S_{\mathfrak{n}}/\mathfrak{m}S_{\mathfrak{n}} = \dim S_{\mathfrak{n}} \underset{R_{\mathfrak{m}}}{\otimes} \kappa(\mathfrak{m}) &= \dim S_{\mathfrak{n}} - \dim R_{\mathfrak{m}} \\ &= \mathrm{tr.deg}(L|\Bbbk) - \mathrm{tr.deg}(K|\Bbbk) = \mathrm{tr.deg}(L|K).\end{aligned}$$

另一方面, $\mathfrak{n}$ 不包含 $\mathfrak{q}_i$, 其中 $i = 1, \ldots, n$, 故 $\dim S_{\mathfrak{n}}/\mathfrak{m}S_{\mathfrak{n}} = \dim S_{\mathfrak{n}}/\mathfrak{q}S_{\mathfrak{n}}$; 施定理 7.7.8 于 $S/\mathfrak{q}$ 知 $\dim S_{\mathfrak{n}}/\mathfrak{q}S_{\mathfrak{n}} = \dim S/\mathfrak{q}$. 证毕. □

用几何的语言来说, 命题 7.11.2 意谓在 $\mathrm{Spec}(R)$ 的某个非空开子集上, 其闭点相对于 $\mathrm{Spec}(S) \to \mathrm{Spec}(R)$ 的纤维皆等维, 其维数皆等于域扩张 $L|K$ 的超越次数.

以下两则结论涉及注记 7.1.9 定义的局部 Krull 维数.

引理 7.11.3 设 S 为整环, 其子环 R 为泛悬链环 (定义 7.10.4), 而且 S 为有限生成 R-代数. 若 $\mathfrak{q}$ 是 S 的素理想, 记 $\mathfrak{p} := \mathfrak{q} \cap R$, 而 $\bar{\mathfrak{q}}$ 为 $\mathfrak{q}$ 在 $S \underset{R}{\otimes} \kappa(\mathfrak{p})$ 中的像, 则

$$\dim_{\bar{\mathfrak{q}}} S \underset{R}{\otimes} \kappa(\mathfrak{p}) \geq \dim S \underset{R}{\otimes} \mathrm{Frac}(R).$$

证明 命 $K = \mathrm{Frac}(R)$, $L = \mathrm{Frac}(S)$. 因为 R 是泛悬链环而 S 有限生成,

$$\begin{aligned}\dim_{\bar{\mathfrak{q}}} S \underset{R}{\otimes} \kappa(\mathfrak{p}) &= \dim S_{\mathfrak{q}} \underset{R_{\mathfrak{p}}}{\otimes} \kappa(\mathfrak{p}) + \dim \left((S/\mathfrak{q}) \underset{R/\mathfrak{p}}{\otimes} \kappa(\mathfrak{p}) \right) \quad (\text{命题 } 7.7.12) \\ &\geq \mathrm{ht}(\mathfrak{q}) - \mathrm{ht}(\mathfrak{p}) + \mathrm{tr.deg}(\kappa(\mathfrak{q})|\kappa(\mathfrak{p})) \quad (\text{命题 } 7.4.3, \text{定理 } 7.7.8) \\ &= \mathrm{tr.deg}(L|K) = \dim S \underset{R}{\otimes} \mathrm{Frac}(R) \quad (\text{命题 } 7.10.8).\end{aligned}$$

明所欲证. □

定理 7.11.4 (C. Chevalley) 设 R 为泛悬链环 (定义 7.10.4), 而同态 $\varphi: R \to S$ 使 S 成为有限生成 R-代数; 对 S 的所有素理想 $\mathfrak{q}$ 记 $\mathfrak{p} = \varphi^{-1}(\mathfrak{q})$, 记 $\bar{\mathfrak{q}}$ 为 $\mathfrak{q}$ 在 $S \underset{R}{\otimes} \kappa(\mathfrak{p})$ 中的像. 对所有 $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, 集合

$$F_n(S|R) := \left\{ \mathfrak{q} \in \mathrm{Spec}(S) : \dim_{\bar{\mathfrak{q}}} S \underset{R}{\otimes} \kappa(\mathfrak{p}) \geq n \right\}$$

是 $\mathrm{Spec}(S)$ 的闭子集.

换言之, 如记 $f := \mathrm{Spec}(\varphi) : \mathrm{Spec}(S) \to \mathrm{Spec}(R)$, 则 $\mathfrak{q} \mapsto \dim_{\mathfrak{q}} f^{-1}(f(\mathfrak{q}))$ 是相对于 $\mathrm{Spec}(S)$ 的 Zariski 拓扑的上半连续函数.

证明 问题既然能以拓扑语言呈现, 可设 S 既约. 取 S 的极小素理想 $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_m$, 它们对应到 $\mathrm{Spec}(S)$ 的不可约分支. 从拓扑观点看, 命题 A.9.6 蕴涵 $F_n(S|R) = \bigcup_{1 \leq i \leq m} F_n(S/\mathfrak{p}_i|R)$, 按此遂化到 S 是整环的情形. 其次, $\mathfrak{p} := \varphi^{-1}(\mathfrak{q}) \supset \ker(\varphi)$, 故以 $R/\ker(\varphi)$ 代 R 可设 R 是 S 的子环.

命 $K = \mathrm{Frac}(R)$, $L = \mathrm{Frac}(S)$. 命 e, 则引理 7.11.3 对所有 $\mathfrak{q}$ 给出

$$\dim_{\overline{\mathfrak{q}}} S \underset{R}{\otimes} \kappa(\mathfrak{p}) \geq \dim S \underset{R}{\otimes} K =: e. \tag{7.11.1}$$

因此 $n \leq e$ 时 $F_n(S|R) = \mathrm{Spec}(S)$. 以下可设 $n > e$.

取命题 7.11.1 中的 $f \in R \smallsetminus \{0\}$, 则在 $f \notin \mathfrak{p}$ (等价于 $f \notin \mathfrak{q}$) 的前提下, 该命题蕴涵 (7.11.1) 中的 $\geq$ 实则是等号. 由此得到 $F_n(S|R) \subset V(f) \subsetneq \mathrm{Spec}(S)$.

问题于是化约到 R-代数 $S/(f)$ 的情形. 若 $f \in S^\times$ 则 $F_n(S|R) = \varnothing$, 否则继续考虑 $\mathrm{Spec}(S/\sqrt{(f)})$ 的所有不可约分支 $\mathrm{Spec}(S')$, 将 $R \to S'$ 分解为 $R \twoheadrightarrow R' \hookrightarrow S'$, 然后迭代先前的论证; 结论或者是 $F_n(S'|R') = \mathrm{Spec}(S')$, 或者还可以选取 f' 使得 $F_n(S'|R') \subset V(f') \subsetneq \mathrm{Spec}(S')$. 由于 $\mathrm{Spec}(S)$ 是 Noether 空间, 程序必在有限步之内停止.[1)] 证毕. □

定理 7.11.4 的陈述对于一般的环 R 同样成立, 见 [3, Lemma (13.1.1), Théorème (13.1.3)] 或 [5, Tag 02FZ]; 前者的进路是化到 R 为泛悬链环的情形, 因此需要对泛悬链环有进一步的把握.

习题

1. 试将 §B.7 的结论推广到 Γ-分次代数, Γ 是无挠, 具消去律, 且为正的加法幺半群 (定义 B.1.1, 相关理论亦见 §B.2).

1) 更严谨的说法是命 $\mathcal{S}$ 为所有使得断言不成立的既约商环 $S \twoheadrightarrow S'$ 构成的集合, 按照 $S' \twoheadrightarrow S'' \iff S'' \preceq S'$ 赋予偏序. 若 $\mathcal{S}$ 非空则含对 $\preceq$ 的极小元 $S_{\min}$; 对 $S_{\min}$ 应用上述论证可得 $S_{\min}$ 满足断言, 矛盾. 这种论证称为 Noether 递归.

第八章 完备化

8.1 拓扑诠释

本节先在一个相对广泛的框架下探讨完备化, 默认读者至少在交换群的情形了解拓扑群的基本概念.

约定 8.1.1 本节考虑的环不要求交换, 其上的模默认为左模, 尽管以下一切陈述都有右模的版本.

所谓**拓扑环**, 意谓一个环 A 兼有拓扑空间结构, 使得环的加法, 取负和乘法映射皆连续; 特别地, A 对加法成为拓扑群. 若拓扑环 A 上的模 M 也有拓扑空间结构, 使得 M 对加法成为拓扑群, 而且乘法 $A \times M \to M$ 连续, 则称 M 为**拓扑 A-模**.

设拓扑环 A (或拓扑 A-模 M) 在 0 处有一组可数邻域基[1)], 若 A (或 M) 的所有 Cauchy 列皆收敛, 则称之为**完备**的; 完备性的表述仅涉及 A (或 M) 的加法群及其拓扑, 相关讨论可见 [7, 定义 4.10.9].

所有拓扑环及其间的连续环同态构成范畴 $\mathsf{TopRing}$; 给定拓扑环 A, 所有拓扑 A-模及其间的连续模同态构成范畴 $A\text{-}\mathsf{TopMod}$.

从一般的拓扑环 A (或拓扑 A-模 M) 出发, 能典范地构造完备 Hausdorff 拓扑环 $\widehat{A}$ (或完备 Hausdorff 拓扑 $\widehat{A}$-模 $\widehat{M}$), 称为其**完备化**[2)], 感兴趣的读者可见 [7, §10.1]. 这些适用于所有拓扑环或模的定义和构造细节都颇为繁琐, 但本章的焦点并不在此, 因为在交换环论中, 环和模的拓扑经常来自于 §4.2 介绍的滤过, 而完备化也有基于滤过的直接构造. 简单起见, 本节只考虑 $\mathbb{Z}$-滤过. 且先给出代数方面的定义.

---

1) 否则探讨极限时需要 Cauchy 滤子而不只是 Cauchy 列.

2) 更精确的说法是 Hausdorff 完备化, [7] 考虑的拓扑群主要是 Hausdorff 的, 本章的主要场景亦然.

约定 8.1.2 以下对环 A (或 A-模 M) 考虑的滤过都是 $\mathbb{Z}$-降滤过, 以上标记如 $\mathrm{F}^\bullet A$ (或 $\mathrm{F}^\bullet M$); 这些滤过默认为穷竭的 (定义 4.2.1).

考虑滤过环 A. 对所有 n, 从 $\mathrm{F}^n A \subset \mathrm{F}^{n-1}A$ 得到加法群的满同态 $A/\mathrm{F}^n A \to A/\mathrm{F}^{n-1}A$, 按此在范畴 Ab 中取极限

$$\widehat{A} := \varprojlim_n A/\mathrm{F}^n A := \left\{ (a_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \prod_{n\in\mathbb{Z}} A/\mathrm{F}^n A \,\middle|\, \forall n,\ a_n \mapsto a_{n-1} \right\}.$$

它的加法是逐项相加, 现赋予 $\widehat{A}$ 乘法运算如下. 给定 $\widehat{a} = (a_i)_i$ 和 $\widehat{b} = (b_j)_j$, 因滤过穷竭, 可取到 $k_0 \in \mathbb{Z}_{\leq 0}$ 使得 a_0 (或 b_0) 有属于 $\mathrm{F}^{k_0}A$ 的代表元. 因而当 $k \geq 0$ 时, a_k (或 b_k) 也有属于 $\mathrm{F}^{k_0}A$ 的代表元, 记之为 $\tilde{a}_k$ (或 $\tilde{b}_k$). 对任意 $n \in \mathbb{Z}$, 任取

$$i, j \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, \quad i + k_0 \geq n, \quad j + k_0 \geq n,$$

则 $\tilde{a}_i \tilde{b}_j$ 在 $A/\mathrm{F}^n A$ 中的像无关代表元的选取, 记为 $(\widehat{a}\widehat{b})_n$, 它满足 $(\widehat{a}\widehat{b})_n \mapsto (\widehat{a}\widehat{b})_{n-1}$; 由于 i, j 可取得任意大, 它也无关 k_0 的选取. 我们定义 $\widehat{a}\widehat{b} := ((\widehat{a}\widehat{b})_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \widehat{A}$.

例行公事说明 $\widehat{A}$ 对此成环, 以 $(1 + \mathrm{F}^n A)_{n\in\mathbb{Z}}$ 为幺元; 所需的结合律, 分配律等性质都化到 A 上检验. 此外, A 交换蕴涵 $\widehat{A}$ 交换.

同理, 考虑滤过 A-模 M, 并回忆到定义要求 $\mathrm{F}^p A \cdot \mathrm{F}^q M \subset \mathrm{F}^{p+q} M$ 对所有 p, q 成立. 在 Ab 中取极限

$$\widehat{M} := \varprojlim_n M/\mathrm{F}^n M := \left\{ (x_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \prod_{n\in\mathbb{Z}} M/\mathrm{F}^n M \,\middle|\, \forall n,\ x_n \mapsto x_{n-1} \right\};$$

它不只是加法群, 还按照和先前类似的方式具有乘法运算 $\widehat{A} \times \widehat{M} \to \widehat{M}$, 从而成为 $\widehat{A}$-模.

定义 8.1.3 (滤过环和模的完备化) 以下的滤过均默认为穷竭的.

- 设 A 为滤过环, 称环 $\widehat{A} := \varprojlim_n A/\mathrm{F}_n A$ 为 A 对滤过 $\mathrm{F}^\bullet A$ 的完备化.
- 类似地, 设 A 如上, 而 M 为滤过 A-模, 称 $\widehat{A}$-模 $\widehat{M} := \varprojlim_n M/\mathrm{F}^n M$ 为 M 对滤过 $\mathrm{F}^\bullet M$ 的完备化.

它们带有典范映射 $A \to \widehat{A}$ 和 $M \to \widehat{M}$, 分别映 a 和 x 为 $(a + \mathrm{F}^n A)_n$ 和 $(x + \mathrm{F}^n M)_n$.

给定滤过环 A (或滤过 A-模 M) 如上, 它自然地具有拓扑环 (或拓扑 A-模) 结构, 使得 $(\mathrm{F}^n A)_{n\in\mathbb{Z}}$ (或 $(\mathrm{F}^n M)_{n\in\mathbb{Z}}$) 给出 0 处一组由加法开子群构成的可数邻域基; 事实上, 取足够大的 n 即可. 特别地, A 是 Hausdorff 空间当且仅当其滤过分离. 依此观点, 定义 8.1.3 和拓扑学中的完备化是一回事, 思路都是以 Cauchy 列的等价类代替原空间. 在 $\widehat{A}$ 的上述构造中, 选取的代表元族 $(\tilde{a}_k)_{k\geq k_0}$ 便扮演了 Cauchy 列的角色: 当 $i \geq j \gg 0$, 相应的 $\tilde{a}_i - \tilde{a}_j \in \mathrm{F}^j A$ 趋近于 0; 详见 [7, §4.10] 的解说.

追随拓扑观点, $\widehat{A}$ (或 $\widehat{M}$) 自然也应当是拓扑环 (或拓扑 $\widehat{A}$-模), 而且它们对此拓扑是完备的. 完备性可以化到加法群的层面验证, 细节见诸 [7, 定理 4.10.10][3]. 就代数观点, $\widehat{A}$ (或 $\widehat{M}$) 的拓扑仍然来自滤过. 具体地说:

$$\begin{aligned}\mathrm{F}^m\widehat{A} &:= \left\{\widehat{a} = (a_n)_n \in \widehat{A} : n \leq m \implies a_n = 0\right\}\\ &= \left\{\widehat{a} = (a_n)_n \in \widehat{A} : a_m = 0\right\}, \quad m \in \mathbb{Z}.\end{aligned}$$

易见 $\mathrm{F}^m\widehat{A} \subset \mathrm{F}^{m-1}\widehat{A}$, 它们满足滤过环所需的全部性质; $\mathrm{F}^\bullet\widehat{A}$ 滤过显然是分离的, 它也是穷竭的, 因为给定 $\widehat{a} \in \widehat{A}$, 若取 $k_0 \in \mathbb{Z}_{\leq 0}$ 使得 a_0 有代表元 $\tilde{a}_0 \in \mathrm{F}^{k_0}A$, 则 $\widehat{a} \in \mathrm{F}^{k_0}\widehat{A}$.

注意到 $\mathrm{F}^m\widehat{A}$ 对 $A \to \widehat{A}$ 的原像正是 $\mathrm{F}^m A$.

关于 $\mathrm{F}^\bullet\widehat{A}$ 的定义体现了 "足够接近的 Cauchy 列" 这一概念. 同理, $\widehat{M}$ 的拓扑来自按相同方式定义的滤过 $\mathrm{F}^\bullet\widehat{M}$, 而且 $\widehat{M}$ 对此成为滤过 $\widehat{A}$-模.

这些讨论也说明 $A \to \widehat{A}$ (或 $M \to \widehat{M}$) 的像稠密.

命题 8.1.4 对上述滤过取相应的分次环和分次模 (定义 4.2.8), 则有典范的分次环同构 $\mathrm{gr}\, A \xrightarrow{\sim} \mathrm{gr}\, \widehat{A}$ 和分次模同构 $\mathrm{gr}\, M \xrightarrow{\sim} \mathrm{gr}\, \widehat{M}$.

证明 易见典范同态 $A \to \widehat{A}$ 对所有 m 限制为 $\mathrm{F}^m A \to \mathrm{F}^m\widehat{A}$, 故诱导分次环同态 $\mathrm{gr}\, A \to \mathrm{gr}\, \widehat{A}$. 另一方面, 按 $(a_n)_n \mapsto a_{m+1}$ 可定义以 $\mathrm{F}^{m+1}\widehat{A}$ 为核的加法群同态 $\mathrm{F}^m\widehat{A} \to \mathrm{F}^m A/\mathrm{F}^{m+1}A = \mathrm{gr}^m A$, 它诱导单同态 $\mathrm{gr}^m \widehat{A} \hookrightarrow \mathrm{gr}^m A$. 然而 $\mathrm{gr}^m A \to \mathrm{gr}^m \widehat{A} \hookrightarrow \mathrm{gr}^m A$ 的合成显然是恒等, 故 $\mathrm{gr}^m A \to \mathrm{gr}^m \widehat{A}$ 与 $\mathrm{gr}^m \widehat{A} \hookrightarrow \mathrm{gr}^m A$ 互逆.

关于 $\mathrm{gr}\, M \xrightarrow{\sim} \mathrm{gr}\, \widehat{M}$ 的论证全然类似. □

接着探讨完备化和正合性, 这部分涉及 [8, §3.13] 的内容, 特别是 Mittag-Leffler 条件 [8, 定义 3.13.11].

命题 8.1.5 给定 A-模同态 $M' \to M \to M''$, 设其中每项都有滤过, 使得同态对每个 n 都限制为 $\mathrm{F}^n M' \to \mathrm{F}^n M \to \mathrm{F}^n M''$, 而且

$$0 \to M'/\mathrm{F}^n M' \to M/\mathrm{F}^n M \to M''/\mathrm{F}^n M'' \to 0$$

对每个 n 皆是 Ab 中的正合列. 此时 $0 \to \widehat{M'} \to \widehat{M} \to \widehat{M''} \to 0$ 正合.

证明 因为 $M'/\mathrm{F}^n M' \to M'/\mathrm{F}^{n-1}M'$ 对每个 n 皆满, 资料 $(M'/\mathrm{F}^n M')_{n\geq 0}$ 平凡地满足 Mittag-Leffler 条件. 于是 [8, 命题 3.13.13] 表明

$$0 \to \varprojlim_n M'/\mathrm{F}^n M' \to \varprojlim_n M/\mathrm{F}^n M \to \varprojlim_n M''/\mathrm{F}^n M'' \to 0$$

是正合列. □

推论 8.1.6 给定滤过 A-模 M 及其子模 M', 赋予 M' 来自 $\mathrm{F}^\bullet M$ 的诱导滤过 $\mathrm{F}^\bullet M' := M' \cap \mathrm{F}^\bullet M$, 则 $\widehat{M'} \to \widehat{M}$ 为单, 并且将 $\widehat{M'}$ 等同于 $\mathrm{im}[M' \to \widehat{M}]$ 的闭包.

[3] 该处要求了 Hausdorff 性质, 或者说要求滤过是分离的, 但证明的完备性部份不用这一假设.

证明 取 $M'' = M/M'$, 赋予诱导滤过 $\mathrm{F}^\bullet M'' := \mathrm{im}[\mathrm{F}^\bullet M \to M'']$, 则 $M' \to M \to M''$ 满足命题 8.1.5 的前提, 因而有 $\widehat{A}$-模的短正合列 $0 \to \widehat{M'} \to \widehat{M} \to \widehat{M''} \to 0$. 按定义,

$$\widehat{M'} = \varprojlim_n M'/(M' \cap \mathrm{F}^n M) \simeq \varprojlim_n (M' + \mathrm{F}^n M)/\mathrm{F}^n M \subset \widehat{M}.$$

因此 $\widehat{x} = (x_n)_n \in \widehat{M}$ 属于 $\widehat{M'}$ 的像当且仅当 $x_n \in M' + \mathrm{F}^n M$ 对所有 n 成立, 当且仅当 $\widehat{x} \in M' + \mathrm{F}^n \widehat{M}$ 对所有 n 成立; 因 $\mathrm{F}^\bullet \widehat{M}$ 给出 0 处的开邻域基, 这正是闭包的条件.□

不同的滤过可能给出相同拓扑, 这引向以下概念.

定义 8.1.7 (滤过的等价) 设环 A 带有滤过 $\mathrm{F}^\bullet A$ 和 $\mathrm{G}^\bullet A$.

(i) 若对每个 $p \in \mathbb{Z}$ 都存在 $q \in \mathbb{Z}$ 使得 $\mathrm{F}^p A \supset \mathrm{G}^q A$, 对每个 $r \in \mathbb{Z}$ 都存在 $s \in \mathbb{Z}$ 使得 $\mathrm{G}^r A \supset \mathrm{F}^s A$, 则称 $\mathrm{F}^\bullet A$ 和 $\mathrm{G}^\bullet A$ 拓扑等价.

(ii) 若存在 $p, q \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ 使得

$$\mathrm{F}^{n+p} A \subset \mathrm{G}^n A \subset \mathrm{F}^{n-q} A, \quad n \in \mathbb{Z}$$

则称 $\mathrm{F}^\bullet A$ 和 $\mathrm{G}^\bullet A$ 位移等价.

类似地, 给定滤过环 A, 对 A-模 M 的任两个滤过也可以按类似方法定义拓扑等价和位移等价.

易见位移等价蕴涵拓扑等价.

命题 8.1.8 环 A 上的两个滤过给出相同的拓扑环当且仅当它们拓扑等价; 类似地, A-模 M 上的两个滤过给出相同的拓扑 A-模当且仅当它们拓扑等价.

证明 通过平移, 拓扑结构由 0 处的邻域基唯一的确定, 而拓扑等价的条件相当于说 0 处的两组邻域基相互嵌套. □

命题 8.1.9 环 A 上拓扑等价的滤过给出相同的完备化 $\widehat{A}$. 类似地, A-模 M 上拓扑等价的滤过给出相同的 $\widehat{M}$.

证明 基于完备化的拓扑观点和命题 8.1.8 立得. □

在实际操作中, 定义 8.1.7 中的位移等价颇为常见, 也更容易操作. 例如在命题 8.1.9 的场景中, 设 $\mathrm{F}^\bullet A$ 和 $\mathrm{G}^\bullet A$ 位移等价, 满足 $\mathrm{F}^{n+p} A \subset \mathrm{G}^n A \subset \mathrm{F}^{n-q} A$, 此时可明确写下同构

$$\varprojlim_n A/\mathrm{F}^n A \to \varprojlim_n A/\mathrm{G}^n A:$$

◇ 给定左式的元素 $(a_n)_n$, 对每个 a_m 任取代表元 $\tilde{a}_m \in A$, 再取 b_n 为 $\tilde{a}_{n+p}$ 在 $A/\mathrm{G}^n A$ 中的像. 可以验证 $(a_n)_n \mapsto (b_n)_n$ 给出环同态.

◇ 反向同态 $\varprojlim_n A/\mathrm{G}^n A \to \varprojlim_n A/\mathrm{F}^n A$ 按照对称方式定义, 可以验证它们互逆, 故给出相互同构的完备化.

此外不难验证 $\widehat{A}$ 上诱导的两套滤过是等价的, 细节不赘. 模的情形无异.

相似的论证给出以下简单结论; 就拓扑观点, 其前提也一样可以放宽.

命题 8.1.10 设 A 和 B 为滤过环, $\varphi: A \to B$ 为环同态, 而且存在 $p \in \mathbb{Z}$ 使得 $\varphi(\mathrm{F}^n A) \subset \mathrm{F}^{n+p} B$ 对所有 $n \in \mathbb{Z}$ 成立, 则 φ 连续, 并且诱导环同态 $\widehat{\varphi}: \widehat{A} \to \widehat{B}$.

设 M 和 N 为滤过 A-模, $\psi: M \to N$ 为模同态, 而且存在 $p \in \mathbb{Z}$ 使得 $\psi(\mathrm{F}^n M) \subset \mathrm{F}^{n+p} N$ 对所有 $n \in \mathbb{Z}$ 成立, 则 ψ 连续, 并且诱导模同态 $\widehat{\psi}: \widehat{M} \to \widehat{N}$.

以上的 $\varphi, \widehat{\varphi}$ 和 $\psi, \widehat{\psi}$ 都是连续同态. 当 $p = 0$ 时, 条件相当于说 φ (或 ψ) 是滤过环 (或滤过 A-模) 之间的同态, 见定义 4.2.2.

8.2 对理想取完备化

本节开始转回交换环论的场景.

约定 8.2.1 今后考虑的环皆为交换环. 若无另外说明, 环和模上的滤过默认为 $\mathbb{Z}_{\geq 0}$-滤过, 采取降滤过的上标记法. 对于环 R (或 R-模 M) 上的滤过, 我们总要求 $\mathrm{F}^0 R = R$ (或 $\mathrm{F}^0 M = M$).

对于滤过 R-模 M, 条件 $(\mathrm{F}^p R)(\mathrm{F}^q M) \subset \mathrm{F}^{p+q} M$ 和 $\mathrm{F}^0 R = R$ 因而蕴涵每个 $\mathrm{F}^n M$ 都是 M 的 R-子模.

为了会通 §8.1 的惯例, 注意到环 R (或 R-模 M) 上的 $\mathbb{Z}_{\geq 0}$-滤过 $\mathrm{F}^\bullet R$ (或 $\mathrm{F}^\bullet M$) 可以按 $n < 0 \implies \mathrm{F}^n R := R$ (或 $n < 0 \implies \mathrm{F}^n M := M$) 拓展为穷竭的 $\mathbb{Z}$-滤过. 相应的分次对象 $\mathrm{gr}\, R$ (或 $\mathrm{gr}\, M$) 不改变: 它仅在 $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ 的部分可能非零.

对于环 R (或 R-模 M), 本章主要关心的是某个理想 I 确定的 I-进滤过 (例 4.2.12):

$$\mathrm{F}^n R := I^n \quad (\text{或 } \mathrm{F}^n M = I^n M).$$

定义 8.2.2 (环和模的 I-进完备化) 给定环 R 及其理想 I, 赋 R 以 I-进滤过.

(i) 环 R 的 I-进完备化定义为

$$\begin{aligned}\widehat{R} &:= \varprojlim_n R/I^n \\ &= \left\{ (r_n)_{n \geq 0} \in \prod_{n \geq 0} R/I^n \,\middle|\, \forall n \geq 1,\ r_n \mapsto r_{n-1} \right\},\end{aligned}$$

右式视为 $\prod_n R/I^n$ 的子环.

(ii) 滤过 R-模 M 的完备化定义为

$$\begin{aligned}\widehat{M} &:= \varprojlim_n M/\mathrm{F}^n M \\ &= \left\{ (x_n)_{n\geq 0} \in \prod_{n\geq 0} M/\mathrm{F}^n M \,\middle|\, \forall n \geq 1,\ x_n \mapsto x_{n-1} \right\},\end{aligned}$$

它通过逐项乘法成为 $\widehat{R}$-模.

(iii) 对于 (ii), 典型例子是 M 自身也带 I-进滤过 $\mathrm{F}^n M := I^n M$ 的情形, 此时 $\widehat{M} = \varprojlim_n M/I^n M$ 称为 M 的 I-进完备化.

例 8.2.3 对于素数 p, 环 $\mathbb{Z}$ 对素理想 $p\mathbb{Z}$ 的完备化即 p-进整数环 $\mathbb{Z}_p$.

对于任意环 R_0, 考虑多项式代数 $R := R_0[X_1, \ldots, X_n]$ 及其理想 $I := (X_1, \ldots, X_n)$, 相应的完备化是形式幂级数 R_0-代数 $\widehat{R} = R_0[\![X_1, \ldots, X_n]\!]$.

完备化带有自然的环同态 $R \to \widehat{R}$, 以及与 $R \to \widehat{R}$ 兼容的加法群同态 $M \to \widehat{M}$, 后者也表作 $\widehat{R}$-模同态

$$\widehat{R} \underset{R}{\otimes} M \to \widehat{M}.$$

另一类典范同态来自构造给出的投影同态 $p_n : \widehat{R} \to R/I^n$ (或 $p_n : \widehat{M} \to M/I^n M$), 其中 $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. 由于 $\varinjlim$ 中每个 $R/I^{n+1} \to R/I^n$ (或 $M/I^{n+1}M \to M/I^n M$) 皆满, 逐级取原像可见 p_n 为满.

下面探讨完备化的函子性. 给定环 R 的理想 I 和环 R' 的理想 I', 若环同态 $\varphi : R \to R'$ 满足 $\varphi(I) \subset I'$, 则它诱导 $\widehat{\varphi} : \widehat{R} \to \widehat{R}'$, 满足 $\widehat{\varphi}((r_n)_n) = (\varphi(r_n))_n$; 类似地, 若 $\psi : M \to M'$ 是滤过 R-模同态, 则它诱导 $\widehat{\psi} : \widehat{M} \to \widehat{M}'$, 满足 $\widehat{\psi}((x_n)_n) = (\psi(x_n))_n$. 这些构造使下图交换:

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d] & R' \arrow[d] & M \arrow[r, "\psi"] \arrow[d] & M' \arrow[d] \\ \widehat{R} \arrow[r, "\widehat{\varphi}"'] & \widehat{R}' & \widehat{M} \arrow[r, "\widehat{\psi}"'] & \widehat{M}'. \end{tikzcd} \tag{8.2.1}$$

对所有 $\psi_1, \psi_2 \in \mathrm{Hom}_R(M, N)$, 易见 $(\psi_1 + \psi_2)^\wedge = \widehat{\psi}_1 + \widehat{\psi}_2 \in \mathrm{Hom}_{\widehat{R}}(\widehat{M}, \widehat{N})$, 因此完备化给出加性函子 R-Mod $\to$ $\widehat{R}$-Mod. 加性导致典范同构 (见 [8, 定义 1.3.3] 之下讨论)

$$\begin{aligned}(M_1 \oplus M_2)^\wedge &\xrightarrow{\sim} \widehat{M}_1 \oplus \widehat{M}_2 \\ ((x_n, y_n))_n &\mapsto ((x_n)_n, (y_n)_n),\end{aligned} \tag{8.2.2}$$

它兼容于 (8.2.1); 按定义直接检验也毫无困难.

定义 8.2.2 和 §8.1 讨论的完备化兼容, 因此具有拓扑意涵. 这是因为给定 R (或 M), 首先将其滤过按 R (或 M) 拓展为 $\mathbb{Z}$-滤过, 然后留意到在定义 8.1.3 之上的构造

中, k_0 可取为 0, 于是完备化 $\widehat{R}$ (或 $\widehat{M}$) 在该处的定义中确实以逐项相乘为乘法. 以上关于 $\widehat{\varphi}$ 和 $\widehat{\psi}$ 的讨论因而也是 §8.1 的应用.

一般而言, R-模的完备化函子既非左正合亦非右正合, 但仍有以下性质.

引理 8.2.4 选定环 R 的理想 I. 以下的完备化均为 I-进完备化.

(i) 设 R-模同态 $\varphi: M \to N$ 诱导满射 $M/IM \to N/IN$, 则 $\widehat{\varphi}: \widehat{M} \to \widehat{N}$ 满;

(ii) 设 $\varphi: M \to N$ 为 R-模的满同态, 则 $\widehat{\varphi}: \widehat{M} \to \widehat{N}$ 满.

(iii) 设 $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ 为 R-模的短正合列, 而且 M'' 平坦, 则 $0 \to \widehat{M'} \to \widehat{M} \to \widehat{M''} \to 0$ 正合.

(iv) 对所有有限生成 R-模 M, 典范同态 $\widehat{R} \underset{R}{\otimes} M \to \widehat{M}$ 为满.

证明 对于 (i), 对所有 n 对 R/I^n-模同态 $M/I^nM \to N/I^nN$ 和 R/I^n 的幂零理想 I/I^n 应用命题 2.3.6 (ii), 可知 $M/I^nM \to N/I^nN$ 满. 因此有短正合列

$$0 \to \varphi^{-1}(I^nN)/I^nM \to M/I^nM \to N/I^nN \to 0.$$

兹断言 $\varphi^{-1}(I^{n+1}N)/I^{n+1}M \to \varphi^{-1}(I^nN)/I^nM$ 为满射. 诚然, 给定 $x \in \varphi^{-1}(I^nN)$, 可将 $\varphi(x)$ 表作 $\sum_i t_i y_i$, 其中 $t_i \in I^n$ 而 $y_i \in N$; 再将每个 y_i 表为

$$y_i = \varphi(x_i) + \sum_j t_{ij} y_{ij}, \quad t_{ij} \in I, \quad x_i \in M, \quad y_{ij} \in N.$$

于是 $\varphi(x - \sum_i t_i x_i) = \sum_{i,j} t_i t_{ij} y_{ij} \in I^{n+1}N$, 这给出 $x + I^nM$ 的所需原像.

基于上述断言, 和命题 8.1.5 相同的论证 (用 Mittag-Leffler 条件) 给出短正合列

$$0 \to \varprojlim_n \varphi^{-1}(I^nN)/I^nM \to \widehat{M} \xrightarrow{\widehat{\varphi}} \widehat{N} \to 0.$$

对于 (ii), 观察到 φ 满蕴涵 $M/IM \to N/IN$ 满, 代入 (i) 即可.

对于 (iii), 对所有 n 将短正合列和 R/I^n 作张量积, 可得正合列

$$\mathrm{Tor}_1^R(R/I^n, M'') \to M'/I^nM' \to M/I^nM \to M''/I^nM'' \to 0,$$

而平坦条件给出 $\mathrm{Tor}_1^R(R/I^n, M'') = 0$, 见 §5.3. 应用命题 8.1.5 遂得 $0 \to \widehat{M'} \to \widehat{M} \to \widehat{M''} \to 0$ 正合.

对于 (iv), 选定 M 的生成元 $x_1, \ldots, x_k$ 和相应的满同态 $\varphi: R^{\oplus k} \to M$, 则 (8.2.2) 和 (ii) 蕴涵 $\widehat{\varphi}: \widehat{R}^{\oplus k} \to \widehat{M}$ 满. 但 $\widehat{\varphi}$ 又对应到 $\widehat{R}$-模 $\widehat{M}$ 的一列生成元 $\widehat{x}_1, \ldots, \widehat{x}_n$; 基于 (8.2.1) 显见 $\widehat{x}_i$ 正是 x_i 在 $\widehat{M}$ 中的像. 证毕. $\square$

最后探讨滤过的等价. 设 R 的理想 I 和 J 满足以下条件:

$$\exists p, q \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, \quad I \subset J^p,\ J \subset I^q.$$

此时的 I-进和 J-进滤过拓展为 $\mathbb{Z}$-滤过之后是拓扑等价的 (定义 8.1.7), 故命题 8.1.9 表明它们给出相同的完备化 $\widehat{R}$; 对于任意 R-模 M, 它们也给出相同的 $\widehat{M}$.

至于定义 8.1.7 的位移等价, 则有以下结论.

命题 8.2.5 设 R-模 M 带有定义 4.6.1 所谓的 I-好滤过 $\mathrm{F}^\bullet M$, 按本节开头的方式延拓为 $\mathbb{Z}$-滤过, 则它和 M 的 I-进滤过位移等价.

作为推论, 任何 I-好滤过给出的完备化都等同于 I-进完备化.

证明 由于按定义 $\mathrm{F}^0 M = M$ 而 $I(\mathrm{F}^p M) \subset \mathrm{F}^{p+1} M$, 故 $I^p M \subset \mathrm{F}^p M$ 恒成立. 取 $p_0 \geq 0$ 使得 $p \geq p_0 \implies \mathrm{F}^p M = \mathrm{F}^{p+1} M$, 则此时也有

$$I^p M \subset \mathrm{F}^p M = I^{p-p_0} \cdot \mathrm{F}^{p_0} M \subset I^{p-p_0} M;$$

当 $p < p_0$ 时 $I^{\max\{p-p_0, 0\}} M = M$, 上式的两个包含关系仍成立. 因此 $\mathrm{F}^\bullet M$ 和 I-进滤过位移等价. □

8.3 滤过的比较

考虑 R 的理想 I 和 R-模 M. 若无另外说明, 本节的 $\widehat{R}$ 和 $\widehat{M}$ 均代表 I-进完备化.

基于 §8.1 的讨论, M 上的 I-进滤过 $(I^n M)_n$ 赋予 M 拓扑结构, 称为 M 的 ***I*-进拓扑**. 而对于 $\widehat{M}$, 至少可以赋予两种合理的滤过和相应的拓扑.

- ◇ 通过 $R \to \widehat{R}$ 视 $\widehat{M}$ 为 R-模, 则 $\widehat{M}$ 也带有 I-进滤过 $(I^n \widehat{M})_n$ 和相应的 I-进拓扑.
- ◇ 回忆 §8.1 的讨论. 完备化 $\widehat{M}$ 带有典范滤过 $\mathrm{F}^\bullet \widehat{M}$, 它赋予 $\widehat{M}$ 典范拓扑, 使得:
  - $(\mathrm{F}^n \widehat{M})_{n \geq 0}$ 给出 0 处的一组开邻域基,
  - $\widehat{M}$ 对此拓扑是完备的,
  - $\mathrm{F}^\bullet \widehat{M}$ 通过典范同态 $M \to \widehat{M}$ 在 M 上诱导原有的 I-进拓扑.

  对照 §8.2 探讨的典范投影同态族 $p_n : \widehat{M} \to M/I^n M$, 立见 $\ker(p_n) = \mathrm{F}^n \widehat{M}$ 对所有 $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ 成立.

留意到 $I^n M \subset \ker(p_n)$, 因此 I-进滤过较 $\mathrm{F}^\bullet \widehat{M}$ 更细. 自然的问题是: $\widehat{M}$ 的 I-进滤过和 $\mathrm{F}^\bullet \widehat{M}$ 何时相等? 在 I 有限生成的情形, 本节末尾将有肯定的答案.

首先为 I-进拓扑下的完备性给出代数定义.

定义 8.3.1 (完备性) 选定环 R 的理想 I, 若 $R \to \widehat{R}$ 是同构, 则称 R 为 I-进完备环.

类似地, 对于 R-模 M, 若 $M \to \widehat{M}$ 是同构, 则称 M 为 I-进完备模.

对照 §8.1 开头讨论的完备性, 严格而言此处的完备应当称为 “Hausdorff 完备”. 如果 I 是幂零理想, 则 R 和所有 R-模 M 都是 I-进完备的.

按构造显然有 $\bigcap_n I^n\widehat{M} = 0$, 因此 $\bigcap_n I^n M = 0$ 是使 M 为 I-进完备 R-模的必要条件. 以下判准建立 I-进完备性与有限性之间的联系.

引理 8.3.2 设 R 为 I-进完备环, R-模 M 满足 $\bigcap_n I^n M = 0$, 则以下陈述等价:

(i) M 有限生成;

(ii) M/IM 有限生成, 而且 M 是 I-进完备的.

证明 (i) $\implies$ (ii). 显然此时 M/IM 有限生成. 引理 8.2.4 (iv) 表明典范同态 $\widehat{R}\otimes M \to \widehat{M}$ 为满, 因此 $M \simeq R\otimes M \xrightarrow{\sim} \widehat{R}\otimes M \to \widehat{M}$ 的复合为满; 然而此复合正是典范同态 $M \to \widehat{M}$, 其核为 $\bigcap_n I^n M = 0$, 由此知 $M \xrightarrow{\sim} \widehat{M}$.

(ii) $\implies$ (i). 取 $x_1, \ldots, x_k \in M$ 使得它们在 M/IM 中的像生成 M/IM; 记 M' 为它们在 M 中生成的子模. 引理 8.2.4 (i) 蕴涵 $\widehat{M'} \to \widehat{M}$ 为满, 而另一方面 $\bigcap_n I^n M' \subset \bigcap_n I^n M = 0$. 对 M' 应用已证的 (i) $\implies$ (ii) 可知 M' 是 I-进完备的, 因此 $M' \to \widehat{M}$ 满, 故 $M \to \widehat{M}$ 亦满; 然而 $\ker[M \to \widehat{M}] = \bigcap_n I^n M = 0$. 综上可见 $M' \xrightarrow{\sim} M \xrightarrow{\sim} \widehat{M'} \xrightarrow{\sim} \widehat{M}$, 特别地 M 是有限生成 R-模. □

下面研究 $\widehat{R}$ 的 Jacobson 根基 $\mathrm{rad}(\widehat{R})$ (定义 2.3.1).

引理 8.3.3 考虑环 R 的 I-进完备化 $\widehat{R}$.

(i) 若 $\widehat{r} \in \widehat{R}$ 在 R/I 中的像可逆, 则 $\widehat{r}$ 可逆.

(ii) 我们有 $I\widehat{R} \subset \ker[\widehat{R} \to R/I] \subset \mathrm{rad}(\widehat{R})$; 特别地, $1 + I\widehat{R}$ 的元素总是可逆.

证明 对于 (i), 将 $\widehat{r}$ 表为 $(r_n)_n$. 对所有 $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$, 注意到 I/I^n 是 R/I^n 的幂零理想, 故 $r_n \mapsto r_1 \in (R/I)^\times$ 蕴涵 r_n 可逆, 见命题 2.3.2 (iii). 于是 $\widehat{r}^{-1} = (r_n^{-1})_n \in \widehat{R}$.

对于 (ii), 显然 $I\widehat{R} \subset \ker[\widehat{R} \to R/I]$. 若 $\widehat{r} \in \ker[\widehat{R} \to R/I]$, 则 $1 + \widehat{r}$ 在 R/I 中的像是 1, 故 (i) 说明 $1 + \widehat{r}$ 可逆. 命题 2.3.2 (ii) 遂给出 $\ker[\widehat{R} \to R/I] \subset \mathrm{rad}(\widehat{R})$. □

命题 8.3.4 设 I 是 R 的有限生成理想, M 为 R-模, 则对所有 $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$:

(i) $\widehat{M}$ 作为 R-模是 I-进完备的, 而且能将 $(I^n M)^\wedge$ 典范地等同于 $\widehat{M}$ 的 $\widehat{R}$-子模, 使得

$$I^n\widehat{M} = \ker[p_n : \widehat{M} \to M/I^n M] = (I^n M)^\wedge,$$
$$\widehat{M}/I^n\widehat{M} \simeq M/I^n M;$$

(ii) $\widehat{R}$ 作为 R-模是 I-进完备的, 而且

$$I^n\widehat{R} = (I^n)^\wedge, \quad \widehat{R}/I^n\widehat{R} \simeq R/I^n;$$

(iii) 能将 $(I^n)^\wedge$ 典范地等同于 $\widehat{R}$ 的理想, 使得

$$(I^n)^\wedge = \widehat{I}^n, \quad \widehat{I}^n\widehat{M} = I^n\widehat{M};$$

(iv) $\widehat{I} \subset \mathrm{rad}(\widehat{R})$.

证明 对于 (i), 选定 n, 则 I^n 有生成元 $t_1, \ldots, t_k$, 相应地有 $\varphi(x_1, \ldots, x_k) = \sum_{i=1}^k t_i x_i$ 给出的 R-模满同态 $\varphi : M^{\oplus k} \to I^n M$. 代入 (8.2.2) 和引理 8.2.4 (ii) 得到 $\widehat{R}$-模满同态

$$\begin{aligned}\widehat{\varphi} : \widehat{M}^{\oplus k} \to (I^n M)^\wedge &= \varprojlim_{n \leq m} I^n M / I^m M \\ &= \ker[\widehat{M} \twoheadrightarrow M/I^n M] \subset \widehat{M}.\end{aligned}$$

另一方面, 易见 $\widehat{\varphi}$ 映 $(\widehat{x}_1, \ldots, \widehat{x}_k)$ 为 $\sum_{i=1}^k t_i \widehat{x}_i$, 故 $\mathrm{im}(\widehat{\varphi}) = I^n\widehat{M}$. 因此 $\widehat{M} \twoheadrightarrow M/I^n M$ 诱导典范同构

$$\widehat{M}/I^n\widehat{M} \xrightarrow{\sim} M/I^n M.$$

两边取 $\varprojlim_n$, 得到 $(\widehat{M})^\wedge \xrightarrow{\sim} \widehat{M}$, 而它显然是 $\widehat{M} \to (\widehat{M})^\wedge$ 的左逆.

取特例 $M = R$ 代入 (i) 即得 (ii).

由 (ii) 知 $(I^n)^\wedge = I^n\widehat{R} = (I\widehat{R})^n = \widehat{I}^n$ 以及 $\widehat{I}^n\widehat{M} = I^n\widehat{R}\widehat{M} = I^n\widehat{M}$, 此即 (iii).

最后的 (iv) 是 $\widehat{I} = I\widehat{R}$ 和引理 8.3.3 的应用. □

推论 8.3.5 设 I 是 R 的有限生成理想, M 为 R-模, 则本节开头回顾的滤过 $\mathrm{F}^n\widehat{M} = \ker(p_n)$ 正是 $\widehat{M}$ 的 $\widehat{I}$-进滤过.

证明 对所有 $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$, 命题 8.3.4 说明 $\ker(p_n) = I^n\widehat{M} = \widehat{I}^n\widehat{M}$. □

综之, 当 I 有限生成时, $\widehat{M}$ 上的 I-进滤过, $\mathrm{F}^\bullet\widehat{M}$ 和 $\widehat{I}$-进滤过三者相等.

8.4 Noether 环的完备化

对于 Noether 环上的有限生成模, 完备化有特别良好的性质. 若无另外说明, 本节的完备化均指 I-进完备化.

命题 8.4.1 设 R 为 Noether 环, I 为其理想, 则:

(i) 完备化 $M \mapsto \widehat{M}$ 给出有限生成 R-模范畴 $R\text{-}\mathsf{Mod}_{\mathrm{fg}}$ 的正合自函子;

(ii) 对所有有限生成 R-模 M, 典范同态 $\widehat{R} \underset{R}{\otimes} M \to \widehat{M}$ 为同构.

(iii) 典范环同态 $R \to \widehat{R}$ 是平坦的.

证明 对于 (i), 考虑 $R\text{-}\mathsf{Mod}_{\mathrm{fg}}$ 中的短正合列 $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$, 则对所有 $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ 都有短正合列

$$0 \to M'/(M' \cap I^n M) \to M/I^n M \to M''/I^n M'' \to 0.$$

变动 n, 对 M' 上的滤过 $\mathrm{F}^n M' := M' \cap I^n M$ 和 M, M'' 上的 I-进滤过取完备化, 代入命题 8.1.5 遂知

$$0 \to \widehat{M'} \to \widehat{M} \to \widehat{M''} \to 0.$$

正合. 然而 M' 的滤过 $\mathrm{F}^\bullet M'$ 诱导自 M 的 I-进滤过, 故定理 4.6.4 说明 $\mathrm{F}^\bullet M'$ 是 I-好滤过, 继而命题 8.2.5 表明 $\widehat{M'}$ 即 M' 的 I-进完备化.

对于 (ii), 取展示 $R^{\oplus b} \to R^{\oplus a} \to M \to 0$, 其中 $a, b \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. 基于 (i) 和 (8.2.2) 得到行正合交换图表

$$\begin{tikzcd}
\widehat{R} \underset{R}{\otimes} (R^{\oplus b}) \arrow[r] \arrow[d] & \widehat{R} \underset{R}{\otimes} (R^{\oplus a}) \arrow[r] \arrow[d] & \widehat{R} \underset{R}{\otimes} M \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
\widehat{R}^{\oplus b} \arrow[r] & \widehat{R}^{\oplus a} \arrow[r] & \widehat{M} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

其中垂直箭头都是典范同态. 但 $\widehat{R} \underset{R}{\otimes} R^{\oplus \star} \simeq \widehat{R}^{\oplus \star}$ 将典范同态等同于恒等 ($\star \in \{a, b\}$), 余核的唯一性遂给出 $\widehat{R} \underset{R}{\otimes} M \xrightarrow{\sim} \widehat{M}$.

基于 (i) 和 (ii), $\dot{R} \underset{R}{\otimes} (\cdot) : R\text{-}\mathsf{Mod}_{\mathrm{fg}} \to \widehat{R}\text{-}\mathsf{Mod}_{\mathrm{fg}}$ 正合. 然而根据平坦性的理想判准 (推论 5.4.4), 在有限生成模范畴上的正合性足以说明 $R \to \widehat{R}$ 平坦. 此即 (iii). □

稍后的推论 8.5.2 将给出使 $R \to \widehat{R}$ 忠实平坦的一则充分条件.

推论 8.4.2 设 R 为 Noether 环, I 为其理想, M 为有限生成 R-模.

(i) 对任何子模 $N \subset M$, 典范同态 $\widehat{N} \to \widehat{M}$ 将 $\widehat{N}$ 等同于 $\widehat{M}$ 的子模, 而且有典范 $\widehat{R}$-模同构 $\widehat{M}/\widehat{N} \simeq (M/N)^\wedge$.

(ii) 对任何子模 $M_1, M_2 \subset M$ 皆有

$$\widehat{M_1} + \widehat{M_2} = (M_1 + M_2)^\wedge, \quad \widehat{M_1} \cap \widehat{M_2} = (M_1 \cap M_2)^\wedge;$$

(iii) 对任何理想 $J \subset R$, 典范同态 $\widehat{J} \to \widehat{R}$ 将 $\widehat{J}$ 等同于 $\widehat{R}$ 的理想, 有典范环同构 $\widehat{R}/\widehat{J} \simeq (R/J)^\wedge$, 而且 $\widehat{J} = \widehat{R}J$;

(iv) $\mathrm{ann}_R(M)^\wedge = \mathrm{ann}_{\widehat{R}}(\widehat{M})$.

证明 完备化的正合性给出 (i).

对于 (ii), 将 $M_1 \cap M_2$ 等同于 $M \to M/M_1 \oplus M/M_2$ 的核, 将 $M_1 + M_2$ 等同于 $M_1 \oplus M_2 \to M$ 的像; 对于 $\widehat{M_1}$ 和 $\widehat{M_2}$ 也有相同结论. 接着应用 (8.2.2) 和完备化的正合性即可.

对于 (iii), 嵌入 $\widehat{J} \hookrightarrow \widehat{R}$ 和 $\widehat{R}$-模同构 $\widehat{R}/\widehat{J} \simeq (R/J)^\wedge$ 是 (i) 对 $M = J$ 的特例, 而且后一同构来自 $R \to R/J$ 诱导的 $\widehat{R} \to (R/J)^\wedge$, 因而是环同构. 至于 $\widehat{J} = \widehat{R}J$, 记包含同态 $J \hookrightarrow R$ 为 ι 并考虑交换图表

$$\begin{tikzcd} \widehat{R} \underset{R}{\otimes} J \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes\iota"'] & \widehat{J} \arrow[d, hook, "\widehat{\iota}"] \\ \widehat{R} \underset{R}{\otimes} R \arrow[r, "\sim"'] & \widehat{R}. \end{tikzcd}$$

取 $\widehat{R} \underset{R}{\otimes} R \xrightarrow{\sim} \widehat{R}$ 与 $\mathrm{id} \otimes \iota$ 的合成, 其像是 $\widehat{R}J$; 和另一路合成比较便有 $\widehat{R}J = \widehat{J}$.

对于 (iv), 命题 5.2.6 (取 $S = \widehat{R}$) 给出 $\widehat{R} \cdot \mathrm{ann}_R(M) = \mathrm{ann}_{\widehat{R}}(\widehat{M})$; 结合 (iii) 便完成证明. □

注记 8.4.3 在推论 8.4.2 (i) 的场景中, 定理 4.6.4 确保 M 的 I-进滤过在 N 上诱导的滤过是 I-好滤过, 相应的完备化因而等于 N 的 I-进完备化 $\widehat{N}$ (命题 8.2.5). 结合推论 8.1.6, 可见 $\widehat{N}$ 正是 $\mathrm{im}[N \to \widehat{M}]$ 在 $\widehat{M}$ 中的闭包. 取特例 $M = R$ 可知同样结论适用于 R 的理想.

命题 8.4.4 设 I 是环 R 的有限生成理想, M 是 R-模. 沿用 §4.6 的记号定义分次环

$$\mathrm{gr}_I(R) = \bigoplus_{n \geq 0} I^n/I^{n+1}, \quad \mathrm{gr}_{\widehat{I}}(\widehat{R}) = \bigoplus_{n \geq 0} \widehat{I}^n/\widehat{I}^{n+1},$$

并类似地定义分次 $\mathrm{gr}_I(R)$-模 $\mathrm{gr}_I(M)$ 和分次 $\mathrm{gr}_{\widehat{I}}(\widehat{R})$-模 $\mathrm{gr}_{\widehat{I}}(\widehat{M})$.

此时有分次 R/I-代数的典范同构 $\mathrm{gr}_{\widehat{I}}(\widehat{R}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{gr}_I(R)$ 和与之兼容的 $\mathrm{gr}_{\widehat{I}}(\widehat{M}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{gr}_I(M)$.

证明 命题 8.3.4 说明 $\widehat{I}^n = I^n\widehat{R}$, $\widehat{R}/\widehat{I} \simeq R/I$ 以及

$$\widehat{I}^n/\widehat{I}^{n+1} = \widehat{I}^n/I \cdot \widehat{I}^n \xrightarrow{\sim} I^n/I \cdot I^n = I^n/I^{n+1}.$$

由此得到 $\mathrm{gr}_{\widehat{I}}(\widehat{R}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{gr}_I(R)$, 在 0 次项化为 $\widehat{R}/\widehat{I} \xrightarrow{\sim} R/I$; 易见它保持乘法.

关于模 M 的部分完全类似, 依然基于命题 8.3.4. □

命题 8.4.5 设 I 是环 R 的有限生成理想, 而 R/I 为 Noether 环, 则 $\widehat{R}$ 是 $\widehat{I}$-进完备 Noether 环.

证明 命题 8.3.4 说明 $\widehat{R}$ 是 I-进完备的, $\widehat{I}^n = I^n\widehat{R}$ 而 $\widehat{R}/I^n\widehat{R} \simeq R/I^n$, 故也有 $\widehat{R} \xrightarrow{\sim} \varprojlim_n \widehat{R}/\widehat{I}^n$; 换言之 $\widehat{R}$ 是 $\widehat{I}$-进完备的.

取 I 的生成元 $s_1, \ldots, s_h$, 由此得到分次 R/I-代数的满同态

$$\begin{aligned} (R/I)[X_1, \ldots, X_h] &\twoheadrightarrow \mathrm{gr}_I(R) = \bigoplus_{n \geq 0} I^n/I^{n+1} \\ X_i &\mapsto \bar{s}_i := s_i + I^2, \end{aligned}$$

于是 $\mathrm{gr}_I(R)$ 是 Noether 环.

为了说明 $\widehat{R}$ 是 Noether 环, 以下证明 $\widehat{R}$ 的所有理想 J 皆有限生成. 结合命题 8.4.4 和上一段可知

$$\bigoplus_n (J\cap \widehat{I}^n)/(J\cap \widehat{I}^{n+1}) \subset \bigoplus_n \widehat{I}^n/\widehat{I}^{n+1} = \mathrm{gr}_{\widehat{I}}(\widehat{R}) \simeq \mathrm{gr}_I(R)$$

是分次理想. 取其非零齐次生成元 $\bar{t}_1, \ldots, \bar{t}_k$; 对每个 i 记 $d_i = \deg \bar{t}_i$, 再取 $\bar{t}_i$ 的原像 $t_i \in J \cap \widehat{I}^{d_i}$. 兹断言 $t_1, \ldots, t_k$ 生成 J.

对所有 $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ 和 $x_n \in J \cap \widehat{I}^n$, 可取到 $a_1, \ldots, a_k$ 使得

$$a_j \in \widehat{I}^{\max\{0, n-d_j\}}, \quad x_n - \sum_{j=1}^k a_j t_j \in J \cap \widehat{I}^{n+1}.$$

今给定 $x \in J$, 可从 $x_0 := x$ 出发, 逐步取到 $a_{ij} \in \widehat{I}^{\max\{0, i-d_j\}}$, 其中 $i \geq 0$ 而 $1 \leq j \leq k$, 使得

$$x_n := x - \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=1}^k a_{ij} t_j \in J \cap \widehat{I}^n$$

对所有 n 成立. 完备性确保 $\sum_{i=0}^\infty a_{ij} t_j$ 在 $\widehat{R}$ 中收敛, 故

$$x = \sum_{j=1}^k \left(\sum_{i=0}^\infty a_{ij} \right) t_j.$$

断言得证. □

推论 8.4.6 设 R 是 Noether 环, I 是 R 的理想, 则 $\widehat{R}$ 仍是 Noether 环.

证明 此时 I 有限生成, 故可代入命题 8.4.5. □

8.5 完备化的其它性质

本节考虑 Noether 环 R 和有限生成 R-模 M 的 I-进完备化. 模的维数记如 $\dim_R M$ 或 $\dim_{\widehat{R}} \widehat{M}$, 以强调环的角色.

以下操作基于推论 8.4.2 (iii).

命题 8.5.1 设 R 为 Noether 环, I 为 R 的理想, 则 I-进完备化给出单射

$$\begin{aligned} \{J : \text{包含 } I \text{ 的理想}\} &\hookrightarrow \left\{ \widehat{J} : \text{包含 } \widehat{I} \text{ 的理想} \right\} \\ J &\mapsto \widehat{J}, \end{aligned}$$

使得

(i) 对 $R \to \widehat{R}$ 取原像给出它的一个左逆映射;

(ii) 当 $J \mapsto \widehat{J}$ 时

$$R/J \simeq \widehat{R}/\widehat{J} \quad (\text{环同构}),$$

而且 $\widehat{J}$ 是素理想 (或极大理想) 当且仅当 J 亦然;

(iii) 它限制为双射

$$\mathrm{MaxSpec}(R) \cap V(I) \xrightarrow{1:1} \mathrm{MaxSpec}(\widehat{R}).$$

证明 对所有理想 $J \supset I$, 由于 R/J 对 I-进拓扑离散, 故推论 8.4.2 (iii) 给出环同构

$$\widehat{R}/\widehat{J} \simeq (R/J)^\wedge = R/J.$$

于是 $\widehat{J}$ 是 $\widehat{R}$ 的素理想 (或极大理想) 当且仅当 J 亦然. 兹断言 J 是 $\widehat{J} = \varprojlim_n J/I^n$ 对 $R \to \widehat{R} = \varprojlim_n R/I^n$ 的原像. 诚然, $x \in R$ 属于此原像当且仅当 $x \in I^n + J = J$ 对所有 $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ 成立. 断言得证, 从而 $J \mapsto \widehat{J}$ 为单射.

命题 8.3.4 (iv) 蕴涵所有 $\mathfrak{n} \in \mathrm{MaxSpec}(\widehat{R})$ 皆包含 $\widehat{I}$, 因此 $\mathfrak{n}$ 是 $\widehat{R}$ 的开子集; 详见推论 8.3.5. 又因为 $\widehat{R}$ 是 Noether 环 (推论 8.4.6), $\mathfrak{n}$ 有限生成, 故引理 8.3.2 说明 $\mathfrak{n}$ 是 I-进完备模; 完备蕴涵闭, 从而 $\mathfrak{n}$ 在 $\widehat{R}$ 中闭.

记 $\mathfrak{n}$ 在 R 中的原像为 $\mathfrak{m}$, 它属于 $V(I)$. 既然 $\widehat{\mathfrak{m}}$ 是 $\mathrm{im}[\mathfrak{m} \to \widehat{R}]$ 的闭包 (注记 8.4.3), 由 $\mathfrak{n}$ 闭立见 $\mathfrak{n} \supset \widehat{\mathfrak{m}}$.

另一方面, $R \to \widehat{R}$ 的像稠密, 而 $\mathfrak{n}$ 开, 由此推得 $\mathfrak{n}$ 包含于闭包 $\widehat{\mathfrak{m}}$. 于是 $\mathfrak{n} = \widehat{\mathfrak{m}}$, 而先前的结果表明 $\mathfrak{m}$ 是极大理想. 明所欲证. □

推论 8.5.2 设 R 为 Noether 环, 其理想 I 包含于 $\mathrm{rad}(R)$. 记 R 的 I-进完备化为 $\widehat{R}$, 则 $\widehat{R}$ 是忠实平坦 R-代数.

证明 命题 8.4.1 (iii) 已说明 $\widehat{R}$ 是平坦 R-代数. 对 R 的所有极大理想 $\mathfrak{m}$, 命题 8.5.1 和 $I \subset \mathrm{rad}(R)$ 表明 $\mathfrak{m}$ 属于 $\mathrm{Spec}(\widehat{R}) \to \mathrm{Spec}(R)$ 的像, 特别地 $\widehat{R}/\mathfrak{m}\widehat{R} \neq 0$. 将 $M = R$ 代入命题 5.5.1 遂知 $\widehat{R}$ 忠实平坦. □

推论 8.5.3 设 I 为环 R 的真理想. 若 R 是 Noether 局部环 (或半局部环, 见定义 1.11.2), 则其 I-进完备化 $\widehat{R}$ 亦然.

事实上, 若 $(R, \mathfrak{m})$ 是 Noether 局部环, 则 $\mathfrak{m}$-进完备化给出 Noether 局部环 $(\widehat{R}, \widehat{\mathfrak{m}})$.

证明 推论 8.4.6 说明 $\widehat{R}$ 是 Noether 环. 应用命题 8.5.1 中关于极大理想的双射. □

命题 8.5.4 设 R 为半局部 Noether 环, M 为有限生成 R-模. 若 I 是 M 的一个参数理想 (定义 7.2.1), 则 I-进完备化 $\widehat{R}$ 是半局部环, $\widehat{I}$ 是 $\widehat{M}$ 的一个参数理想, 而且 $M = 0 \iff \widehat{M} = 0$.

证明 首先由命题 8.3.4 (iv) 知 $\widehat{I} \subset \mathrm{rad}(\widehat{R})$, 由推论 8.5.3 知 $\widehat{R}$ 是半局部环.

根据引理 7.2.2, 使 I 为 M 的参数理想的条件等价于 $R/(I + \mathrm{ann}(M))$ 为 Artin 环, 对 $\widehat{I}$ 和 $\widehat{M}$ 也有相同结论. 然而命题 8.4.1 (i) 和推论 8.4.2 给出

$$\widehat{R}/(\widehat{I} + \mathrm{ann}(\widehat{M})) = \widehat{R}/(\widehat{I} + \mathrm{ann}(M)^\wedge) \simeq (R/(I + \mathrm{ann}(M)))^\wedge ,$$

而最右等于 $R/(I + \mathrm{ann}(M))$ 本身. 综上, $\widehat{I}$ 是 $\widehat{M}$ 的参数理想.

最后设 $\widehat{M} = 0$, 则故命题 8.3.4 (i) 蕴涵 $M/I^n M \simeq \widehat{M}/I^n\widehat{M} = 0$ 对所有 $n \geq 1$, 从而有 $M = \bigcap_n I^n M$. 因为 I 是参数理想, $I \subset \mathrm{rad}(R)$, 定理 3.7.1 给出 $M = 0$. □

推论 8.5.5 设 R 为半局部 Noether 环, M 为以 I 为参数理想的有限生成 R-模, 则 I-进局部化 $\widehat{R}$ 和 $\widehat{M}$ 满足 $\dim_{\widehat{R}} \widehat{M} = \dim_R M$.

作为特例, 若 I 是满足 $\mathrm{rad}(R)^k \subset I \subset \mathrm{rad}(R)$ 的理想 ($k \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$), 则 I-进完备化 $\widehat{R}$ 满足 $\dim R = \dim \widehat{R}$.

证明 对于第一部分, 任取 M 的参数理想 I. 命题 8.4.4 表明 $\mathrm{gr}_I(R) \simeq \mathrm{gr}_{\widehat{I}}(\widehat{R})$ 而 $\mathrm{gr}_I(M) \simeq \mathrm{gr}_{\widehat{I}}(\widehat{M})$. 命题 8.5.4 表明 $\widehat{R}$ 仍是半局部环, $\widehat{I}$ 仍是 $\widehat{M}$ 的参数理想. 由于在 $M \neq 0$ (亦即 $\widehat{M} \neq 0$) 时定义 7.2.3 的 $d(M)$ 和 $d(\widehat{M})$ 可由这些分次模读出 (定理 7.2.8), 故两者相等.

对于第二部分, 取特例 $M = R$ 并留意到条件 $\mathrm{rad}(R)^k \subset I \subset \mathrm{rad}(R)$ 等价于 I 是 R 的参数理想 (引理 7.2.2) 即可. □

8.6 Cohen 结构定理的表述

Cohen 结构定理明确了完备局部环的结构, 由于其证明需要其它工具, 本节仅表述结构定理并证明若干推论. 首先给出完备局部环的严格定义.

定义 8.6.1 (完备局部环) 设 $(R, \mathfrak{m})$ 为局部环. 若 R 是 $\mathfrak{m}$-进完备的 (换言之 $R \xrightarrow{\sim} \varprojlim_n R/\mathfrak{m}^n$, 见定义 8.3.1), 则称之为完备局部环.

例 8.6.2 域当然是完备局部环. 推而广之, Artin 局部环是完备局部环, 这是因为对 Artin 局部环 $(R, \mathfrak{m})$ 必有 k 使得 $\mathfrak{m}^k = 0$ (推论 3.3.4), 故 $(R, \mathfrak{m})$ 完备.

例 8.6.3 设 $(\Lambda, \mathfrak{m}_\Lambda)$ 是完备局部环, 对所有 $d \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ 定义形式幂级数代数 $\Lambda[\![X_1, \ldots, X_d]\!]$ 的理想

$$\mathfrak{m} := \left\{ \sum_{\mathbf{a} \in \mathbb{Z}^d_{\geq 0}} c_{\mathbf{a}} X^{\mathbf{a}} : c_{(0,\ldots,0)} \in \mathfrak{m}_\Lambda \right\} = \mathfrak{m}_\Lambda + (X_1, \ldots, X_d),$$

其中 $X^{\mathbf{a}} := X_1^{a_1} \cdots X_d^{a_d}$, 则不难验证 $(\Lambda[\![X_1, \ldots, X_d]\!], \mathfrak{m})$ 是完备局部环. 当 Λ 是 Noether 环时, 命题 7.5.3 (ii) 蕴涵

$$\dim \Lambda[\![X_1, \ldots, X_d]\!] = \dim \Lambda + d.$$

例 8.6.4 设 R 为 Noether 完备局部环, I 为 R 的真理想, 则 R/I 是完备局部环, 这是因为推论 8.4.2 (iii) 给出典范同构 $(R/I)^\wedge \simeq \widehat{R}/\widehat{I} = \widehat{R}/\widehat{R}I = R/I$.

引理 8.6.5 完备局部环 $(R, \mathfrak{m})$ 是 Noether 环当且仅当 $\mathfrak{m}$ 是有限生成理想.

证明 "仅当" 方向平凡. 对命题 8.4.5 代入 $I = \mathfrak{m}$ 可得 "当" 的方向. □

引理 8.6.6 设 R 为完备局部环, 其极大理想是主理想, 则 R 或者是 Artin 局部环, 或者是离散赋值环.

证明 取 $\varpi \in R$ 使得 R 的极大理想 $\mathfrak{m}$ 等于 (ϖ), 分两种情形讨论.

首先设存在 $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ 使得 $\varpi^n = 0$. 此时推论 3.3.4 蕴涵 R 是 Artin 局部环.

其次设对所有 n 皆有 $\varpi^n \neq 0$. 完备局部环的定义蕴涵 $\bigcap_k (\varpi^k) = 0$; 任何 $x \neq 0$ 都不能被 ϖ 无穷次整除, 故可写成 $x = \varpi^r u$, 其中 $r \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ 而 $u \in R \smallsetminus (\varpi) = R^\times$. 由此易见 R 是整环. 命 $K = \mathrm{Frac}(R)$, 定义映射

$$v : K^\times \to \mathbb{Z}, \quad v(\varpi^r u) = r \quad (r \in \mathbb{Z},\ u \in R^\times),$$

再按 $v(0) = \infty$ 延拓到 K. 例行的验证表明 v 是域 K 上的离散赋值, 而 $R = v^{-1}([0, +\infty])$ 是相应的离散赋值环, 以 ϖ 为其一致化元. □

定义 8.6.7 (系数环) 设 $(R, \mathfrak{m})$ 为完备局部环, Λ 为 R 的子环. 当以下条件成立时, 称 Λ 为 R 的系数环:

CR.1 $(\Lambda, \Lambda \cap \mathfrak{m})$ 是完备局部环,

CR.2 局部环之间的同态 $\Lambda \hookrightarrow R$ 诱导剩余类域之间的同构,

CR.3 命 $p = \mathrm{char}(R/\mathfrak{m})$, 则 $\Lambda \cap \mathfrak{m} = p\Lambda$.

如果定义 8.6.7 中的 R 包含某个域, 则或者 $\mathbb{Q} \subset R$, 此时 $p = 0$, 又或者 $\mathbb{F}_p \subset R$. 两种情形都有 $\Lambda \cap \mathfrak{m} = 0$, 从而 Λ 是域, 而且 $\Lambda \hookrightarrow R \twoheadrightarrow R/\mathfrak{m}$ 合成为域同构. 因此当 R 包含域时 (等价地说, 当 Λ 是域时), 也称 Λ 为 R 的系数域.

另一方面, 若 Λ 非域, 则引理 8.6.6 表明 Λ 或者是 Artin 局部环, 或者是以 $p \cdot 1_\Lambda \neq 0$ 为一致化元的离散赋值环. 以下定义顺理成章.

定义 8.6.8 (Cohen 环) 若 Λ 是完备离散赋值环, 而且其一致化元可取为某个素数 p 的像, 则称 Λ 为 Cohen 环.

Cohen 环定义中的素数 p 唯一, 它等于剩余类域的特征.

例 8.6.9 选定素数 p 和特征 p 的域 κ, 并要求 κ 是完全域: $\kappa^p = \kappa$. 精确到同构, 剩余类域 $\simeq \kappa$ 的 Cohen 环恰是 [7, §10.9] 介绍的 Witt 向量环 $\mathrm{W}(\kappa)$. 这是 [7, 定理 10.9.11 + 命题 10.9.12] 的应用.

定理 8.6.10 (I. Cohen) 设 $(R, \mathfrak{m})$ 为完备局部环.

(i) 存在系数环 $\Lambda \subset R$.

(ii) 若 R 为 Noether 环, 则以上的 Λ 可取为域或 Cohen 环, 此时存在环同构

$$R \simeq \Lambda[\![X_1, \ldots, X_n]\!]/I,$$

其中 $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ 而 I 是 $\Lambda[\![X_1, \ldots, X_n]\!]$ 的真理想.

定理 8.6.10 的证明留待 §11.2 处理, 且先介绍一则关于正则性的应用. 以下是定义 10.2.3 的预告: 若 $(R, \mathfrak{m})$ 是局部环, 而 $\mathfrak{m}$ 能由 $d := \dim R$ 个元素生成, 则称 R 为**正则局部环**.

推论 8.6.11 若 Λ 是 Cohn 环, 则 $\Lambda[\![X_1, \ldots, X_d]\!]$ 是正则完备局部环; 任何 Noether 完备局部环都能表成某个正则完备局部环的商.

证明 对于第一部分, 设 Λ 是剩余类域特征为 p 的 Cohn 环. 例 8.6.3 说明 $\Lambda[\![X_1, \ldots, X_d]\!]$ 是以 $(p, X_1, \ldots, X_d)$ 为极大理想的完备局部环, 维数是 $d+1$, 由此得到正则性.

注意到当 Λ 是域时 $\Lambda[\![X_1, \ldots, X_d]\!]$ 也是正则完备局部环. 配合定理 8.6.10 (ii) 可得第二部分. □

8.7 Beauville–Laszlo 下降: 框架

这两节旨在证明 Beauville–Laszlo 下降定理 (定理 8.8.4 和推论 8.8.9). 原始文献是 [1], 以下追随 [5] 的进路, 证明一个稍广的版本. 本节表述相关的基本框架.

考虑环同态 $\varphi : R \to S$ 和 $f \in R$. 视 S 为 R-代数, 相应的局部化 $S[f^{-1}]$ 可等同于 $S[\varphi(f)^{-1}]$. 今后经常在符号中省略 φ.

定义 8.7.1 (Beauville–Laszlo 下降资料) 给定 $R \to S$ 和 f 如上, 定义 $\mathrm{Desc}_{R \to S, f}$ 为以下范畴.

▷ **对象** 资料 $\mathbf{M} = (M, M^\circ, \alpha)$, 其中 M 是 S-模, M° 是 $R[f^{-1}]$-模, 而 $\alpha : M[f^{-1}] \xrightarrow{\sim} (M^\circ)_S$ 是 $S[f^{-1}]$-模同构; 这些资料也称为 Beauville–Laszlo 下降资料, 或简称下降资料.

▷ **态射** 从 $\mathbf{M}_1$ 到 $\mathbf{M}_2$ 的态射是 S-模同态 $\psi : M_1 \to M_2$ 和 $R[f^{-1}]$-模同态 $\psi^\circ : M_1^\circ \to M_2^\circ$, 使得下图交换:

$$\begin{tikzcd} M_1[f^{-1}] \arrow[r, "{\psi[f^{-1}]}"] \arrow[d, "\alpha_1"'] & M_2[f^{-1}] \arrow[d, "\alpha_2"] \\ (M_1^\circ)_S \arrow[r, "(\psi^\circ)_S"'] & (M_2^\circ)_S. \end{tikzcd}$$

恒等元和态射的合成定义自明.

对于任意 R-模 N, 记 $N_S := N \underset{R}{\otimes} S$, 可以典范地构造 $\mathrm{Desc}_{R\to S,f}$ 的对象 $(N_S, N[f^{-1}], \alpha_N)$, 其中 $\alpha_N : N_S[f^{-1}] \xrightarrow{\sim} N[f^{-1}]_S$ 是自明的同构.

定义 8.7.2 给定 $R \to S$ 和 f 如上, 定义一对函子

$$\mathrm{B} : R\text{-}\mathsf{Mod} \rightleftarrows \mathrm{Desc}_{R\to S,f} : \mathrm{L}.$$

在对象层次:

- $\mathrm{B}(N) = (N_S, N[f^{-1}], \alpha_N)$ 如上;
- $\mathrm{L}(\mathbf{M}) = \ker\left[M \oplus M^\circ \to M[f^{-1}]\right]$, 此处取 R-模同态

$$M \oplus M^\circ \to M[f^{-1}], \quad (x, y) \mapsto \frac{x}{1} - \alpha^{-1}(y \otimes 1).$$

在态射层次, 它们的映法自明.

为了从定义 8.7.2 的函子得到范畴等价, 必须限制到 R-Mod 的合适子范畴. 为此, 请考虑下述 R-模同态:

- 从 R 到 $S \oplus R[f^{-1}]$ 有对角同态 $\delta : a \mapsto \left(\varphi(a), \frac{a}{1}\right)$;
- 从 $S \oplus R[f^{-1}]$ 到 $S[f^{-1}]$ 有同态 λ 和 ρ, 分别来自局部化 $S \to S[f^{-1}]$ 以及 $\varphi[f^{-1}] : R[f^{-1}] \to S[f^{-1}]$.

定义 8.7.3 (粘合对和可粘模) 给定 $(R \to S, f)$, 定义同态 δ, λ, ρ 如上. 若

$$0 \longrightarrow R \xrightarrow{\delta} S \oplus R[f^{-1}] \xrightarrow{\lambda-\rho} S[f^{-1}] \longrightarrow 0 \tag{8.7.1}$$

是正合列, 则称 $(R \to S, f)$ 为粘合对. 若 R-模 N 和 (8.7.1) 作张量积给出的

$$0 \longrightarrow N \xrightarrow{\mathrm{id}\otimes\delta} \left(N_S \oplus N[f^{-1}]\right) \xrightarrow{\mathrm{id}\otimes(\lambda-\rho)} N_S[f^{-1}] \longrightarrow 0 \tag{8.7.2}$$

是正合列, 则称 N 对 $(R \xrightarrow{\varphi} S, f)$ 为对 $(R \xrightarrow{\varphi} S, f)$ 的可粘模.

注记 8.7.4 设 $(R \to S, f)$ 为粘合对. Tor 函子的长正合列表明若 $\mathrm{Tor}_1^R(N, S[f^{-1}]) = 0$, 则 N 对 $(R \to S, f)$ 是可粘模. 对 N 取解消来计算 Tor, 可见前提也等价于 $\mathrm{Tor}_1^R(N, S)[f^{-1}] = 0$; 特别地, 当粘合对 $(R \to S, f)$ 中的 S 是平坦 R-代数时, 所有 R-模皆可粘.

定义–命题 8.7.5 符号如上, 另记全体可粘模在 R-Mod 中构成的全子范畴为 $R\text{-}\mathsf{Mod}'$.

(i) 定义 8.7.2 中的 (B, L) 是伴随对, 其单位态射 $\eta : \mathrm{id} \to \mathrm{LB}$ 来自 (8.7.2) 中的 $\mathrm{id}\otimes\delta$.

(ii) 若存在同构 $\mathrm{BL} \simeq \mathrm{id}$, 而且 L 通过 R-Mod' 分解, 则 B 给出从 R-Mod' 到 $\mathrm{Desc}_{R\to S,f}$ 的范畴等价 B', 它以 L 为拟逆函子, 而等价中的同构 $\mathrm{id} \xrightarrow{\sim} \mathrm{LB}'$ 可取为 η 的限制.

证明 (i). 给定 N 和 $\mathbf{M}$, 任何态射 $\mathrm{B}(N) \to \mathbf{M}$ 中的 ψ 和 ψ° 分别通过 $N \to N_S$ 和 $N \to N[f^{-1}]$ 由相应的 R-模同态 $(u,v) : N \to M \oplus M^\circ$ 确定. 反之, 从 $(u,v) : N \to M \oplus M^\circ$ 可得 S-模同态 $\psi : N_S \to M$ 和 $R[f^{-1}]$-模同态 $\psi^\circ : N[f^{-1}] \to M^\circ$; 考虑图表

$$
\begin{tikzcd}
N_S[f^{-1}] \arrow[r, "\sim", "\alpha_N"'] \arrow[d, "{\psi[f^{-1}]}"'] & N[f^{-1}]_S \arrow[d, "(\psi^\circ)_S"] \\
M[f^{-1}] \arrow[r, "\sim", "\alpha"'] & (M^\circ)_S
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
& N \arrow[dl, "u"'] \arrow[dr, "v"] & \\
M \arrow[d] & & M^\circ \arrow[d] \\
M[f^{-1}] \arrow[rr, "\sim", "\alpha"'] & & (M^\circ)_S,
\end{tikzcd}
$$

易见 (ψ,ψ°) 给出态射 $\mathrm{B}(N) \to \mathbf{M}$ 等价于左图交换, 继而等价于右图交换, 但后者又等价于 (u,v) 是映入 $\mathrm{L}(\mathbf{M})$ 的 R-模同态.

代入 $(\psi,\psi^\circ) = \mathrm{id}_{\mathrm{B}(N)}$, 则 $(u,v) : N \to (N_S, N[f^{-1}])$ 无非 $\mathrm{id} \otimes \delta$.

(ii). 记 B 在 R-Mod' 上的限制为 B'. 由 $\mathrm{B}'\mathrm{L} = \mathrm{BL} \simeq \mathrm{id}$ 知 B' 是本质满函子, 以下证其为全忠实. 易见 $\mathrm{B}' : R\text{-}\mathsf{Mod}' \rightleftarrows \mathrm{Desc}_{R\to S,f} : \mathrm{L}$ 仍是伴随对, 而可粘模具有的正合列 (8.7.2) 表明此伴随对的单位态射 $\mathrm{id} \to \mathrm{LB}'$ (亦即 η 的限制) 是同构. 标准的范畴论论证遂表明 B' 全忠实, 见 [7, 第二章习题 8] 及其提示. □

为了得到范畴等价, 必须对 $R \to S$ 和 f 施加合适的环论条件.

约定 8.7.6 设 R 为环, $f \in R$. 给定环同态 $\varphi : R \to S$ 使 S 成为 R-代数, 并且 φ 对所有 $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ 诱导同构 $R/f^nR \xrightarrow{\sim} S/f^nS$.

对所有 R-模 N 和 $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$, 取 $N_n := \{x \in N : f^n x = 0\}$, 再定义 N 的子模 $N_\infty := \bigcup_{n\geq 1} N_n$ (递增并). 特别地, 取 $N = R$ 即有 $R_\infty = \bigcup_{n \geq 1} R_n$, 而环同态 $R \to S$ 限制为 $R_\infty \to S_\infty$.

引理 8.7.7 在约定 8.7.6 的场景中, 给定 R-模 N, 定义 N_∞, R_∞ 和 S_∞ 如上.

(i) 在 (8.7.1) 中, $\lambda - \rho$ 总是满射, 而该列在 R (或 $S \oplus R[f^{-1}]$) 处正合当且仅当 $R_\infty \to S_\infty$ 为单 (或满).

(ii) 在 (8.7.2) 中, $\mathrm{id}_N \otimes (\lambda - \rho)$ 总是满射, 而该列在 N (或 $N_S \oplus N[f^{-1}]$) 处正合当且仅当 $N_\infty \to (N_S)_\infty$ 为单 (或满).

若 $(R \to S, f)$ 是粘合对, 则该列在 $N_S \oplus N[f^{-1}]$ 处总是正合.

证明 (i). 对所有 $a = \frac{b}{f^n} \in S[f^{-1}]$, 将 b 表为 $\varphi(c) + f^n d$, 其中 $c \in R$ 而 $d \in S$, 则 $(\lambda - \rho)(d, -c/f^n) = a$. 满性得证.

关于 δ 的单性判准, 注意到 $\ker[R \to R[f^{-1}]] = R_\infty$ 即可.

设 (8.7.1) 在 $S \oplus R[f^{-1}]$ 处正合, 则形如 $(a, 0)$ 的元素 $(a \in S_\infty)$ 能表为 $\delta(b)$, 而 $b \in R_\infty$, 故此时 $R_\infty \to S_\infty$ 满.

反之设 $R_\infty \to S_\infty$ 满. 取 $\left(a, \frac{b}{f^n}\right) \in \ker(\lambda - \rho)$, 则 $f^n a - \varphi(b) \in S_\infty$, 故存在 $c \in R_\infty$ 使得 $f^n a - \varphi(b) = \varphi(c)$. 命 $b' = b + c$, 则 $\varphi(b') = f^n a \in f^n S$ 蕴涵 $b' \in f^n R$, 写作 $b' = f^n b''$. 观察到

$$\frac{b}{f^n} = \frac{b'}{f^n} = \frac{b''}{1}, \quad \frac{\varphi(b'')}{1} = \frac{\varphi(b')}{f^n} = \frac{a}{1}.$$

表 $\varphi(b'') - a \in S_\infty$ 为 $\varphi(d)$, 其中 $d \in R_\infty$, 综上可得 $\left(a, \frac{b}{f^n}\right) = \delta(b'' - d)$.

(ii). 对满同态 $\lambda - \rho$ 取 $(\cdot) \underset{R}{\otimes} S$ 即得 $\mathrm{id}_N \otimes (\lambda - \rho)$ 的满性. 前半部的其余论证和 (i) 相同; 留意到 $R/f^n R \xrightarrow{\sim} S/f^n S$ 蕴涵 $N/f^n N \xrightarrow{\sim} N_S/f^n N_S$ 即可.

当 $(R \to S, f)$ 是粘合对时, 对正合列 (8.7.1) 取 $N \underset{R}{\otimes} (\cdot)$ 并应用张量积的右正合性可得后半部. □

例 8.7.8 (完备化的情形) 一个关键实例是取 S 为 R 的 f-进完备化 $\widehat{R}$, 而 $\varphi : R \to \widehat{R}$ 为典范同态. 此时:

- ◇ 对命题 8.3.4 (ii) 代入 $I = (f)$ 可知约定 8.7.6 中的 $R/f^n R \xrightarrow{\sim} \widehat{R}/f^n \widehat{R}$ 成立, 而引理 8.7.7 (i) 表明 $(R \to \widehat{R}, f)$ 是粘合对当且仅当 $R_\infty \to \widehat{R}_\infty$ 为双射;
- ◇ 若 f 非 R 的零因子, 则它也不是 $\widehat{R} = \varprojlim_n R/f^n R$ 的零因子, 故此时 $R_\infty = 0 = \widehat{R}_\infty$, 而 $(R \to \widehat{R}, f)$ 是粘合对;
- ◇ 引理 8.7.7 (ii) 表明 N 对 $(R \to \widehat{R}, f)$ 是可粘模当且仅当 $N_\infty \to N \underset{R}{\otimes} \widehat{R}$ 为单.

由于 f-进完备化 $N \to \widehat{N}$ 通过 $N \to N \underset{R}{\otimes} \widehat{R}$ 分解, 当 $N_\infty \cap \bigcap_k f^k N = 0$ 时 N 对 $(R \to \widehat{R}, f)$ 是可粘模; 注意到此条件也相当于说 f 非 $\bigcap_k f^k N$ 的零因子.

推论 8.8.9 将进一步探讨此例.

8.8 Beauville–Laszlo 下降: 主定理

接续 §8.7 的讨论. 先纪录两则简单但有用的性质.

引理 8.8.1 给定环 R 及其理想 I. 设 S 为 R-代数, 而且环同态 $R \to S$ 对所有 $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ 皆诱导环同构 $R/I^n \to S/I^n S$. 若 R-模 N 的每个元素都被 I 的某个幂次零化, 则典范同态 $N \to N \underset{R}{\otimes} S$ 是同构.

证明 所有 $n \geq 1$ 定义 $N_n := \{x \in N : \mathrm{ann}(x) \supset I^n\}$, 则

$$N_n \simeq N_n \underset{R/I^n}{\otimes} (R/I^n) \xrightarrow{\sim} N_n \underset{R/I^n}{\otimes} (S/I^n S) \simeq N_n \underset{R}{\otimes} S.$$

由于 N 等于递增并 $\bigcup_n N_n$, 而张量积和 $\varinjlim$ 交换, 断言得证. □

引理 8.8.2 设 R 为环, $f \in R$. 若环同态 $R \to S$ 诱导同构 $R/fR \xrightarrow{\sim} S/fS$, 则 $\mathrm{Spec}(S) \sqcup \mathrm{Spec}(R[f^{-1}]) \to \mathrm{Spec}(R)$ 为满射.

证明 引理 1.10.3 (iii) 和推论 1.10.11 给出

$$\mathrm{Spec}(R/fR) \sqcup \mathrm{Spec}\left(R[f^{-1}]\right) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Spec}(R),$$

它由环同态 $R \to R/fR$ 和 $R \to R[f^{-1}]$ 诱导. 注意到 $R \to R/fR \xrightarrow{\sim} S/fS$ 等于 $R \to S \to S/fS$ 的合成, 所以 $\mathrm{Spec}(R/fR)$ 在 $\mathrm{Spec}(R)$ 中的像包含于 $\mathrm{Spec}(S)$ 在 $\mathrm{Spec}(R)$ 在 $\mathrm{Spec}(R)$ 中的像. □

回到约定 8.7.6 的框架.

引理 8.8.3 给定粘合对 $(R \xrightarrow{\varphi} S, f)$, 则:

(i) $\mathrm{Tor}_1^R(R/R_\infty, S) = 0$,

(ii) 对所有 R-模 M, 记 $C = \mathrm{coker}[M \to M[f^{-1}]]$, 则 $\mathrm{Tor}_1^R(C, S) = 0$.

证明 (i). 由于 Tor 函子和滤过 $\varinjlim$ 交换 (引理 5.3.3), 而 $R/R_\infty = \varinjlim_n R/R_n \simeq \varinjlim_{n\geq 1} f^n R$, 问题化为对所有 $n \geq 1$ 证明 $\mathrm{Tor}_1^R(f^n R, S) = 0$. 考虑 $0 \to R_n \to R \to f^n R \to 0$ 对 $\mathrm{Tor}_\bullet^R(\cdot, S)$ 的长正合列, 问题化为证 $R_n \underset{R}{\otimes} S \to S$ 为单. 引理 8.8.1 给出 $R_n \xrightarrow{\sim} R_n \underset{R}{\otimes} S$, 而粘合对的条件和引理 8.7.7 (i) 蕴涵 $\varphi|_{R_n} : R_n \to S$ 为单.

(ii). 先以 M/M_∞ 代 M, 化约到 f 非 M 的零因子而 $M \hookrightarrow M[f^{-1}]$ 的情形; 换言之, M 是 R/R_∞-模. 此时有交换图表

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "\mathrm{id}"] \arrow[d, equal] & M \arrow[r, "\mathrm{id}"] \arrow[d, hook] & M \arrow[r, "\mathrm{id}"] \arrow[d, hook] & \cdots \\
M \arrow[r, hook] \arrow[d, equal] & \frac{1}{f}M \arrow[r, hook] \arrow[d, "f"', "\wr"] & \frac{1}{f^2}M \arrow[r, hook] \arrow[d, "f^2"', "\wr"] & \cdots \\
M \arrow[r, "f"'] & M \arrow[r, "f"'] & M \arrow[r, "f"'] & \cdots
\end{tikzcd}$$

对前两行之间的同态取 $\varinjlim$ 给出 $M \hookrightarrow M[f^{-1}]$, 故 $C = M[f^{-1}]/M \simeq \varinjlim_{n\geq 0} M/f^n M$, 其中 $M/f^n M \xrightarrow{f} M/f^{n+1}M$. 运用滤过 $\varinjlim$ 将问题化为证

$$\mathrm{Tor}_1^R(M/f^n M, S) = 0.$$

先考虑特例 $M = R/R_\infty$. 此时引理 8.8.1 和粘合对的性质 $R_\infty \xrightarrow{\sim} S_\infty$ (引理 8.7.7 (i)) 导致 $M \underset{R}{\otimes} S \simeq S/S_\infty$. 短正合列 $0 \to M \xrightarrow{f^n} M \to M/f^n M \to 0$ 诱导正合列

$$\mathrm{Tor}_1^R(M, S) \to \mathrm{Tor}_1^R(M/f^n M.S) \to S/S_\infty \xrightarrow{f^n} S/S_\infty \to \frac{S/S_\infty}{f^n(S/S_\infty)} \to 0.$$

左端因 (i) 而为零, 标为 f^n 的同态为单, 因此 $\mathrm{Tor}_1^R(M/f^n M, S) = 0$.

对于一般情形, 取自由 R/R_∞-模 F 及满同态 $F \twoheadrightarrow M$, 得到短正合列

$$0 \to K \to F/f^n F \to M/f^n M \to 0;$$

对每一项应用引理 8.8.1, 可见此列 $(\cdot) \underset{R}{\otimes} S$ 仍正合, 和 Tor 函子的长正合列比较可见 $\mathrm{Tor}_1^R(F/f^n F, S) \to \mathrm{Tor}_1^R(M/f^n M, S)$ 满, 但已知 $\mathrm{Tor}_1^R(F/f^n F, S) = 0$. 断言得证. □

定理 8.8.4 设 $(R \to S, f)$ 为粘合对. 记定义 8.7.2 中的函子 B 在可粘模子范畴 $R\text{-Mod}'$ 上的限制为 B', 则 $\mathrm{B}' : R\text{-Mod}' \to \mathrm{Desc}_{R \to S, f}$ 是以 L 为拟逆函子的范畴等价, 而等价中的同构 $\mathrm{id} \xrightarrow{\sim} \mathrm{LB}'$ 可取为 (8.7.2) 中的 $\mathrm{id} \otimes \delta$.

证明 给定下降资料 $\mathbf{M}$, 命 $N = \mathrm{L}(\mathbf{M})$. 鉴于定义–命题 8.7.5, 证 N 对 $(R \to S, f)$ 为可粘模, 而且有典范同构 $\mathbf{M} \simeq \mathrm{B}(N)$ 即可.

记定义 8.7.2 中的同态 $M \oplus M^\circ \to M[f^{-1}]$ 为 d, 则 $N = \ker(\mathrm{d})$. 先来证 d 满. 对于 $z \in M[f^{-1}]$, 表 $\alpha(z)$ 为 $\sum_i y_i \otimes s_i$, 其中 $y_i \in M^\circ$ 而 $s_i \in S$. 将每个 $\alpha^{-1}(y_i \otimes 1)$ 写成 $\frac{y_i'}{f^n}$, 其中 $y_i' \in M$ 而 n 是常数, 再将 s_i 写成 $f^n b_i - \varphi(a_i)$, 其中 $a_i \in R$ 而 $b_i \in S$. 取 $x = \sum_i b_i y_i' \in M$ 和 $y = \sum_i a_i y_i \in M^\circ$, 则易见 $\mathrm{d}(x, y) = \frac{x}{1} - \alpha^{-1}(y \otimes 1) = z$.

于是有短正合列 $0 \to N \to M \oplus M^\circ \xrightarrow{\mathrm{d}} M[f^{-1}] \to 0$. 以下证明第一段同态的两个分量分别诱导同构 $N_S \xrightarrow{\sim} M$ 和 $N[f^{-1}] \xrightarrow{\sim} M^\circ$. 承认这点, 并对照 (8.7.2), 便可见 N 是可粘模而 $\mathbf{M} \simeq \mathrm{B}(N)$, 从而完成证明.

观察到 $N = \ker(\mathrm{d})$ 和 $M \oplus 0 \simeq M$ 的交为 $\{x \in M : \frac{x}{1} = 0\} = M_\infty$. 因为 f 非 M° 的零因子, 先前短正合列的第一段同态诱导 $N_\infty \xrightarrow{\sim} M_\infty$. 对 M 取商得到短正合列

$$0 \longrightarrow N/N_\infty \longrightarrow M^\circ \xrightarrow{\text{来自 } \alpha^{-1}} M[f^{-1}]/M \longrightarrow 0. \tag{8.8.1}$$

应用正合函子 $(\cdot)[f^{-1}]$ 遂有 $N[f^{-1}] \xrightarrow{\sim} M^\circ$.

引理 8.8.3 (ii) 进一步蕴涵对 (8.8.1) 取 $(\cdot) \underset{R}{\otimes} S$ 仍正合, 按 $\alpha : M[f^{-1}] \xrightarrow{\sim} (M^\circ)_S$ 和引理 8.8.1 表作

$$0 \longrightarrow (N/N_\infty)_S \xrightarrow{\text{来自 } N \to M} M[f^{-1}] \xrightarrow{\text{商同态}} M[f^{-1}]/M \longrightarrow 0. \tag{8.8.2}$$

今考虑 R-模同态 $N \to M$ 诱导的行正合交换图表

$$\begin{tikzcd} (N_\infty)_S \arrow[r] \arrow[d] & N_S \arrow[r] \arrow[d] & (N/N_\infty)_S \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ 0 \arrow[r] & M_\infty \arrow[r] & M \arrow[r] & M/M_\infty \arrow[r] & 0. \end{tikzcd}$$

右路竖直箭头依 (8.8.2) 而为同构; 左路依引理 8.8.1 和已有的 $N_\infty \xrightarrow{\sim} M_\infty$ 而为同构. 追图或应用五项引理 [8, 命题 2.3.4] 知中路亦为同构. 明所欲证. □

注记 8.8.5 (平坦情形) 若进一步要求 $R \to S$ 平坦, 则以命题 5.2.2 在每个素理想处检验可知 $\delta : R \to S \times R[f^{-1}]$ 亦平坦, 于是注记 8.7.4 说明 $R\text{-}\mathsf{Mod}' = R\text{-}\mathsf{Mod}$. 进一步, 定理 5.5.4 和引理 8.8.2 蕴涵 δ 忠实平坦. 此时定理 8.8.4 的范畴等价可以诠释为平坦下降的另一种形式, 见 §5.6.

接着记录函子 B 所保持的若干模论性质. 依序是模的非零, 有限生成, 平坦和有限生成投射性质.

命题 8.8.6 在约定 8.7.6 的场景中, 给定 R-模 N, 则:

(i) 若 $N \neq 0$, 则 $N \underset{R}{\otimes} (S \oplus R[f^{-1}]) \neq 0$;

(ii) R-模 N 有限生成当且仅当 $S \times R[f^{-1}]$-模 $N \underset{R}{\otimes} (S \times R[f^{-1}])$ 有限生成.

证明 (i). 若 $N \neq 0$ 而 $N \underset{R}{\otimes} R[f^{-1}] = 0$, 则 N 的每个元素都被 f 的某个幂次零化, 因此引理 8.8.1 蕴涵 $N \underset{R}{\otimes} S \simeq N$ 非零.

(ii). 证明 "当" 的方向即可. 可取 $S \times R[f^{-1}]$-模 $N \underset{R}{\otimes} (S \times R[f^{-1}])$ 的生成元 $x_1 \otimes (y_1, z_1), \ldots, x_n \otimes (y_n, z_n)$. 取 $x_1, \ldots, x_n$ 对应的 R-模同态 $R^{\oplus n} \to N$, 其余核与 $(S \times R[f^{-1}])$ 的张量积为 0, 故 (i) 蕴涵余核为 0, 亦即 $x_1, \ldots, x_n$ 生成 N. □

引理 8.8.7 设 $(R \to S, f)$ 为粘合对. 对于任意 R-模 N, 记 $\tilde{N} := \mathrm{LB}(N)$, 则伴随对的单位 $\eta_N : N \to \tilde{N}$ 诱导同构 $N_S \xrightarrow{\sim} \tilde{N}_S$ 和 $N[f^{-1}] \xrightarrow{\sim} \tilde{N}[f^{-1}]$, 而且 η_N 为满.

证明 定理 8.8.4 表明 $\tilde{N}$ 是可粘模, 并给出范畴等价 $\mathrm{B}' : R\text{-}\mathsf{Mod}' \to \mathrm{Desc}_{R \to S, f}$, 以 B 的右伴随 L 作为拟逆. 因为 L 全忠实, 范畴常识 (见 [7, 第二章习题 8] 及其提示) 确保伴随对的余单位 $\varepsilon : \mathrm{BL} = \mathrm{B'L} \to \mathrm{id}$ 是同构. 于是 $\varepsilon_{\mathrm{B}(N)} : \mathrm{B}(\tilde{N}) = \mathrm{BLB}(N) \xrightarrow{\sim} \mathrm{B}(N)$; 伴随对的三角等式 [7, 引理 2.6.4] 蕴涵 $\varepsilon_{\mathrm{B}(N)} \circ \mathrm{B}\eta_N = \mathrm{id}$, 故 $\mathrm{B}\eta_N$ 亦为同构, 证出第一部分.

基于 $\tilde{N}$ 可粘和引理 8.7.7 (ii), 从 $\eta_N : N \to \tilde{N}$ 得到行正合交换图表

$$\begin{tikzcd} & N \arrow[r] \arrow[d] & N_S \oplus N[f^{-1}] \arrow[r] \arrow[d] & N_S[f^{-1}] \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \tilde{N} \arrow[r] & \tilde{N}_S \oplus \tilde{N}[f^{-1}] \arrow[r] & \tilde{N}_S[f^{-1}] \arrow[r] & 0. \end{tikzcd}$$

根据先前讨论, 中路和右路为同构, 故蛇形引理蕴涵左路为满, 证出第二部分. □

命题 8.8.8 设 $(R \to S, f)$ 为粘合对, 而 N 是任意 R-模, 则 N 是平坦 (或有限生成投射) R-模当且仅当 N_S 和 $N[f^{-1}]$ 分别是平坦 (或有限生成投射) S-模和 $R[f^{-1}]$-模.

证明 处理 "仅当" 方向即可. 以下先证平坦性的版本. 首先运用引理 8.8.7 的同态 $N \to \tilde{N}$, 记其核为 K; 若断言对可粘模 $\tilde{N}$ 成立, 则 $\mathrm{Tor}_1^R(\tilde{N}, \cdot) = 0$, 故短正合列

$$0 \to K \to N \to \tilde{N} \to 0$$

导致 $K \underset{R}{\otimes} \left(S \oplus R[f^{-1}]\right) = 0$, 命题 8.8.6 (i) 蕴涵 $K = 0$. 由此知 $N \simeq \tilde{N}$ 平坦.

以下不妨设 N 可粘. 对于所有 R-模 N', 兹断言 f 在 $\mathrm{Tor}_i^R(N_S, N')$ 上的乘法在 $i = 1$ 时为单自同态, 在 $i \geq 2$ 时为自同构. 先看特例 $N = R$. 因为 R 和 $R[f^{-1}]$ 皆平坦, 短正合列 (8.7.1) 对 $\mathrm{Tor}_\bullet^R(\cdot, N')$ 的长正合列导致

$$\mathrm{Tor}_1^R(S, N') \hookrightarrow \mathrm{Tor}_1^R(S[f^{-1}], N'), \quad \forall j \geq 2,\ \mathrm{Tor}_j^R(S, N') \xrightarrow{\sim} \mathrm{Tor}_j^R(S[f^{-1}], N').$$

对 N' 取平坦解消可见 $\mathrm{Tor}_i^R(S[f^{-1}], N') \simeq \mathrm{Tor}_i^R(S, N')[f^{-1}]$ 对所有 j 成立, 特例得证.

对于一般情形, N_S 是平坦 S-模导致 $\mathrm{Tor}_i^R(N_S, N') \simeq N_S \underset{S}{\otimes} \mathrm{Tor}_i^R(S, N')$, 其方法类似上一段. 表平坦 S-模 N_S 为有限秩自由模的滤过 $\varinjlim$ (定理 5.9.2), 可见此时断言仍成立.

在此基础上, 将 (8.7.2) 和任意 R-模 N' 作张量积, 谨记 $N[f^{-1}]$ 是平坦 R-模, 可知长正合列包括

$$\begin{aligned}\mathrm{Tor}_2^R(N_S, N') \to \mathrm{Tor}_2^R\left(N_S[f^{-1}], N'\right) \to \\ \mathrm{Tor}_1^R(N, N') \to \mathrm{Tor}_1^R(N_S, N') \to \mathrm{Tor}_1^R\left(N_S[f^{-1}], N'\right).\end{aligned}$$

由于 $\mathrm{Tor}_i^R(N_S[f^{-1}], N') \simeq \mathrm{Tor}_i^R(N_S, N')[f^{-1}]$, 而以上首末两段同态按此等同于 R-模的局部化, 关于 f 乘法作用的断言蕴涵首段满而末段单. 综上, $\mathrm{Tor}_1^R(N, N') = 0$. 这说明 N 确实是平坦 R-模.

对于有限生成投射的版本, 投射条件蕴涵 N_S 和 $N[f^{-1}]$ 有限展示, 而命题 8.8.6 (ii) 蕴涵 N 有限生成. 取 $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ 和短正合列 $0 \to K \to R^{\oplus n} \to N \to 0$. 因为上一步确保 N 平坦, 此列与 S 和 $R[f^{-1}]$ 的张量积仍然正合, 由此知 K_S 和 $K[f^{-1}]$ 均为有限生成. 因此命题 8.8.6 (ii) 蕴涵 K 有限生成, 继而 N 有限展示. 代入命题 5.7.4 可知 N 为有限生成投射模. □

如果 $f \in R$ 对 R-模 N 给出单同态 $N \xrightarrow{f} N$, 则也称 N 为 f-无挠的. 现在可以表述 Beauville–Laszlo 下降定理在 [1] 中的原初形式.

推论 8.8.9 (A. Beauville, Y. Laszlo) 设 f 为环 R 的非零因子, 记 R 的 f-进完备化为 $\widehat{R}$, 则:

(i) $(R \to \widehat{R}, f)$ 是粘合对, 任何 f-无挠的 R-模 N 皆为可粘模, 而定义 8.7.2 的函子 $\mathrm{B} : R\text{-}\mathsf{Mod}' \to \mathrm{Desc}_{R \to \widehat{R}, f}$ 是以 L 为拟逆函子的范畴等价;

(ii) 设 N 为任意 R-模, 则 N 是平坦 (或有限生成投射) R-模当且仅当 N_S 和 $N[f^{-1}]$ 分别是平坦 (或有限生成投射) S-模和 $R[f^{-1}]$-模.

(iii) 对于 $\mathrm{Desc}_{R \to \widehat{R}, f}$ 的对象 $\mathbf{M} = (M, M^\circ, \alpha)$, 若 M 是 f-无挠的, 则 $\mathrm{L}(\mathbf{M})$ 亦然.

证明 (i). 关于粘合对与可粘模的部分来自例 8.7.8, 其余来自定理 8.8.4.

(ii) 不过是复述命题 8.8.8.

(iii). 按定义 $\mathrm{L}(\mathbf{M})$ 是 $M \oplus M^\circ$ 的 R-子模, 而 M° 为 f-无挠. □

Beauville–Laszlo 下降的特色在于容许非 Noether 环. 若 R 为 Noether 环, 则命题 8.4.1 (iii) 确保 $R \to \widehat{R}$ 平坦. 此时注记 8.7.4 表明 $R\text{-}\mathsf{Mod}' = R\text{-}\mathsf{Mod}$, 而注记 8.8.5 将推论 8.8.9 诠释为平坦下降的特例.

习题

1. 设 $\mathfrak{m}$ 为环 R 的极大理想, 记 R 的 $\mathfrak{m}$-进完备化为 $\widehat{R}$. 对于 R-模 M, 记 M (或 $M_\mathfrak{m}$) 的 $\mathfrak{m}$-进 (或 $\mathfrak{m}R_\mathfrak{m}$-进) 完备化为 $\widehat{M}$ (或 $\widehat{M_\mathfrak{m}}$), 说明存在唯一的连续同构 $\widehat{M} \xrightarrow{\sim} \widehat{M_\mathfrak{m}}$ 使得图表

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r] \arrow[d] & M_\mathfrak{m} \arrow[d] \\ \widehat{M} \arrow[r, "\sim"] & \widehat{M_\mathfrak{m}} \end{tikzcd}$$

在 $R\text{-}\mathsf{Mod}$ 中交换.

提示 唯一性缘于 M 在 $\widehat{M}$ 中的像稠密. 存在性归结为说明自明同态 $M/\mathfrak{m}^n M \to M_\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^n M_\mathfrak{m}$ 对所有 $n \geq 1$ 皆为同构, 证所有 $r \in R \smallsetminus \mathfrak{m}$ 在 $M/\mathfrak{m}^n M$ 上的乘法皆可逆即可.

2.

3. 试补全注记 8.8.5 的细节.

第九章 Koszul 复形

9.1 链复形的张量积

本节选定环 R. 回忆约定 1.4.7 对链复形和上链复形的记法, 以及其间的切换方式.

约定 9.1.1 今后的链复形和上链复形均默认为由 R-模构成. 张量积 $\underset{R}{\otimes}$ 将简记为 $\otimes$. 记链复形范畴为 $\mathsf{Ch}(R)$, 记复形范畴为 $\mathsf{C}(R)$.

由 [8, 命题 3.6.1] 知 $\mathsf{Ch}(R)$ (或 $\mathsf{C}(R)$) 是 Abel 范畴, 其中任一列同态正合当且仅当它逐项地正合. 任何 R-模都可以视同集中在零次项的链复形 (或上链复形), R-Mod 按此嵌入为 $\mathsf{Ch}(R)$ (或 $\mathsf{C}(R)$) 的子 Abel 范畴.

兹说明如何将 R-模的张量积运算延拓到复形. 以下涉及的双复形语言见诸 [8, §3.5], 但此处还需要其链复形版本.

定义 9.1.2 (链复形的张量积) 设 $X_\bullet$ 和 $Y_\bullet$ 为链复形. 定义链双复形

$$X_\bullet \otimes Y_\bullet := X_\bullet \underset{R}{\otimes} Y_\bullet = (X_p \otimes Y_q)_{p,q\in\mathbb{Z}},$$

其中的同态 $X_p \otimes Y_q \to X_{p-1} \otimes Y_q$ 和 $X_p \otimes Y_q \to X_p \otimes Y_{q-1}$ 分别是 $d_p^X \otimes \mathrm{id}$ 和 $\mathrm{id} \otimes d_q^Y$. 以直和取相应的链全复形

$$(X \otimes Y)_\bullet := \mathrm{tot}_\oplus(X_\bullet \otimes Y_\bullet),$$
$$(X \otimes Y)_n = \bigoplus_{p+q=n} X_p \otimes Y_q,$$

其中 $d_n : (X \otimes Y)_n \to (X \otimes Y)_{n-1}$ 的定义是

$$d_n(x \otimes y) = d_p^X(x) \otimes y + (-1)^p x \otimes d_q^Y(y), \quad p+q=n, \quad x \in X_p,\ y \in Y_q.$$

称此为 $X_\bullet$ 和 $Y_\bullet$ 的张量积. 不致混淆时, 经常省略下标, 将这些链复形记如 X, Y, $X \otimes Y$.

上述定义实则是 [8, 定义–命题 3.5.10] 对双函子 $\otimes$ 的应用.

张量积显然给出函子 $\mathsf{Ch}(R) \times \mathsf{Ch}(R) \to \mathsf{Ch}(R)$. 当 X 和 Y 都是置于零次项的 R-模时, 上述定义化为 R-模的张量积.

给定链复形 X, Y 和 Z, 有以下典范同构:

- ▷ **结合约束** $(X \otimes Y) \otimes Z \simeq X \otimes (Y \otimes Z)$,
- ▷ **幺约束** $R \otimes X \simeq X \simeq X \otimes R$,
- ▷ **交换约束** $X \otimes Y \simeq Y \otimes X$, 映 $x \otimes y$ 为 $(-1)^{pq} y \otimes x$, 其中 $x \in X_p$ 而 $y \in Y_q$.

一旦展开全复形的定义 [8, 定义 3.5.4], 并回忆到张量积保持直和, 则这些不外是 R-模张量积的结合约束, 幺约束和交换约束. 它们使得 $\mathsf{Ch}(R)$ 对 $\otimes$ 成为对称幺半范畴, 以 R 为幺对象; 详见 [8, §7.2], 但该处是对一般的上链复形表述的.

幺半范畴 $\mathsf{Ch}(R)$ 上的代数 [8, 定义 7.1.1] 又称为 R 上的**微分分次代数**或 **dg-代数**, 亦见 [8, 定义 7.2.1]; 它们是资料 (A, μ, η), 其中 A 是链复形, $\mu : A \to A \otimes A$ 和 $\eta : R \to A$ 都是复形之间的同态, 要求使下列图表交换:

$$\begin{tikzcd} R \otimes A \arrow[r, "\eta\otimes\mathrm{id}"] \arrow[dr, "\sim"'] & A \otimes A \arrow[d, "\mu"] & A \otimes R \arrow[l, "\mathrm{id}\otimes\eta"'] \arrow[dl, "\sim"] \\ & A & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} (A \otimes A) \otimes A \arrow[rr, "\sim"'] \arrow[d, "\mu\otimes\mathrm{id}"'] & & A \otimes (A \otimes A) \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes\mu"] \\ A \otimes A \arrow[r, "\mu"'] & A & A \otimes A. \arrow[l, "\mu"] \end{tikzcd}$$

若进一步要求有交换图表

$$\begin{tikzcd} A \otimes A \arrow[rr, "\sim"] \arrow[dr, "\mu"'] & & A \otimes A \arrow[dl, "\mu"] \\ & A & \end{tikzcd}$$

其水平箭头是交换约束, 则称 (A, μ, η) 是交换微分分次代数或交换 dg-代数, 见 [8, 定义 7.1.5]. 注意到 μ (或 η) 给出 A 上的二元运算 $A \times A \to A$ (或 A 的元素 $1_A = \eta(1)$), 它们使分次 R-模 $\bigoplus_n A_n$ 成为分次 R-代数 (未必交换). 依此, dg-代数 A 的交换性等价于环 A 对乘法的**分次交换律**[1), 表为

$$x \in A_p,\ y \in A_q \implies xy = (-1)^{pq} yx. \tag{9.1.1}$$

在这些基础上, 还能进一步探讨任意 dg-代数 A 上的**微分分次模**或 **dg-模**, 见 [8, 定义 7.1.2]; 它们是资料 (M, μ_M), 其中 M 是链复形而 $\mu_M : A \otimes M \to M$ 是使得下图

1)所以交换 dg-代数也属于交换环论的题中之义.

交换的同态

$$
\begin{tikzcd}
R\otimes M \arrow[r, "\eta\otimes\mathrm{id}"] \arrow[dr, "\sim"'] & A\otimes M \arrow[d, "\mu_M"] \\
& M
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
(A\otimes A)\otimes M \arrow[rr, "\sim"] \arrow[d, "\mu\otimes\mathrm{id}"'] & & A\otimes(A\otimes M) \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes\mu_M"] \\
A\otimes M \arrow[r, "\mu_M"'] & M & A\otimes M. \arrow[l, "\mu_M"]
\end{tikzcd}
$$

精确地说, 上述定义应当称为左模, 同理可定义右模和双模, 但对于交换 dg-代数 A 不必区分左模和右模.

接着回顾 Hom 复形的链复形版本.

定义 9.1.3 (Hom 链复形) 设 $X_\bullet$ 和 $Y_\bullet$ 为链复形, 也分别简记为 X 和 Y. 按照 [8, 例 3.5.12] 的链复形版本, 定义链双复形 $\mathrm{Hom}_{\bullet,\bullet}(X,Y)$ 使得

$$\mathrm{Hom}_{p,q}(X,Y)=\mathrm{Hom}_R\left(X_{-q},Y_p\right),\quad p,q\in\mathbb{Z},$$

其中

- ◇ 同态 $\mathrm{Hom}_{p,q}(X,Y)\to\mathrm{Hom}_{p-1,q}(X,Y)$ 定义为 $f\mapsto d_p^Y f$,
- ◇ 同态 $\mathrm{Hom}_{p,q}(X,Y)\to\mathrm{Hom}_{p,q-1}(X,Y)$ 定义为 $f\mapsto(-1)^{q-1}fd^X_{-q+1}$.

以直积取相应的全复形

$$\mathrm{Hom}_\bullet(X,Y):=\mathrm{tot}_{\prod}\mathrm{Hom}_{\bullet,\bullet}(X,Y).$$

这给出函子 $\mathsf{Ch}(R)^{\mathrm{op}}\times\mathsf{Ch}(R)\to\mathsf{Ch}(R)$. 若将 X 和 Y 切换到上链复形, 对双复形亦如是切换, 则定义 9.1.3 化为 [8, 例 3.5.12] 的构造, 而该处已证明 $\mathrm{Hom}_\bullet(X,Y)$ 确实等同于从 X 到 Y 的 Hom 复形 [8, 注记 3.2.10].

给定链复形 X, Y 和 Z, 有以下典范同构:

▷ **伴随关系** $\quad\mathrm{Hom}_\bullet(X\otimes Y,Z)\simeq\mathrm{Hom}_\bullet\left(X,\mathrm{Hom}_\bullet(Y,Z)\right)$,

▷ **幺约束** $\quad\mathrm{Hom}_\bullet(R,Z)\simeq Z$.

张量积和 Hom 复形的伴随关系见诸 [8, 命题 4.12.6 和例 4.12.14]; 简言之, 它在每个项上都化为 R-模的张量积和 Hom 模的伴随关系. 另一方面, Hom 复形的幺约束是平凡的.

若在伴随关系的两边同取链复形的 $\ker(d_0)$, 便有 R-模的典范同构

$$\mathrm{Hom}_{\mathsf{Ch}(R)}\left(X\otimes Y,Z\right)\simeq\mathrm{Hom}_{\mathsf{Ch}(R)}\left(X,\mathrm{Hom}_\bullet(Y,Z)\right),\tag{9.1.2}$$

稍后还需要以下性质.

引理 9.1.4 给定链复形 X, Y, Z, 设 X 有界, 则自明的 R-模同态族

$$\Theta_{p,q,r} : \mathrm{Hom}_R(X_{-q}, Y_p) \otimes Z_r \to \mathrm{Hom}_R(X_{-q}, Y_p \otimes Z_r), \quad p, q, r \in \mathbb{Z}$$

组成 $\mathsf{Ch}(R)$ 中的典范同态

$$\Theta : \mathrm{Hom}_\bullet(X, Y) \otimes Z \to \mathrm{Hom}_\bullet(X, Y \otimes Z);$$

若进一步要求每个 X_{-q} 都是有限秩自由 R-模, 则 Θ 是同构.

证明 易见 $(\Theta_{p,q,r})_{p,q,r}$ 给出三重复形 [8, 注记 3.5.7] 之间的同态; 对三重复形按照先结合下标 (p, q) 或 (p, r) 这两种方式取全复形 $\mathrm{tot}_\oplus$, 其产物典范地同构. 由于 X 有界, 按 $\mathrm{tot}_\oplus$ 取全复形仍给出 $\mathrm{Hom}_\bullet(X, \cdots)$, 由此可得 $\mathsf{Ch}(R)$ 中的同态 Θ.

进一步要求每个 X_{-q} 都是有限秩自由 R-模, 则立见 $\Theta_{p,q,r}$ 恒为同构, 故 Θ 为同构. □

9.2 外代数

继续选定环 R 并沿用约定 9.1.1. 对于任意 R-模 L, 其**外代数**和**对称代数** [7, 定义 7.6.1] 分别记为

$$\bigwedge L := \bigoplus_{n \geq 0} \bigwedge^n L, \qquad \mathrm{Sym}\, L := \bigoplus_{n \geq 0} \mathrm{Sym}^n L,$$

两者皆由泛性质刻画 (见 [7, 命题 7.6.5]), 因此对 L 皆具函子性. 外代数 $\bigwedge L$ (或对称代数 $\mathrm{Sym}\, L$) 的具体构造是张量代数 $\bigoplus_{n \geq 0} L^{\otimes n}$ 对所有齐次元

$$\cdots \otimes x \otimes x \otimes \cdots, \quad x \in L$$
$$(\text{或}\ \cdots \otimes (x \otimes y - y \otimes x) \otimes \cdots, \quad x, y \in L)$$

生成的分次理想之商; 注意到 $\bigwedge^0 L = R = \mathrm{Sym}^0 L$. 记 $\bigwedge L$ (或 $\mathrm{Sym}\, L$) 的乘法运算为 $\wedge$ (或 $\cdot$). 构造表明 $\bigwedge^m L$ (或 $\mathrm{Sym}^m L$) 的元素都是形如 $x_1 \wedge \cdots \wedge x_m$ (或 $x_1 \cdots x_m$) 的元素之 R-线性组合, 其中 $x_1, \ldots, x_m \in L$.

作为环, $\mathrm{Sym}\, L$ 总是交换的, 而 $\bigwedge L$ 鲜少交换; 但 $\bigwedge L$ 满足 (9.1.1) 的分次交换律以及 $x \wedge x = 0$, 其中 $x \in L$.

本章主要考虑外代数, 但在个别场合也涉及对称代数.

注记 9.2.1 设 L 为自由 R-模, $\mathcal{B}$ 为 L 的一组基, 则 $\bigwedge^m L$ 对所有 m 都是自由 R-模: 事实上, [7, 推论 7.6.9] 表明若 $\mathcal{B}$ 赋有全序 $\leq$, 则所有满足 $b_1 < \cdots < b_m$ 的 $b_1 \wedge \cdots \wedge b_m$ 构成 $\bigwedge^m L$ 的一组基, 而这些元素之间的 $\wedge$ 乘法容易按此描述. 当 $n := |\mathcal{B}|$ 有限时, 以上也表明 $\bigwedge^m L$ 非零当且仅当 $0 \leq m \leq n$, 而且 $\bigwedge^n L \simeq R$.

定义 9.2.2 给定 R-模 L 和 $u \in \mathrm{Hom}_R(L, R)$, 相应的缩并同态

$$\iota(u) : \bigwedge^{n+1} L \to \bigwedge^n L, \quad n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$$

依外代数的泛性质定义为

$$\iota(u)(x_0 \wedge \cdots \wedge x_n) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i u(x_i) \cdot x_0 \wedge \cdots \widehat{x_i} \cdots \wedge x_n,$$

其中 $x_0, \ldots, x_n \in L$, 而 $\widehat{x_i}$ 代表省略 x_i 项.

例行的验证给出 $\iota(u) \circ \iota(u) = 0$, 这使 $\bigwedge L$ 成为复形.

定义 9.2.3 给定 R-模 L 和 $u \in \mathrm{Hom}_R(L, R)$, 相应的 Koszul 复形定义为链复形

$$\mathrm{K}(u) := \left[\cdots \xrightarrow{\iota(u)} \bigwedge^{n+1} L \xrightarrow{\iota(u)} \bigwedge^n L \xrightarrow{\iota(u)} \cdots \xrightarrow{\iota(u)} R \right],$$

其中 R 置于 0 次项, 然后按零延拓到次数 < 0 的部分.

注意到 $\mathrm{H}_0(\mathrm{K}(u)) = \mathrm{coker}(u)$.

命题 9.2.4 (同伦公式) 给定 $u \in \mathrm{Hom}_R(L, R)$, 设 $x \in L$ 而 $\omega \in \bigwedge L$, 则有

$$\iota(u)(x \wedge \omega) + x \wedge (\iota(u)(\omega)) = u(x)\omega.$$

证明 由于两边对 ω 均为 R-线性的, 不妨设 $\omega = x_1 \wedge \cdots \wedge x_n$, 其中 $x_i \in L$. 记 $x_0 := x$. 左式第一项等于

$$\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \cdot u(x_i) \cdots \wedge \widehat{x_i} \wedge \cdots,$$

而第二项等于

$$\sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} \cdot u(x_i) x_0 \wedge \cdots \wedge \widehat{x_i} \wedge \cdots,$$

其中符号 $\widehat{x_i}$ 代表该项省略. 对应到 $i > 0$ 的项相消, 从而剩下 $u(x_0)x_1 \wedge \cdots \wedge x_n = u(x)\omega$. □

推论 9.2.5 给定 $u \in \mathrm{Hom}_R(L, R)$, 设 $\eta \in \bigwedge^m L$ 而 $\omega \in \bigwedge^n L$, 则

$$\iota(u)(\eta \wedge \omega) = \iota(u)(\eta) \wedge \omega + (-1)^m \eta \wedge \iota(u)(\omega).$$

因此复形 $\mathrm{K}(u)$ 是交换 dg-代数.

证明 当 $m=0$ 时所求等式平凡. 当 $m\geq 1$ 时, 不妨设 $\eta = x\wedge\eta_0$, 其中 $x\in L$ 而 $\eta_0\in\bigwedge^{m-1}L$, 则命题 9.2.4 和递归给出

$$\begin{aligned}\iota(u)(\eta\wedge\omega) &= \iota(u)(x\wedge(\eta_0\wedge\omega)) = u(x)\eta_0\wedge\omega - x\wedge\iota(u)(\eta_0\wedge\omega)\\ &= u(x)\eta_0\wedge\omega - x\wedge\iota(u)(\eta_0)\wedge\omega-(-1)^{m-1}x\wedge\eta_0\wedge\iota(u)(\omega)\\ &= (u(x)\eta_0 - x\wedge\iota(u)(\eta_0))\wedge\omega+(-1)^m\eta\wedge\iota(u)(\omega)\\ &= \iota(u)(\eta)\wedge\omega+(-1)^m\eta\wedge\iota(u)(\omega).\end{aligned}$$

回顾全复形的定义, 可见上式表明外代数的乘法

$$\mathrm{K}(u)\otimes\mathrm{K}(u)\to\mathrm{K}(u),\quad \eta\otimes\omega\mapsto\eta\wedge\omega$$

给出复形之间的同态, 亦即 $\mathrm{K}(u)$ 是 dg-代数. 交换性是已知的. □

接着考虑 R-模 L' 和 $u'\in\mathrm{Hom}_R(L',R)$, 相应地有 $u\oplus u'\in\mathrm{Hom}_R(L\oplus L',R)$ 和链复形 $\mathrm{K}(u\oplus u')$.

推论 9.2.6 存在 dg-代数的典范同构 $\mathrm{K}(u)\otimes\mathrm{K}(u')\xrightarrow{\sim}\mathrm{K}(u\oplus u')$, 它在次数为 1 的部分是 $L\oplus L'$ 的恒等自同构, 并且由此唯一确定.

证明 根据 [7, 推论 7.6.8] 有分次 R-代数的典范同构 $\varphi:\bigwedge L\otimes\bigwedge L'\xrightarrow{\sim}\bigwedge(L\oplus L')$, 它在次数为 1 的部分是 $L\oplus L'$ 的恒等自同构; 由于同构两边作为 R-代数皆由 1 次元生成, 故这般的 φ 唯一. 精确地说, 若 $\eta\in\bigwedge^m L\subset\bigwedge^m(L\oplus L')$ 而 $\omega\in\bigwedge^n L'\subset\bigwedge^n(L\oplus L')$, 则化到 1 次项可见 $\varphi(\eta\otimes\omega)=\eta\wedge\omega\in\bigwedge^{m+n}(L\oplus L')$.

再证 φ 是复形之间的同态即可. 考虑到全复形的定义, 这相当于对如上之 η 和 ω 证明

$$\iota(u)(\eta)\wedge\omega+(-1)^m\eta\wedge\iota(u')(\omega)=\iota(u\oplus u')(\eta\wedge\omega).$$

上式中 $\iota(u)$ 和 $\iota(u')$ 不外是 $\iota(u\oplus u')$ 的限制, 所求等式归结为推论 9.2.5. □

最后设 L 为有限秩自由模. 命 $n:=\mathrm{rk}(L)\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$, 链复形 $\mathrm{K}(u)$ 的最高次非零项是 n 次项 $\bigwedge^n L$, 于是有 $\mathsf{Ch}(R)$ 中的典范同态

$$\mathrm{K}(u)\to\left(\bigwedge^n L\right)[-n],$$

右式代表将 $\bigwedge^n L$ 置于 n 次项, 其余为零; 同态在 n 次项是恒等, 其余为零同态. 将此与 $\mathrm{K}(u)$ 的 dg-代数结构 (推论 9.2.5) 给出的 $\mathrm{K}(u)\otimes\mathrm{K}(u)\to\mathrm{K}(u)$ 合成, 得到

$$\mathrm{K}(u)\otimes\mathrm{K}(u)\to\left(\bigwedge^n L\right)[-n].$$

根据 (9.1.2), 以上对应到同态

$$\mathrm{K}(u)\to\mathrm{Hom}_\bullet\left(\mathrm{K}(u),\left(\bigwedge^n L\right)[-n]\right). \tag{9.2.1}$$

引理 9.2.7 在上述情境中, (9.2.1) 是 $\mathsf{Ch}(R)$ 中的同构.

证明 已知它是 Ch(R) 中的同态, 证它逐项地是 R-模同构即可. 展开 Hom 复形定义可见当 $0 \leq m \leq n$ 时右式的 m 次项是 $\mathrm{Hom}_R\left(\bigwedge^{n-m} L, \bigwedge^n L\right)$, 其它项全为零. 对于 $0 \leq m \leq n$, 同态 (9.2.1) 映 $\eta \in \bigwedge^m L$ 为 $[\omega \mapsto \eta \wedge \omega]$; 按注记 9.2.1 的方法取 $\bigwedge L$ 的基, 可见这确实是同构. □

9.3 Koszul 复形

继续选定环 R 并沿用约定 9.1.1.

定义 9.3.1 (Koszul 复形) 给定 R-模 L 和 $u \in \mathrm{Hom}_R(L, R)$, 按定义 9.2.3 中得到链复形 $\mathrm{K}(u)$. 对于链复形 M, 命

$$\mathrm{K}_\bullet(u; M) := \mathrm{K}(u) \otimes M,$$
$$\mathrm{K}_\bullet^{\mathrm{Hom}}(u; M) := \mathrm{Hom}_\bullet(\mathrm{K}(u), M);$$

右式分别如定义 9.1.2, 9.1.3. 另记

$$\mathrm{K}^\bullet(u; M) := \mathrm{K}_\bullet^{\mathrm{Hom}}(u; M) \text{ 所对应的上链复形.}$$

虽然 $\mathrm{K}^\bullet(u; M)$ 在应用中较 $\mathrm{K}_\bullet^{\mathrm{Hom}}(u; M)$ 更常见, 但一些性质适合对后者来表述.

- ◇ 链复形 $K_\bullet(u; M)$ 自然地具有 $\mathrm{K}(u)$ 上的 dg-模结构 (见 §9.1).
- ◇ Koszul 复形的构造对 M 显然具函子性. 它对 (L, u) 也有函子性: 给定 R-模 L', 同态 $u' \in \mathrm{Hom}_R(L', R)$ 连同同态 $f : L \to L'$ 使得 $u'f = u$, 则 f 诱导 $\mathrm{K}(u) \to \mathrm{K}(u')$, 继而诱导 $\mathrm{K}_\bullet(u; M) \to \mathrm{K}_\bullet(u'; M)$ 和 $\mathrm{K}^\bullet(u'; M) \to \mathrm{K}^\bullet(u; M)$.
- ◇ 给定环同态 $R \to R'$, 取 $L' := R' \otimes L$ 和 $u' := \mathrm{id}_{R'} \otimes u \in \mathrm{Hom}_{R'}(L', R')$, 则有 Ch$(R)$ 中的同构
$$\mathrm{K}_\bullet(u', R' \otimes M) \xrightarrow{\sim} R' \otimes \mathrm{K}_\bullet(u, M). \tag{9.3.1}$$
- ◇ 设 M 和 M' 为链复形. 根据先前对张量积和 Hom 复形的讨论, 得到典范同构
$$\begin{aligned} \mathrm{K}_\bullet(u; M) \otimes M' &\xrightarrow{\sim} \mathrm{K}_\bullet\left(u; M \otimes M'\right), \\ \mathrm{Hom}_\bullet\left(M', \mathrm{K}_\bullet^{\mathrm{Hom}}(u; M)\right) &\xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_\bullet\left(\mathrm{K}_\bullet(u; M'), M\right). \end{aligned} \tag{9.3.2}$$
- ◇ 另取 R-模 L' 和 $u' \in \mathrm{Hom}_R(L', R)$, 对 (9.3.2) 代入 $M' = \mathrm{K}(u')$ 并应用推论 9.2.6 和张量积的结合约束, 遂得
$$\begin{aligned} \mathrm{K}_\bullet(u \oplus u', M) &\xrightarrow{\sim} \mathrm{K}_\bullet(u, \mathrm{K}_\bullet(u', M)), \\ \mathrm{K}_\bullet^{\mathrm{Hom}}\left(u', \mathrm{K}_\bullet^{\mathrm{Hom}}(u, M)\right) &\xrightarrow{\sim} \mathrm{K}_\bullet^{\mathrm{Hom}}(u \oplus u', M). \end{aligned} \tag{9.3.3}$$

◇ 记 $I := u(L)$, 这是 R 的理想. 对于 R-模 M, 按定义直接计算可得典范同构

$$\begin{aligned} &\mathrm{H}_0\, \mathrm{K}_\bullet(u; M) \simeq M/IM, \\ &\mathrm{H}^0\, \mathrm{K}^\bullet(u; M) \simeq \{x \in M : I \subset \mathrm{ann}(x)\}. \end{aligned} \tag{9.3.4}$$

命题 9.3.2 选定 $u \in \mathrm{Hom}_R(L, R)$, 则理想 $I := u(L)$ 零化 $\mathrm{K}_\bullet(u; M)$ (或 $\mathrm{K}^\bullet(u; M)$) 的所有同调 (或上同调) R-模.

证明 给定 $t \in I$, 命题 9.2.4 蕴涵 $\mathrm{K}(u)$ 的自同态 $\omega \mapsto t\omega$ 零伦 (见 [8, 定义 3.2.6]), 其在 $\mathrm{K}_\bullet(u; M)$ 和 $\mathrm{K}^\bullet(u; M)$ 上诱导的自同态亦然, 因而 $\omega \mapsto t\omega$ 在同调或上同调模上诱导零同态 (见 [8, 命题 3.6.6]). 易见此诱导同态正是 t 对同调或上同调模的乘法. □

命题 9.3.3 设 L 为秩 n 自由 R-模 ($n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$), 则有 $\mathsf{Ch}(R)$ 中的典范同构

$$\mathrm{K}_\bullet(u; M) \xrightarrow{\sim} \mathrm{K}_\bullet^{\mathrm{Hom}}\left(u; \left(\bigwedge\nolimits^n L\right)[-n] \otimes M\right).$$

证明 由推论 9.2.1 知 $\mathrm{K}(u)$ 有界, 且其每项都是有限秩自由 R-模. 对引理 9.2.7 的同构两边同取 $(\cdot) \otimes M$, 得到

$$\begin{aligned} \mathrm{K}(u) \otimes M &\xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_\bullet\left(\mathrm{K}(u), \left(\bigwedge\nolimits^n L\right)[-n]\right) \otimes M \\ &\xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_\bullet\left(\mathrm{K}(u), \left(\bigwedge\nolimits^n L\right)[-n] \otimes M\right), \end{aligned}$$

其中第二段同构是引理 9.1.4 中的 Θ. □

命题 9.3.4 设 $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ 是 $\mathsf{Ch}(R)$ 中的短正合列.

(i) 设 L 为投射 R-模, 则上述短正合列诱导短正合列

$$0 \to \mathrm{K}^\bullet(u; M') \to \mathrm{K}^\bullet(u; M) \to \mathrm{K}^\bullet(u; M'') \to 0;$$

(ii) 设 L 为平坦 R-模, 则上述短正合列诱导短正合列

$$0 \to \mathrm{K}_\bullet(u; M') \to \mathrm{K}_\bullet(u; M) \to \mathrm{K}_\bullet(u; M'') \to 0.$$

因此两种情形下 $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ 分别诱导上同调和同调的长正合列.

证明 对于 (i), 先说明每个 $\bigwedge^n L$ 皆是投射模: 这是因为 L 同构于某个自由模 F 的直和项, 写作 $F \simeq L \oplus L'$; 根据 [7, 推论 7.6.8] 有 $\bigwedge^n F \simeq \bigoplus_{p+q=n} \bigwedge^p L \otimes \bigwedge^q L'$, 而 $\bigwedge^n F$ 是自由模 (注记 9.2.1), 由此可见 $\bigwedge^n L$ 是自由模的直和项, 故为投射模.

对每个 $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_{\geq 0}$, 由此立见

$$0 \to \mathrm{Hom}_R\left(\mathrm{K}_q(u), M'_p\right) \to \mathrm{Hom}_R\left(\mathrm{K}_q(u), M_p\right) \to \mathrm{Hom}_R\left(\mathrm{K}_q(u), M''_p\right) \to 0$$

正合. 对于给定之 n, 对上式取直积 $\prod_{p-q=n}$ 后仍是正合列.

对于 (ii), 类似的论证将问题归结为证 $\bigwedge L$ 平坦. 定理 5.9.2 表明 L 平坦等价于它同构于某个 $\varinjlim_i F_i$, 下标 i 遍历一个滤过小范畴, 而每个 F_i 都是自由模. 由 $\bigwedge L$ 的显式构造知 $\bigwedge L \simeq \varinjlim_i \bigwedge F_i$, 而每个 $\bigwedge F_i$ 都是自由模; 再次应用定理 5.9.2 即知 $\bigwedge L$ 平坦. □

下面专注于 L 为自由模的情形. 设 $L = R^{\oplus \mathcal{A}}$, 其中 $\mathcal{A}$ 是集合; 命 $(e_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}$ 为 L 的标准基. 指定 $u \in \mathrm{Hom}_R(L, R)$ 相当于指定 R 的一族元素 $\mathbf{x} = (x_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}$, 使得 $x_\alpha = u(e_\alpha)$.

定义 9.3.5 (对一族元素的 Koszul 同调和上同调) 考虑 R 的一族元素 $\mathbf{x} = (x_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}$, 在定义 9.3.1 中取 $L := R^{\oplus\mathcal{A}}$ 和由 $\mathbf{x}$ 确定之 $u \in \mathrm{Hom}_R(L, R)$, 所得链复形记为 $\mathrm{K}(\mathbf{x}) := \mathrm{K}(u)$; 对所有链复形 M, 相应的 Koszul 链复形和上链复形分别记为 $\mathrm{K}_\bullet(\mathbf{x}; M)$ 和 $\mathrm{K}^\bullet(\mathbf{x}; M)$.

- ◇ 称 $\mathrm{H}_i(\mathbf{x}; M) := \mathrm{H}_i \, \mathrm{K}_\bullet(\mathbf{x}; M)$ 为 M 对 $\mathbf{x}$ 的第 i 次 Koszul 同调.
- ◇ 称 $\mathrm{H}^i(\mathbf{x}; M) := \mathrm{H}^i \, \mathrm{K}^\bullet(\mathbf{x}; M)$ 为 M 对 $\mathbf{x}$ 的第 i 次 Koszul 上同调.

引理 9.3.6 在上述情景中, 设 $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ 是 $\mathsf{Ch}(R)$ 中的短正合列, 则有相应的短正合列

$$\begin{aligned} 0 \to \mathrm{K}_\bullet(\mathbf{x}; M') \to \mathrm{K}_\bullet(\mathbf{x}; M) \to \mathrm{K}_\bullet(\mathbf{x}; M'') \to 0, \\ 0 \to \mathrm{K}^\bullet(\mathbf{x}; M') \to \mathrm{K}^\bullet(\mathbf{x}; M) \to \mathrm{K}^\bullet(\mathbf{x}; M'') \to 0. \end{aligned}$$

证明 因为 $L := R^{\oplus\mathcal{A}}$ 自由, 这是命题 9.3.4 的特例. □

引理 9.3.7 记 I 为 $\{x_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$ 生成的理想, 则对 $\mathbf{x}$ 的所有 Koszul 上同调 (或同调) 都被 I 零化.

证明 应用命题 9.3.2. □

例 9.3.8 记 I 如上, 则当 M 为 R-模时, (9.3.4) 给出

$$\mathrm{H}_0(\mathbf{x}; M) \simeq M/IM, \quad \mathrm{H}^0(\mathbf{x}; M) \simeq \{x \in M : I \subset \mathrm{ann}(x)\}.$$

为了更具体地了解 Koszul 同调和上同调, 对所有 $h \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, 展开定义知

$$\begin{aligned} \mathrm{K}_h(\mathbf{x}; M) &= \bigwedge^h (R^{\oplus\mathcal{A}}) \otimes M, \\ \mathrm{K}^h(\mathbf{x}; M) &= \mathrm{Hom}_R\left(\bigwedge^h (R^{\oplus\mathcal{A}}), M \right). \end{aligned}$$

对于链复形情形, 按照注记 9.2.1 的方法对所有 $h \geq 0$ 取 $\bigwedge^h (R^{\oplus\mathcal{A}})$ 取基, 便可描述 $\mathrm{K}_\bullet(\mathbf{x}; M)$.

对于上链复形的情形, 简单起见设 M 为 R-模. 基于注记 9.2.1, 当 $h \geq 1$ 时指定同态 $f : \bigwedge^h (R^{\oplus\mathcal{A}}) \to M$ 相当于对所有 $(\alpha_1, \ldots, \alpha_h) \in \mathcal{A}$ 指定 $m(\alpha_1, \ldots, \alpha_h) \in M$, 使之满足交错性质:

◇ 交换 α_i 和 α_j (其中 $1 \leq i \neq j \leq n$) 导致 $m(\alpha_1, \ldots, \alpha_h) \in M$ 变号,

◇ 若存在 $i \neq j$ 使得 $\alpha_i = \alpha_j$, 则 $m(\alpha_1, \ldots, \alpha_h) = 0$;

事实上 $m(\alpha_1, \ldots, \alpha_h) = f\left(e_{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge e_{\alpha_h}\right)$. 细节不难验证, $h = 2$ 的特例见诸 [9, 命题 15.6.13].

对所有 $h \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$, 将 $\mathrm{K}^h(\mathbf{x}; M)$ 用满足交错性质的 $m(\alpha_1, \ldots, \alpha_h) \in M$ 表达, 其中 $\alpha_1, \ldots, \alpha_h \in \mathcal{A}$, 另外注意到 $\mathrm{K}^0(\mathbf{x}; M) = \{m : m \in M\}$, 则上链复形的微分同态写作

$$\begin{aligned} \partial^h : \mathrm{K}^h(\mathbf{x}; M) &\longrightarrow \mathrm{K}^{h+1}(\mathbf{x}; M) \\ m &\longmapsto \left[(\alpha_0, \ldots, \alpha_h) \mapsto \sum_{j=0}^{h} (-1)^j x_{\alpha_j} \cdot m(\ldots, \widehat{\alpha_j}, \ldots) \right]. \end{aligned}$$

例 9.3.9 设 M 为 R-模. 记 $\{x_\alpha : \alpha \in \mathcal{A}\}$ 生成的理想为 I, 并且设 $n := |\mathcal{A}| \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, 则以上描述导致

$$\mathrm{H}^n(\mathbf{x}; M) \simeq M/IM.$$

另一方面, 直接观察 $\mathrm{K}_n(\mathbf{x}; M) \to \mathrm{K}_{n-1}(\mathbf{x}; M)$ 可见

$$\mathrm{H}_n(\mathbf{x}; M) \simeq \{x \in M : I \subset \mathrm{ann}(x)\}.$$

注意到以上分别等于例 9.3.8 求得之 $\mathrm{H}_0(\mathbf{x}; M)$ 和 $\mathrm{H}^0(\mathbf{x}; M)$. 这并非偶然, 而是稍后将介绍的命题 9.4.5 的特例.

今后主要关心 $\mathcal{A} = \{1, \ldots, n\}$ 的情形, 为此引入以下记号.

约定 9.3.10 考虑环 R 的一列元素 $x_1, \ldots, x_n$, 其中的 $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ 称为该列的长度; 记这般的列为 $\mathbf{x} = [x_1, \ldots, x_n]$, 以区别于其生成的理想 $(x_1, \ldots, x_n)$. 若 I 是给定的理想, 而每个 x_i 均属于 I, 则称 $\mathbf{x}$ 包含于 I.

注记 9.3.11 给定 $x \in R$, 考虑 $\mathcal{A}$ 为独点集而 $\mathbf{x} = [x]$ 的情形, 相应的 $\mathrm{K}(\mathbf{x})$ 化为仅有 0 和 1 次项的链复形

$$\mathrm{K}(x) := \left[R \xrightarrow{x} R \right].$$

其次考虑 $\mathcal{A} = \{1, \ldots, n\}$ 而 $\mathbf{x} = [x_1, \ldots, x_n]$ 的特例. 结合上一情形和推论 9.2.6 即得典范同构

$$\begin{aligned} \mathrm{K}^\bullet(\mathbf{x}; M) &\simeq \mathrm{K}(x_1) \otimes \cdots \otimes \mathrm{K}(x_n) \otimes M, \\ \mathrm{K}_\bullet(\mathbf{x}; M) &\simeq \mathrm{Hom}^\bullet\left(\mathrm{K}(x_1) \otimes \cdots \otimes \mathrm{K}(x_n), M\right). \end{aligned}$$

9.4 进阶性质

对于 $\mathsf{Ch}(R)$ 中的任意同态 $f: X \to Y$, 有称为映射锥的链复形 $\mathrm{Cone}(f) = \mathrm{Cone}\left[X \xrightarrow{f} Y\right]$, 定义见诸 [8, 注记 3.3.13].

引理 9.4.1 设 $x \in R$. 记对链复形 M 逐项乘以 x 给出的同态为 $m_x : M \to M$, 则 $\mathrm{K}(x) \otimes M$ 等于映射锥 $\mathrm{Cone}(m_x)$.

证明 对所有 $n \in \mathbb{Z}$, 由定义 9.1.2 和注记 9.3.11 可见 $(\mathrm{K}(x) \otimes M)_n = M_{n-1} \oplus M_n$, 对应到双复形中的 $(1, n-1)$ 和 $(0, n)$ 次项, 而

$$\begin{aligned} d_n^{K(x)\otimes M} : M_{n-1} \oplus M_n &\to M_{n-2} \oplus M_{n-1} \\ (y, y') &\mapsto \left(-d_{n-1}^M(y),\, d_n^M(y') + xy\right). \end{aligned}$$

对比 $\mathrm{Cone}(m_x)$ 的定义, 立得断言. □

现在代入定义 9.3.5 的场景.

命题 9.4.2 考虑 R-模 L 和 $u \in \mathrm{Hom}_R(L, R)$. 对 $x \in R$ 定义

$$L' := R \oplus L, \quad u' = x \oplus u \in \mathrm{Hom}_R(L', R),$$

其中将 x 等同于相应的模同态 $R \to R$, 则对所有链复形 M 皆有典范同构

$$\mathrm{K}_\bullet(u'; M) \simeq \mathrm{Cone}\left[\mathrm{K}_\bullet(u; M) \xrightarrow{m_x} \mathrm{K}_\bullet(u; M)\right],$$

其中的 m_x 如引理 9.4.1.

证明 这是以下典范同构的合成:

$$\begin{aligned} \mathrm{K}_\bullet(u'; M) = \mathrm{K}(u') \otimes M &\simeq \mathrm{K}(x) \otimes (\mathrm{K}(u) \otimes M) = \mathrm{K}(x) \otimes \mathrm{K}_\bullet(u; M) \\ &\simeq \mathrm{Cone}\left[\mathrm{K}_\bullet(u; M) \xrightarrow{m_x} \mathrm{K}_\bullet(u; M)\right], \end{aligned}$$

其中的等号皆是定义, 第一个同构基于推论 9.2.6 和张量积的结合约束, 第二个同构基于引理 9.4.1. □

以下结论采用约定 9.3.10.

推论 9.4.3 设 $n \geq 1$. 考虑 R 的一列元素 $\mathbf{y} = [x_n, \ldots, x_1]$. 记 $\mathbf{y}' := [x_{n-1}, \ldots, x_1]$, 则有 R-模的长正合列

$$\cdots \to \mathrm{H}_i \mathrm{K}_\bullet(\mathbf{y}'; M) \xrightarrow{x_n} \mathrm{H}_i \mathrm{K}_\bullet(\mathbf{y}'; M) \to \mathrm{H}_i \mathrm{K}_\bullet(\mathbf{y}; M) \to \mathrm{H}_{i-1} \mathrm{K}_\bullet(\mathbf{y}'; M) \to \cdots$$

其中 $i \in \mathbb{Z}$, 并且将 x_n 等同于乘以 x_n 给出的 R-模同态.

证明 根据 [8, (3.7.1)] 的链复形版本, $\mathrm{K}_\bullet(\mathbf{y}';M) \xrightarrow{m_{x_n}} \mathrm{K}_\bullet(\mathbf{y}';M) \to \mathrm{Cone}(m_{x_n})$ 典范地诱导同调模的长正合列, 而命题 9.4.2 将 $\mathrm{K}_\bullet(\mathbf{y};M)$ 等同于映射锥 $\mathrm{Cone}(m_{x_n})$. □

引理 9.4.4 给定 R 的两列元素 $\mathbf{x} = [x_1, \ldots, x_n]$ 和 $\mathbf{y} = [y_1, \ldots, y_n]$, 视同 R 上的 n 维行向量, 设 P 是 R 上的 $n \times n$ 可逆矩阵, 使得 $\mathbf{x}P = \mathbf{y}$, 则 P 对所有 M 诱导同构

$$\mathrm{K}_\bullet(\mathbf{x};M) \xrightarrow{\sim} \mathrm{K}_\bullet(\mathbf{y};M), \quad \mathrm{K}^\bullet(\mathbf{x};M) \xrightarrow{\sim} \mathrm{K}^\bullet(\mathbf{y};M).$$

作为特例, 对 $\mathbf{x}$ 的分量作置换给出同构的 $\mathrm{K}_\bullet(\mathbf{x};M)$ 和 $\mathrm{K}^\bullet(\mathbf{x};M)$.

证明 对于第一部分, 将 $R^{\oplus n}$ 的元素视同 R 上的 n 维列向量, 再以矩阵左乘将 P 等同于 $R^{\oplus n}$ 的自同态, 将 $\mathbf{x}$ 和 $\mathbf{y}$ 等同于同态 $R^{\oplus n} \to R$. 鉴于 $\mathbf{x}P = \mathbf{y}$, Koszul 复形的函子性 (见定义 9.3.1 之下讨论) 给出所求同构.

取 P 为置换矩阵即得第二部分. □

本节最后探讨 Koszul 同调和上同调之间的关系.

命题 9.4.5 考虑 R 的一列元素 $\mathbf{x}$, 记其长度为 n. 对所有链复形 M 皆有典范同构

$$\mathrm{H}_p(\mathbf{x};M) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^{n-p}(\mathbf{x};M), \quad p \in \mathbb{Z}.$$

证明 设 $p \in \mathbb{Z}$. 在命题 9.3.3 的同构两端取同调 H_p, 并留意链复形的平移 $[-n]$, 推得

$$\mathrm{H}_p(\mathbf{x};M) = \mathrm{H}_p\,\mathrm{K}_\bullet(\mathbf{x};M) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}_{p-n}\,\mathrm{K}_\bullet^{\mathrm{Hom}}(\mathbf{x};M).$$

将右项切换到上链复形的上同调, 即是 $\mathrm{H}^{n-p}\,\mathrm{K}^\bullet(\mathbf{x};M) = \mathrm{H}^{n-p}(\mathbf{x};M)$. □

9.5 正则列

对任意 R-模 M 和 $x \in R$, 以 $M \xrightarrow{x} M$ 代表乘以 x 给出的 R-模自同态. 以下采用约定 9.3.10 关于环中的元素列 $\mathbf{x}$ 的记法.

定义 9.5.1 (正则列) 对于 R-模 M, 长度 n 的列 $\mathbf{x}$ 若满足

(i) 对所有 $1 \leq i \leq n$, 同态 $M/(x_1, \ldots, x_{i-1})M \xrightarrow{x_i} M/(x_1, \ldots, x_{i-1})M$ 皆为单射,

(ii) $M \neq \mathbf{x}M$, 其中

$$\mathbf{x}M := (x_1, \ldots, x_n)M = \sum_{i=1}^{n} x_i M,$$

则称 $\mathbf{x}$ 为 M-正则列; 若仅满足 (i), 则称 $\mathbf{x}$ 为 M-弱正则列.

若 $\mathbf{x}$ 是 R-正则 (或 R-弱正则) 的, 则简称 $\mathbf{x}$ 为正则列 (或弱正则列).

正则列中的 $x_1, \ldots, x_n$ 必然相异. 当 $M \neq 0$ 时, 空列 ($n = 0$) 按定义是 M-正则的.

正则列可以接合: 若 $[x_1, \ldots, x_n]$ 是 M-正则列 (或弱正则列), 而 $[x_{n+1}, \ldots, x_{n+m}]$ 是 $M/(x_1, \ldots, x_n)$-正则列 (或弱正则列), 则 $[x_1, \ldots, x_{n+m}]$ 是 M-正则列 (或弱正则列).

给定 $\mathbf{x}$ 如上, 今后记 R 的理想 $(x_1, \ldots, x_n)$ 为 I.

例 9.5.2 给定 $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, 考虑 n 元多项式环 $R_0 := \mathbb{Z}[T_1, \ldots, T_n]$, 易见其中的列

$$\mathbf{T} := [T_1, \ldots, T_n]$$

是正则列, 相应的理想记为 I_0. 将 $\mathbb{Z}$ 通过 $f \cdot 1 = f(0, \ldots, 0)$ 作成 R_0-模, 则有 R_0-模同构 $R_0/I_0 \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}$.

稍后的论证将频繁涉及 R_0-模的短正合列

$$0 \to I_0^r/I_0^{r+1} \xrightarrow{i_r} R_0/I_0^{r+1} \xrightarrow{p_r} R_0/I_0^r \to 0. \tag{9.5.1}$$

其中 $r \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. 引入关于单项式的多重指标记法

$$T^{\mathbf{a}} := T_1^{a_1} \cdots T_n^{a_n}, \quad \mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n, \quad |\mathbf{a}| := \sum_{i=1}^{n} a_i,$$

则可得 R_0-模同构 $I_0^r/I_0^{r+1} \simeq \bigoplus_{|\mathbf{a}|=r} \mathbb{Z}$, 使得右式的第 $\mathbf{a}$ 份 $\mathbb{Z}$ (视为 R_0-模) 对应到 $T^{\mathbf{a}}$ 的陪集生成的子模.

回到一般情形. 对所有 $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$, 定义 J 为所有 $x_i X_j - x_j X_i$ (其中 $1 \leq i < j \leq n$) 在 $R[X_1, \ldots, X_n]$ 中生成的分次理想. 对所有 R-模 M, 按注记 4.5.7 定义

$$\mathrm{Bl}_I(M) := \bigoplus_{r \geq 0} I^r M, \quad \mathrm{gr}_I(M) := \bigoplus_{r \geq 0} I^r M / I^{r+1} M,$$

则有分次 R-模同态

$$\begin{gathered} \tilde{\alpha}_M^{\mathbf{x}} : R[X_1, \ldots, X_n] \otimes M \to \mathrm{Bl}_I(M), \\ \tilde{\alpha}_M^{\mathbf{x}}(X_i \otimes m) = x_i m \in \mathrm{Bl}_I(M)_1, \quad 1 \leq i \leq n. \end{gathered}$$

按 J 定义可见 $\tilde{\alpha}_M^{\mathbf{x}}$ 分解为

$$\alpha_M^{\mathbf{x}} : (R[X_1, \ldots, X_n]/J) \otimes M \to \mathrm{Bl}_I(M);$$

对上式两边取 $R/I \otimes (\cdot)$, 得到分次 R/I-模同态

$$\beta_M^{\mathbf{x}} : (R/I)[X_1, \ldots, X_n] \otimes M \to \mathrm{gr}_I(M).$$

注意到 $\alpha_M^{\mathbf{x}}$ 和 $\beta_M^{\mathbf{x}}$ 皆满.

引理 9.5.3 在上述场景中, 设 $\beta_M^{\mathbf{x}}$ 为同构, 并取定 $1 \leq j \leq n$.

(i) 乘以 x_j 诱导的同态 $M/I^r M \xrightarrow{x_j} M/I^{r+1}M$ 对所有 $r \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ 皆为单.

(ii) 设 $m \in M$, 则 $x_j m = 0$ 蕴涵 $m \in \bigcap_{r \geq 0} I^r M$.

证明 易见乘以 X_j 是 $(R/I)[X_1, \ldots, X_n] \otimes M$ 的单自同态, 故乘以 x_j (同时次数加 1) 是 $\mathrm{gr}_I(M)$ 的单自同态, 亦即 $I^s M/I^{s+1}M \xrightarrow{x_j} I^{s+1}M/I^{s+2}M$ 恒为单. 考虑 $M/I^r M \xrightarrow{x_j} M/I^{r+1}M$, 它在 $r = 0$ 时显然单. 对于 $r \geq 1$, 考虑行正合交换图表

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & I^{r-1}M/I^r M \arrow[r] \arrow[d, "x_j"'] & M/I^r M \arrow[r] \arrow[d, "x_j"] & M/I^{r-1}M \arrow[r] \arrow[d, "x_j"] & 0 \\
0 \arrow[r] & I^r M/I^{r+1}M \arrow[r] & M/I^{r+1}M \arrow[r] & M/I^r M \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

可递归推得 $M/I^r M \xrightarrow{x_j} M/I^{r+1}M$ 恒为单, 是为 (i), 而 (ii) 是其直接应用. □

定理 9.5.4 沿用上述符号, 特别地 $I = (x_1, \ldots, x_n)$. 考虑陈述:

(i) $\mathbf{x}$ 是 M-正则列,

(ii) $\mathbf{x}$ 是 M-弱正则列,

(iii) $\mathrm{H}_i(\mathbf{x}; M) = 0$ 对所有 $i > 0$ 成立,

(iv) $\mathrm{H}_1(\mathbf{x}; M) = 0$,

(v) $\alpha_M^{\mathbf{x}} : (R[X_1, \ldots, X_n]/J) \otimes M \to \mathrm{Bl}_I(M)$ 是同构,

(vi) $\beta_M^{\mathbf{x}} : (R/I)[X_1, \ldots, X_n] \otimes M \to \mathrm{gr}_I(M)$ 是同构,

则恒有 (i) $\implies$ (ii) $\implies$ (iii) $\implies$ (iv) $\implies$ (v) $\implies$ (vi).

若对所有 $1 \leq i \leq n$ 要求 $M/(x_1 + \cdots + x_{i-1})M$ 对 I-进滤过皆是分离的, 而且 $M \neq 0$, 则 (i) — (vi) 相互等价.

证明 (i) $\implies$ (ii) 属显然.

(ii) $\implies$ (iii). 命 $\mathbf{y} = [x_n, \ldots, x_1]$. 鉴于引理 9.4.4, 证 (ii) 蕴涵 $\mathrm{H}_i(\mathbf{y}; M) = 0$ 对所有 $0 < i \leq n$ 成立即可. 以下对 n 递归地论证.

当 $n = 0$ 时无事可作, 而 $n = 1$ 时例 9.3.9 表明 $\mathrm{H}_1([x_1]; M) \simeq \{m \in M : x_1 m = 0\} = 0$. 以下设 $n \geq 2$, 记 $\mathbf{y}' := [x_{n-1}, \ldots, x_1]$. 推论 9.4.3 的长正合列蕴涵

$$\mathrm{H}_i(\mathbf{y}'; M) \to \mathrm{H}_i(\mathbf{y}; M) \to \mathrm{H}_{i-1}(\mathbf{y}'; M) \xrightarrow{x_n} \mathrm{H}_{i-1}(\mathbf{y}'; M)$$

对所有 i 正合. 当 $i>1$ 时, 递归假设蕴涵 $\mathrm{H}_i(\mathbf{y};M)=0$. 当 $i=1$ 时, 配合例 9.3.8 见得

$$0 \to \mathrm{H}_1(\mathbf{y};M) \to M/\mathbf{y}'M \xrightarrow{x_n} M/\mathbf{y}'M$$

正合. 由于 $\mathbf{x}$ 是 M-弱正则列, 最右同态为单, 因此 $\mathrm{H}_1(\mathbf{y};M)=0$.

(iii) $\implies$ (iv) 显然.

(iv) $\implies$ (v). 取例 9.5.2 中的 $R_0=\mathbb{Z}[T_1,\ldots,T_n]$ 及其理想 $I_0=(T_1,\ldots,T_n)$. 以 $T_i\mapsto x_i$ 定义环同态 $R_0\to R$, 从而将 M 作成 R_0-模. 定义 $J_0\subset R_0[X_1,\ldots,X_n]$ 为所有 $T_iX_j-T_jX_i$ 生成的理想 $(1\leq i<j\leq n)$, 则显然有 R-代数的同构

$$R \underset{R_0}{\otimes} (R_0[X_1,\ldots,X_n]/J_0) \simeq R[X_1,\ldots,X_n]/J.$$

观察到下图交换:

$$\begin{tikzcd}
(R_0[X_1,\ldots,X_n]/J_0) \underset{R_0}{\otimes} M \arrow[r, "u\otimes \mathrm{id}_M", "\sim"'] \arrow[d, "\wr"'] & \bigoplus_{r\geq 0} I_0^r \underset{R_0}{\otimes} M \arrow[d, "\bigoplus_r m_r"] \\
(R[X_1,\ldots,X_n]/J) \underset{R}{\otimes} M \arrow[r, "\alpha^{\mathbf{x}}_M"'] & \bigoplus_{r\geq 0} I^r M
\end{tikzcd}$$

其中 u 是例 4.5.9 的同构, 左侧同构来自命题 1.3.6, 右侧 $m_r: I_0^r \underset{R_0}{\otimes} M \to I^r M$ 由乘法诱导. 若能证明每个 m_r 皆为同构, 便有 (v).

根据 §9.3 对一列元素确定的 Koszul 复形的显式描述, 有 $\mathsf{Ch}(\mathbb{Z})$ 中的同构

$$\mathrm{K}_\bullet(\mathbf{x};M)\simeq \mathrm{K}_\bullet(\mathbf{T};M), \quad \mathbf{T} := \text{元素列 } [T_1,\ldots,T_n].$$

已知 $\mathbf{T}$ 是 R_0 中的正则列 (例 9.5.2), 故从已知的 (i) $\implies$ (ii) 得出 $\mathrm{K}_\bullet(\mathbf{T};R_0)$ 给出 R_0-模 $R_0/I_0\simeq\mathbb{Z}$ 的自由解消. 综上, (iii) 相当于说 $\mathrm{Tor}_1^{R_0}(\mathbb{Z},M)=0$. 以此为基础, 结合 (9.5.1) 的短正合列和 $I_0^r/I_0^{r+1}\simeq\bigoplus_{|\mathsf{a}|=r}\mathbb{Z}$ 递归地推得 $\mathrm{Tor}_1^{R_0}(R_0/I_0^r,M)=0$ 对所有 $r\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$ 成立 ($r=0$ 情形平凡).

应用引理 5.4.1 知乘法给出的典范同态 $I_0^r \underset{R_0}{\otimes} M \to I_0^r M$ 为同构, 右式等于 I^rM, 故 m_r 确为同构.

(v) $\implies$ (vi) 是缘于 $\beta^{\mathbf{x}}_M=\mathrm{id}_{R/I}\otimes\alpha^{\mathbf{x}}_M$.

开启后续论证之前, 注意到如选定 $r\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$, 对 (9.5.1) 取 $(\cdot)\underset{R_0}{\otimes} M$, 则:

- ◇ $\ker(p_r\otimes\mathrm{id}_M)$ 等同于 $I_0^rM/I_0^{r+1}M = I^rM/I^{r+1}M$;
- ◇ $\beta^{\mathbf{x}}_M$ 的 r 次部分可以等同于 $\bigoplus_{|\mathsf{a}|=r}(X^{\mathsf{a}}\otimes M)\to I^rM/I^{r+1}M$, 每一份 $X^{\mathsf{a}}\otimes M$ 作为 R/I-模都同构于 M/IM;

◇ 鉴于 R_0-模同构 $I_0^r/I_0^{r+1} \simeq \bigoplus_{|\mathbf{a}|=r} \mathbb{Z}$ (例 9.5.2), 由 $i_r \otimes \mathrm{id}_M$ 诱导的

$$(I_0^r/I_0^{r+1}) \underset{R_0}{\otimes} M \to I^r M/I^{r+1}M$$

等同于 $\beta_M^{\mathbf{x}}$ 的 r 次部分.

对 (9.5.1) 应用 $\mathrm{Tor}_\bullet^{R_0}(\cdot, M)$ 的长正合列, 遂知 (v) 等价于

$$\mathrm{Tor}_1^{R_0}(R_0/I_0^{r+1}, M) \xrightarrow{\mathrm{Tor}_1^{R_0}(p_r, \mathrm{id}_M)} \mathrm{Tor}_1^{R_0}(R_0/I_0^r, M) \text{ 为满}, \quad r \in \mathbb{Z}_{\geq 0}. \tag{9.5.2}$$

以下设 $M \neq 0$, 对所有 $1 \leq i \leq n$ 要求 $M/(x_1 + \cdots + x_{i-1})M$ 是 I-进分离的, 然后说明 (vi) $\implies$ (i). 首先注意到 I-进分离性和 $M \neq 0$ 蕴涵 $M \neq (x_1, \ldots, x_{i-1})M$.

不妨设 $n \geq 1$. 命 $\overline{M} := M/x_1 M \neq 0$, 则 (i) 等价于说 $M \xrightarrow{x_1} M$ 为单, 而且 $n > 1$ 时 $\mathbf{x}' := [x_2, \ldots, x_n]$ 是 $\overline{M}$-正则列.

在 (vi) 的前提下, 引理 9.5.3 配合 I-进分离条件表明 $M \xrightarrow{x_1} M$ 为单, 而关于 $\overline{M}$ 和 $\mathbf{x}'$ 的条件可对 n 递归地处理, 前提是 $\overline{M}$ 对 $\mathbf{x}'$ 须满足 (9.5.2). 为了确立此前提, 命

$$\overline{R}_0 := R_0/(T_1), \quad \overline{I}_0 = I_0/(T_1).$$

注意到 (9.5.2) 在 $r = 0$ 时平凡. 对 $r \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ 考虑行正合交换图表

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & R_0/I_0^r \arrow[r, "T_1"] \arrow[d, "p_{r+1}"'] & R_0/I_0^{r+1} \arrow[r] \arrow[d, "p_r"] & \overline{R}_0/\overline{I}_0^{r+1} \arrow[r] \arrow[d, "\overline{p}_r"] & 0 \\
0 \arrow[r] & R_0/I_0^{r-1} \arrow[r, "T_1"'] & R_0/I_0^r \arrow[r] & \overline{R}_0/\overline{I}_0^r \arrow[r] & 0,
\end{tikzcd}$$

其中 $\overline{p}_r$ 来自 (9.5.1) 的 $\overline{R}_0$ 版本. 取 $\mathrm{Tor}_\bullet^{R_0}(\cdot, M)$ 给出行正合交换图表

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Tor}_1^{R_0}(R_0/I_0^{r+1}, M) \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{Tor}_1^{R_0}(p_r, \mathrm{id}_M)"'] & \mathrm{Tor}_1^{R_0}(\overline{R}_0/\overline{I}_0^{r+1}, M) \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{Tor}_1^{R_0}(\overline{p}_r, \mathrm{id}_M)"] & M/I^r M \arrow[r, "x_1"] \arrow[d] & M/I^{r+1}M \arrow[d] \\
\mathrm{Tor}_1^{R_0}(R_0/I_0^r, M) \arrow[r] & \mathrm{Tor}_1^{R_0}(\overline{R}_0/\overline{I}_0^r, M) \arrow[r] & M/I^{r-1}M \arrow[r, "x_1"'] & M/I^r M.
\end{tikzcd}$$

然而 (v) 和引理 9.5.3 表明图中标为 x_1 的水平箭头皆单, 故 Tor 之间的水平箭头皆满; 条件 (9.5.2) 又说明 $\mathrm{Tor}_1^{R_0}(p_r, \mathrm{id}_M)$ 为满, 综上, $\mathrm{Tor}_1^{R_0}(\overline{p}_r, \mathrm{id}_M)$ 为满.

由 $M \xrightarrow{x_1} M$ 的单性和 R_0-模的短正合列 $0 \to R_0 \xrightarrow{T_1} R_0 \to \overline{R}_0 \to 0$, 易知

$$j > 0 \implies \mathrm{Tor}_j^{R_0}(\overline{R}_0, M) = 0.$$

将此代入命题 5.3.6, 即有交换图表

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Tor}_1^{R_0}(\overline{R}_0/\overline{I}_0^{r+1}, M) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "\mathrm{Tor}_1^{\overline{R}_0}(\overline{p}_r, \mathrm{id}_M)"'] & \mathrm{Tor}_1^{\overline{R}_0}(\overline{R}_0/\overline{I}_0^{r+1}, \overline{M}) \arrow[d, "\mathrm{Tor}_1^{R_0}(\overline{p}_r, \mathrm{id}_M)"] \\
\mathrm{Tor}_1^{R_0}(\overline{R}_0/\overline{I}_0^r, M) \arrow[r, "\sim"'] & \mathrm{Tor}_1^{\overline{R}_0}(\overline{R}_0/\overline{I}_0^{r+1}, \overline{M}).
\end{tikzcd}$$

由此知 $\mathrm{Tor}_1^{\overline{R}_0}(\overline{p}_r, \mathrm{id}_M)$ 满, 亦即 $\overline{M}$ 对 $\mathbf{x}'$ 满足 (9.5.2). 明所欲证. □

推论 9.5.5 在定理 9.5.4 的场景中取 $M = R$, 并且设 $\mathrm{H}_1(\mathbf{x}; R) = 0$. 分别视 I 和 I/I^2 为 R-模和 R/I-模取其对称代数 (见 §9.2 开头), 则有同构

$$\begin{aligned} \mathrm{Sym}(I) &\xrightarrow{\sim} \mathrm{Bl}_I(R) \quad (\text{分次 } R\text{-代数}), \\ \mathrm{Sym}(I/I^2) &\xrightarrow{\sim} \mathrm{gr}_I(R) \quad (\text{分次 } R/I\text{-代数}), \end{aligned}$$

它们在次数 1 的部份都是恒等, 而 I/I^2 是以 $x_1 + I^2, \ldots, x_n + I^2$ 为基的自由 R/I-模.

证明 以 $e_1, \ldots, e_n$ 表 $R^{\oplus n}$ 的标准基, 则 $\mathrm{K}_\bullet(\mathbf{x}; R)$ 的 ≤ 2 次部分写作

$$\begin{array}{ccccc} \bigoplus_{1\leq i<j\leq n} Re_i \wedge e_j & \longrightarrow & \bigoplus_{i=1}^n Re_i & \longrightarrow & R \\ e_i \wedge e_j & \longmapsto & x_i e_j - x_j e_i & & \\ & & e_i & \longmapsto & x_i. \end{array}$$

因此, 条件 $\mathrm{H}_1(\mathbf{x}; R) = 0$ 蕴涵 $\mathbf{x}$ 确定的满同态 $R^{\oplus n} \to I$ 的核由 $x_i e_j - x_j e_i$ 生成 $(1 \leq i < j \leq n)$. 等同 $\mathrm{Sym}(R^{\oplus n})$ 和 $R[X_1, \ldots, X_n]$, 然后记 J 为所有 $x_i X_j - x_j X_i$ 生成的分次理想; 回忆到 $\mathrm{Sym}(R^{\oplus n})$ 等同于多项式代数 $R[X_1, \ldots, X_n]$, 由此推得分次 R-代数的同构

$$R[X_1, \ldots, X_n]/J \xrightarrow{\sim} \mathrm{Sym}(I), \quad X_i + J \mapsto x_i;$$

参见 [7, 推论 7.6.7]. 代入定理 9.5.4 (iv) $\implies$ (v) (取 $M = R$) 即得 $\mathrm{Sym}(I) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Bl}_I(R)$.

定理 9.5.4 (vi) (取 $M = R$) 中的分次 R/I-代数同构 $\beta_R^{\mathbf{x}}$ 通过 $X_i \mapsto x_i + I^2$ 将 $(R/I)[X_1, \ldots, X_n]$ 的 1 次齐次部分等同于 I/I^2. 于是 $(R/I)[X_1, \ldots, X_n]$ 等同于 $\mathrm{Sym}(I/I^2)$, 同构 $\beta_R^{\mathbf{x}}$ 化为 $\mathrm{Sym}(I/I^2) \xrightarrow{\sim} \mathrm{gr}_I(R)$. □

接着介绍使定理 9.5.4 中的 (i) — (vi) 相互等价的若干充分条件.

推论 9.5.6 设 R 为 Noether 环, M 为非零有限生成 R-模, 而 $\mathbf{x}$ 中的每个元素都属于 $\mathrm{rad}(R)$, 则定理 9.5.4 中的陈述 (i) — (vi) 等价.

证明 Krull 交定理 3.7.1 说明有限生成 R-模总是 $\mathrm{rad}(R)$-进分离的. □

特别地, 若 $(R, \mathfrak{m})$ 是 Noether 局部环, $x_1, \ldots, x_n \in \mathfrak{m}$ 而 M 是有限生成非零 R-模, 则定理 9.5.4 中的 (i) — (vi) 相互等价.

推论 9.5.7 设 Γ 为全序且为正的加法幺半群 (定义 B.1.1 和 B.1.3), 嵌入其群化 Γ^{grp}. 设 R 为 Γ-分次环, 而 $\mathbf{x}$ 中的元素全为次数 > 0 的非零齐次元. 设 $M = \bigoplus_\gamma M_\gamma$ 为非零 Γ^{grp}-分次 R-模, 而且存在 $\gamma_0 \in \Gamma^{\mathrm{grp}}$ 使得

$$M_\gamma \neq 0 \implies \gamma \in \gamma_0 + \Gamma$$

对所有 $\gamma \in \Gamma^{\mathrm{grp}}$ 成立, 此时定理 9.5.4 中的陈述 (i) — (vi) 等价.

证明 每个 $M/(x_1,\ldots,x_{i-1})M$ 都是 Γ^{grp}-分次 R-模, 且其直和分解中的非零项仍来自 $\gamma_0+\Gamma$. 这种分次 R-模都是 I-进分离的: 记 $\eta := \max_{1\le i\le n}\deg(x_i) > 0$, 则分次 R-模 $I^r M$ 的非零项都属于 $r\eta+\gamma_0+\Gamma$, 而当 $r \gg 0$, 运用全序可见这些子集在 Γ 中的交为空. □

9.6 Ext 函子的相关回顾

本章后续内容要求读者对同调理论中的 Ext-函子

$$\mathrm{Ext}^i_R(\cdot,\cdot) : R\text{-}\mathsf{Mod}^{\mathrm{op}} \times R\text{-}\mathsf{Mod} \to R\text{-}\mathsf{Mod}, \quad i \in \mathbb{Z}_{\ge 0}$$

有最基本的了解, 相关内容可见 [8, §3.14]. 所需知识包括:

- $\mathrm{Ext}^0_R(M,N) = \mathrm{Hom}_R(M,N)$;
- 当 R-模 M 选定, 函子列

  $$\mathrm{Ext}^i_R(M,\cdot) : R\text{-}\mathsf{Mod} \to R\text{-}\mathsf{Mod}, \quad i = 0,1,2,\ldots$$

  是左正合函子 $\mathrm{Hom}_R(M,\cdot) : R\text{-}\mathsf{Mod} \to R\text{-}\mathsf{Mod}$ 的右导出函子;
- 当 R-模 N 选定, 函子列

  $$\mathrm{Ext}^i_R(\cdot,N) : R\text{-}\mathsf{Mod}^{\mathrm{op}} \to R\text{-}\mathsf{Mod}, \quad i = 0,1,2,\ldots$$

  是左正合函子 $\mathrm{Hom}_R(\cdot,N) : R\text{-}\mathsf{Mod}^{\mathrm{op}} \to R\text{-}\mathsf{Mod}$ 的右导出函子;
- 当 M 投射 (或 N 内射) 时对所有 $i>0$ 皆有 $\mathrm{Ext}^i_R(M,\cdot)=0$ (或 $\mathrm{Ext}^i_R(\cdot,N)=0$);
- 对 M 取投射解消 $P_\bullet \to M \to 0$ 给出

  $$\mathrm{Ext}^i_R(M,N) \simeq \mathrm{H}^i\left(\mathrm{Hom}_R(P_\bullet,N)\right),$$

  对 N 取内射解消 $0 \to N \to I^\bullet$ 则给出

  $$\mathrm{Ext}^i_R(M,N) \simeq \mathrm{H}^i\left(\mathrm{Hom}_R(M,I^\bullet)\right),$$

  详见 [8, 定义–命题 3.14.4] 及相关讨论;
- 以上给出 $\mathrm{Ext}^i_R(M,\cdot)$ 和 $\mathrm{Ext}^i_R(\cdot,N))$ 的典范描述, 这是基于投射解消和内射解消精确到同伦的唯一性 (注记 1.4.9);
- 对 N (或 M) 作解消计算 $\mathrm{Ext}^i_R(M,N)$, 立见任何 $r\in R$ 对 R-模 $\mathrm{Ext}^i_R(M,N)$ 的乘法作用都等于 r 对 M (或 N) 的乘法在 $\mathrm{Ext}^i_R(M,N)$ 上诱导的自同态;

◇ 模的短正合列诱导 Ext-函子的长正合列:

$$\cdots \to \mathrm{Ext}_R^{i-1}(M', N) \xrightarrow{\delta^{i-1}} \mathrm{Ext}_R^i(M'', N) \to \mathrm{Ext}_R^i(M, N) \to \mathrm{Ext}_R^i(M', N) \to \cdots,$$

$$\cdots \to \mathrm{Ext}_R^{i-1}(M, N'') \xrightarrow{\delta^{i-1}} \mathrm{Ext}_R^n(M, N') \to \mathrm{Ext}_R^i(M, N) \to \mathrm{Ext}_R^i(M, N'') \to \cdots,$$

其中 $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ 和 $0 \to N' \to N \to N'' \to 0$ 都是给定的短正合列, 连接同态 δ^i 都是典范的, 并在 $i < 0$ 时规定 $\mathrm{Ext}_R^i = 0$; 见 [8, 定义–命题 3.14.4] 之下的讨论.

倘若读者愿接受导出范畴的语言, 则 $\mathrm{Ext}_R^i(M, N)$ 无非是 $\mathrm{H}^i\,\mathrm{RHom}_R(M, N)$, 详见 [8, §4.9].

命题 9.6.1 设 R 为 Noether 环, M 和 N 为有限生成 R-模, 则每个 $\mathrm{Ext}_R^i(M, N)$ 都是有限生成 R-模.

证明 基于定义–命题 1.4.8 对投射解消的取法和 Noether 环的性质, 可取到投射解消 $P_\bullet \to M \to 0$ 使得每个 P_i 皆为有限秩自由模, 因此 $\mathrm{Hom}_R(P_i, N)$ 有限生成. 既然 $\mathrm{Ext}_R^i(M, N)$ 是 $\mathrm{Hom}_R(P_i, N)$ 的子商, 它也是有限生成的. □

兹记录两则关于 Ext 函子的典范同构.

引理 9.6.2 设 S 为平坦 R-代数, M 为 R-模而 N 为 S-模, 则对所有 i 都有 R-模的典范同构

$$\mathrm{Ext}_S^i\left(S \underset{R}{\otimes} M, N\right) \simeq \mathrm{Ext}_R^i(M, N).$$

证明 取 M 的投射解消 $P_\bullet \to M \to 0$, 平坦性和命题 1.4.6 表明 $S \underset{R}{\otimes} P_\bullet \to S \underset{R}{\otimes} M \to 0$ 是 $S \underset{R}{\otimes} M$ 作为 S-模的投射解消. 命题 1.3.3 (省略符号 $\mathcal{F}_{R\to S}$) 给出典范 R-模同构

$$\mathrm{Hom}_S\left(S \underset{R}{\otimes} P_\bullet, N\right) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_R(P_\bullet, N),$$

两边同取 i 次上同调遂有 $\mathrm{Ext}_S^i\left(S \underset{R}{\otimes} M, N\right) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ext}_R^i(M, N)$. □

引理 9.6.3 设 R 为 Noether 环, S 为平坦 R-代数, M 和 N 为 R-模, 而且 M 是有限生成的, 则对所有 i 都有 S-模的典范同构

$$S \underset{R}{\otimes} \mathrm{Ext}_R^i(M, N) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ext}_S^i\left(S \underset{R}{\otimes} M, S \underset{R}{\otimes} N\right).$$

证明 取 M 的投射解消 $P_\bullet \to M \to 0$, 则 $S \underset{R}{\otimes} P_\bullet \to S \underset{R}{\otimes} M \to 0$ 也是投射解消. 断言中的典范同态由上链复形之间的同态

$$S \underset{R}{\otimes} \mathrm{Hom}_R(P_\bullet, N) \to \mathrm{Hom}_S\left(S \underset{R}{\otimes} P_\bullet, S \underset{R}{\otimes} N\right)$$

在 H^i 的层次诱导. 关于 R 和 M 的条件表明可取 $P_\bullet \to M \to 0$ 使得其中每个 P^i 皆有限生成, 因此也是有限展示的, 故命题 5.2.3 蕴涵上述同态是同构. □

以下概念将是 §10.8 的主角.

定义 9.6.4 (内射维数和投射维数) 对于 R-模 N, 定义其内射维数为

$$\mathrm{inj.dim}(N) = \mathrm{inj.dim}_R(N) := \inf\left\{ i \in \mathbb{Z}_{\geq 0} : \forall j > i,\ \mathrm{Ext}^j_R(\cdot, N) = 0 \right\}.$$

对于 R-模 M, 定义其投射维数为

$$\mathrm{proj.dim}(M) = \mathrm{proj.dim}_R(M) := \inf\left\{ i \in \mathbb{Z}_{\geq 0} : \forall j > i,\ \mathrm{Ext}^j_R(M, \cdot) = 0 \right\}.$$

它们都是 $\mathbb{Z}_{\geq 0} \sqcup \{+\infty\}$ 的元素.

运用导出函子的基本操作 (详见 [8, 命题 4.9.6]), 可以证明

$$\begin{aligned} \mathrm{inj.dim}(N) \leq n &\iff \mathrm{Ext}^{n+1}_R(\cdot, N) = 0 \\ &\iff N \text{ 有长度 } \leq n \text{ 的内射解消}, \\ \mathrm{proj.dim}(M) \leq n &\iff \mathrm{Ext}^{n+1}_R(M, \cdot) = 0 \\ &\iff M \text{ 有长度 } \leq n \text{ 的投射解消}. \end{aligned}$$

与定义 5.3.7 的平坦维数对比, 由投射模的平坦性立得

$$\mathrm{fl.dim}(M) \leq \mathrm{proj.dim}(M). \tag{9.6.1}$$

定义–命题 9.6.5 (整体维数) 给定环 R, 约定 $\inf \varnothing = +\infty$, 则有

$$\begin{array}{ccccc} \sup\limits_{N:R\text{-模}} \mathrm{inj.dim}(N) & = & \inf\left\{ n \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \,\middle|\, \mathrm{Ext}^{\geq n+1}_R(\cdot, \cdot) = 0 \right\} & = & \sup\limits_{M:R\text{-模}} \mathrm{proj.dim}(M) \\ & & \| & & \\ & & \sup\left\{ n \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \,\middle|\, \begin{array}{l} \exists M, N : R\text{-模} \\ \mathrm{Ext}^n_R(M, N) \neq 0 \end{array} \right\} & & \end{array}$$

记之为 $\mathrm{gl.dim}(R) \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \sqcup \{+\infty\}$, 称为 R 的整体维数, 或称整体同调维数.

证明 这是 [8, 定义–命题 4.9.7] 对范畴 R-Mod 的特例, 仍是导出函子的基本操作. □

9.7 Ext 函子和正则列

选定环 R.

定义 9.7.1 (等级) 设 M 为有限生成 R-模. 对 R 的所有理想 I, 定义 I 在 M 上的等级为

$$j_I(M) := \inf\left\{i \in \mathbb{Z}_{\geq 0} : \mathrm{Ext}^i_R(R/I, M) \neq 0\right\};$$

此处规定 $\inf \varnothing = +\infty$.

以下运用 M-正则列或 M-弱正则列的概念 (定义 9.5.1) 来研究有限生成 R-模 M 的等级. 沿用约定 9.3.10 的符号, 将 R 的元素列记为 $\mathbf{x} = [x_1, \ldots, x_n]$ 的形式, 其中 $x_1, \ldots, x_n \in R$.

首先观察到若 $x \in R$ 非 M 的零因子, 而 N 是任意被 x 零化的 R-模, 则短正合列 $0 \to M \xrightarrow{x} M \to M/xM \to 0$ 对所有 $n \in \mathbb{Z}$ 诱导正合列

$$\mathrm{Ext}^{n-1}_R(N, M) \to \mathrm{Ext}^{n-1}_R(N, M/x_1M) \to \mathrm{Ext}^n_R(N, M) \to 0, \tag{9.7.1}$$

右端的零同态缘于 x_1 零化 $\mathrm{Ext}^n_R(N, M)$.

命题 9.7.2 给定 R 的理想 I 和有限生成 R-模 M.

(i) 若 $\mathbf{x} = [x_1, \ldots, x_r]$ 为包含于理想 I 的 M-弱正则列, 则有

$$j_I(M) = r + j_I(M/\mathbf{x}M).$$

(ii) 对 R 的所有乘性子集 U 皆有

$$j_I(M) \leq j_{I[U^{-1}]}(M[U^{-1}]).$$

(iii) 当 I 为真理想时,

$$\begin{aligned} j_I(M) &= \inf_{\mathfrak{p} \in V(I)} j_{\mathfrak{p}R_\mathfrak{p}}(M_\mathfrak{p}) \\ &= \inf_{\mathfrak{m} \in V(I) \cap \mathrm{MaxSpec}(R)} j_{\mathfrak{m}R_\mathfrak{m}}(M_\mathfrak{m}). \end{aligned}$$

(iv) 若 R 是 Noether 局部环, 记其极大理想为 $\mathfrak{m}$, 则 $\mathfrak{m}$-进完备化给出的 $\widehat{R}$-模 $\widehat{M}$ 满足

$$j_{\widehat{\mathfrak{m}}}(\widehat{M}) = j_\mathfrak{m}(M).$$

证明 (i). 处理特例 $r = 1$ 足矣. 若 $\mathrm{Ext}^{n-1}_R(R/I, M/x_1M) = 0$, 则将 $N = R/I$ 和 $x = x_1$ 代入正合列 (9.7.1) 可得 $\mathrm{Ext}^n_R(R/I, M) = 0$, 因此 $j_I(M) \geq j_I(M/x_1M) + 1$; 如果进一步设 $\mathrm{Ext}^n_R(R/I, M/x_1M) \neq 0$, 则在 (9.7.1) 中以 $n+1$ 代 n, 可见

$$0 \to \mathrm{Ext}^n_R(R/I, M/x_1M) \to \mathrm{Ext}^{n+1}_R(R/I, M) \to 0$$

正合. 综上, $j_I(M) = j_I(M/x_1M) + 1$.

(ii). 结合 $j_I(M)$, $j_{I[U^{-1}]}(M[U^{-1}])$ 的定义和引理 9.6.3.

(iii). 注意到 $\mathrm{Ext}^i_R(R/I, M) = 0$ 等价于对所有素理想 $\mathfrak{p}$ 皆有 $\mathrm{Ext}^i_R(R/I, M)_{\mathfrak{p}} = 0$, 而后者在 $\mathfrak{p} \notin V(I)$ 时恒为零; 以极大理想代素理想亦同. 其余论证和 (ii) 类似.

(iv). 推论 8.5.3 确保 $(\widehat{R}, \widehat{\mathfrak{m}})$ 仍是 Noether 局部环. 从 $\widehat{R}/\widehat{\mathfrak{m}} \simeq R/\mathfrak{m} \simeq (R/\mathfrak{m})^\wedge$ (命题 8.3.4), 同态 $R \to \widehat{R}$ 的平坦性 (命题 8.4.1), 命题 9.6.1 和引理 9.6.3, 对所有 i 得出

$$\mathrm{Ext}^i_R(R/\mathfrak{m}, M)^\wedge \simeq \mathrm{Ext}^i_{\widehat{R}}(\widehat{R}/\widehat{\mathfrak{m}}, \widehat{M}).$$

配合命题 8.5.4 可见 $\mathrm{Ext}^i_{\widehat{R}}(\widehat{R}/\widehat{\mathfrak{m}}, \widehat{M}) = 0$ 当且仅当 $\mathrm{Ext}^i_R(R/\mathfrak{m}, M) = 0$. □

引理 9.7.3 设 M 和 N 为 R-模, $\mathbf{x} = [x_1, \ldots, x_n]$ 为 M-弱正则列, 且 $x_1, \ldots, x_n$ 生成的理想 J 包含于 $\mathrm{ann}(N)$, 则有

$$\mathrm{Ext}^n_R(N, M) \simeq \mathrm{Hom}_R(N, M/JM).$$

证明 对 n 递归地论证. 观察到 $n = 0$ 情形是平凡的, 此时 $J = 0$. 以下设 $n \geq 1$, 取 $\mathbf{x}' = [x_1, \ldots, x_{n-1}]$, 相应的理想记为 J'. 由于 $M/J'M \xrightarrow{x_n} M/J'M$ 单, 而 x_n 又零化 N, 必有 $\mathrm{Hom}_R(N, M/J'M) = 0$. 由递归假设遂有

$$\mathrm{Ext}^{n-1}_R(N, M) \simeq \mathrm{Hom}_R(N, M/J'M) = 0.$$

代入先前得到的正合列 (9.7.1) 知 $\mathrm{Ext}^{n-1}_R(N, M/x_1M) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ext}^n_R(N, M)$, 对 M/x_1M-弱正则列 $x_2, \ldots, x_n$ 应用递归假设, 知

$$\mathrm{Ext}^{n-1}_R(N, M/x_1M) \simeq \mathrm{Hom}_R(N, M/JM).$$

证毕. □

命题 9.7.4 设 M 为 R-模, $\mathbf{x} = [x_1, \ldots, x_n]$ 为 R 的一列元素, $I := (x_1, \ldots, x_n)$. 若存在包含于 I 的 M-弱正则列 $\mathbf{y} = [y_1, \ldots, y_m]$, 其中 $0 \leq m \leq n$, 则

$$\begin{aligned} \mathrm{H}_i(\mathbf{x}; M) &= 0, \quad i \geq n - m + 1, \\ \mathrm{H}_{n-m}(\mathbf{x}; M) &\simeq \mathrm{Hom}_R(R/I, M/\mathbf{y}M) \\ &\simeq \mathrm{Ext}^m_R(R/I, M). \end{aligned}$$

证明 同构 $\mathrm{Hom}_R(R/I, M/\mathbf{y}M) \simeq \mathrm{Ext}^m_R(R/I, M)$ 是引理 9.7.3 的应用. 以下对 m 递归地证明其余.

设 $m = 0$. 例 9.3.9 给出 $\mathrm{H}_n(\mathbf{x}; M) \simeq \mathrm{Hom}_R(R/I, M)$.

设 $m \geq 1$. 命 $\overline{M} := M/y_1M$, 则 $\mathbf{y}$ 的 M-弱正则性质给出短正合列 $0 \to M \xrightarrow{y_1} M \to \overline{M} \to 0$, 代入引理 9.3.6 便对所有 i 得到长正合列

$$\mathrm{H}_i(\mathbf{x}; M) \xrightarrow{y_1} \mathrm{H}_i(\mathbf{x}; M) \to \mathrm{H}_i(\mathbf{x}; \overline{M}) \to \mathrm{H}_{i-1}(\mathbf{x}; \overline{M}) \xrightarrow{y_1} \mathrm{H}_{i-1}(\mathbf{x}; M).$$

引理 9.3.7 表明 y_1 零化 $\mathrm{K}_\bullet(\mathbf{x};M)$ 的所有上同调, 而另一方面 $\overline{M}$ 对 $\mathbf{x}$ 及 $\mathbf{y}' := [y_2,\ldots,y_m]$ 仍满足断言中的条件, 由此得到短正合列

$$0 \to \mathrm{H}_i(\mathbf{x};M) \to \mathrm{H}_i(\mathbf{x};\overline{M}) \to \mathrm{H}_{i-1}(\mathbf{x};M) \to 0.$$

基于 $m-1$ 的情形, 当 $i \geq n-m+2$ 时短正合列中项为零, 故 $\mathrm{H}_i(\mathbf{x};M)=0$, 而且在 $i=n-m+2$ 时顺带导致 $\mathrm{H}_{n-m+1}(\mathbf{x};M)=0$. 当 $i=n-m+1$ 时短正合列蕴涵

$$\mathrm{Hom}_R(R/I, \overline{M}/(y_2,\ldots,y_m)\overline{M}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}_{n-m}(\mathbf{x};M),$$

而左式同构于 $\mathrm{Hom}_R(R/I, M/\mathbf{y}M)$, 明所欲证. □

定义 9.7.5 (极长正则列) 设 I 为 R 的理想, M 为 R-模, $\mathbf{x}=[x_1,\ldots,x_n]$ 为包含于 I 的 M-正则列. 若不存在 $x_{n+1}\in I$ 使得 $[x_1,\ldots,x_{n+1}]$ 为 M-正则列, 则称 $\mathbf{x}$ 为包含于 I 的极长 M-正则列; 当 $M=R$ 时, 简称为包含于 I 的极长正则列.

若 R 是 Noether 环, 则理想链 $(x_1)\subset(x_1,x_2)\subset\cdots$ 必然稳定化, 因此任何 M-正则列必包含于一个极长 M-正则列.

下面聚焦于 Noether 环的情形, 探讨等级和正则列的关系.

引理 9.7.6 设 R 为 Noether 环. 给定理想 I 和有限生成 R-模 M, 以下陈述等价:

(i) $M\neq 0$ 且不存在长度非零而包含于 I 的 M-正则列;

(ii) 对所有 $x\in I$, 模同态 $M\xrightarrow{x}M$ 非单;

(iii) $\mathrm{Ass}(M)\cap V(I)\neq\varnothing$.

证明 (i) $\iff$ (ii): 缘自正则列的定义.

(ii) $\implies$ (iii): 命题 3.4.6 说明所有 $\mathfrak{p}\in\mathrm{Ass}(M)$ 之并包含 I, 故素避性质 (命题 1.1.3) 蕴涵存在 $\mathfrak{p}\in\mathrm{Ass}(M)$ 使得 $\mathfrak{p}\supset I$, 此即 (iii).

(iii) $\implies$ (ii): 留意到此时 $M\neq 0$. 设 $\mathfrak{p}\in\mathrm{Ass}(M)\cap V(I)$, 则存在嵌入 $R/\mathfrak{p}\hookrightarrow M$, 这表明 $M\xrightarrow{x}M$ 在 $x\in I\subset\mathfrak{p}$ 时不可能是单同态. □

定理 9.7.7 (D. Rees) 设 R 为 Noether 环, I 为 R 的理想, 而 M 为有限生成 R-模.

(i) 若 $IM=M$, 则 $j_I(M)=+\infty$.

(ii) 若 $IM\neq M$, 则 $j_I(M)\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$, 而且它等于所有包含于 I 的极长 M-正则列的共同长度.

证明 对于 (i), 定理 2.3.4 说明此时 $I+\mathrm{ann}(M)=R$, 因之推得 1_R 零化所有 $\mathrm{Ext}^i_R(R/I,M)$.

对于 (ii), 记极长 M-正则列 $\mathbf{x}$ 的长度为 n, 并且设所有 x_i 皆包含于 I. 对所有 $1 \leq i \leq n+1$, 命 $M_i := M/(x_1, \ldots, x_{i-1})M$. 当 $1 \leq i \leq n$ 时, 因为 $M \xrightarrow{x_i} M$ 单而 $x_i \in I$, 搭配引理 9.7.3 知

$$\mathrm{Ext}_R^{i-1}(R/I, M) \simeq \mathrm{Hom}_R(R/I, M_i) = 0.$$

另一方面, 引理 9.7.3 蕴涵

$$\mathrm{Ext}_R^n(R/I, M) \simeq \mathrm{Hom}_R(R/I, M_{n+1}).$$

由 $IM \neq M$ 和 $\mathbf{x}$ 的极长条件可知不存在长度非零而包含于 I 的 M_{n+1}-正则列, 故引理 9.7.6 导致存在 $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(M) \cap V(I)$. 取 $R/I \twoheadrightarrow R/\mathfrak{p} \hookrightarrow M_{n+1}$ 的合成, 得到 $\mathrm{Hom}_R(R/I, M_{n+1})$ 的非零元.

综上, $n = j_I(M)$. □

定理 9.7.8 设 R 为 Noether 环, M 为有限生成 R-模. 将 R 的元素列 $\mathbf{x} = [x_1, \ldots, x_n]$ 生成的理想记为 I, 则:

(i) $IM = M$ 当且仅当对所有 i 皆有 $\mathrm{H}_i(\mathbf{x}; M) = 0$ 和 $\mathrm{H}^i(\mathbf{x}; M) = 0$;

(ii) 若 $IM \neq M$ 则

$$\begin{aligned} j_I(M) &= n - \sup\{i : \mathrm{H}_i(\mathbf{x}; M) \neq 0\} \\ &= \inf\left\{i : \mathrm{H}^i(\mathbf{x}; M) \neq 0\right\}. \end{aligned}$$

证明 对于 (i), “当” 的方向缘于 $\mathrm{H}_0(\mathbf{x}; M) = M/IM$, 见 (9.3.4). 以下处理 “仅当” 的方向. 设 $\mathfrak{p}$ 为 R 的素理想, 则局部化的平坦性配合 (9.3.1) 给出 $R_{\mathfrak{p}}$-模同构

$$\mathrm{H}_i(\mathbf{x}; M)_{\mathfrak{p}} = (\mathrm{H}_i \, \mathrm{K}_\bullet(\mathbf{x}; M))_{\mathfrak{p}} \simeq \mathrm{H}_i \left(R_{\mathfrak{p}} \otimes \mathrm{K}_\bullet(\mathbf{x}; M)\right) \simeq \mathrm{H}_i \, \mathrm{K}_\bullet(\mathbf{x}_{\mathfrak{p}}; M_{\mathfrak{p}}) = \mathrm{H}_i(\mathbf{x}_{\mathfrak{p}}; M_{\mathfrak{p}}),$$

其中 $\mathbf{x}_{\mathfrak{p}}$ 是 $\mathbf{x}$ 在 $R_{\mathfrak{p}}$ 中的像. 回忆到 I 零化 $\mathrm{K}_\bullet(\mathbf{x}; M)$ 的所有同调.

- ◇ 若 $I \not\subset \mathfrak{p}$, 则 $\mathbf{x}_{\mathfrak{p}}$ 生成的理想交 $R_{\mathfrak{p}}^\times$, 此时 $\mathrm{H}_i(\mathbf{x}; M) = 0$.
- ◇ 若 $I \subset \mathfrak{p}$, 则定理 2.3.4 蕴涵 $\mathrm{H}_i(\mathbf{x}; M) = 0$.

综上, $\mathrm{H}_i(\mathbf{x}; M) = 0$. 结合命题 9.4.5 可见 $\mathrm{H}^{n-i}(\mathbf{x}; M) = 0$.

对于 (ii), 取包含于 I 的极长 M-正则子列 $\mathbf{y}$ (容许为空列), 记 $\mathbf{y}$ 的长度为 m, 定理 9.7.7 (ii) 说明 $m = j_I(M)$. 另一方面, 命题 9.7.4 说明

$$\mathrm{H}_i(\mathbf{x}; M) \simeq \begin{cases} 0, & \text{若 } n - m + 1 \leq i \leq n \\ \mathrm{Ext}_R^m(R/I, M) & \text{若 } i = n - m; \end{cases}$$

而且 $\mathrm{Ext}_R^m(R/I) \simeq \mathrm{Hom}_R(R/I, M/(y_1, \ldots, y_m)) \neq 0$. 此外 $i > n$ 时 $\mathrm{H}_i(\mathbf{x}; M) = 0$, 由此遂知 $\sup\{i : \mathrm{H}_i(\mathbf{x}; M) \neq 0\} = n - m = n - j_I(M)$. 这给出第一个等式. 第二个等式则是命题 9.4.5 与第一个等式的结合. □

若规定 $\inf \varnothing = +\infty$, 则 $j_I(M) = \inf\left\{i : \mathrm{H}^i(\mathbf{x}; M) \neq 0\right\}$ 在 $IM = M$ 时依然成立.

特别常用的是 R 为 Noether 局部环的情形. 根据定义, 任何 M-正则列 $\mathbf{x}$ 都包含于 R 的唯一极大理想 $\mathfrak{m}$.

推论 9.7.9 设 $(R, \mathfrak{m})$ 为 Noether 局部环, M 为非零有限生成 R-模. 给定 R 的元素列 $\mathbf{x} = [x_1, \ldots, x_n]$, 记 $x_1, \ldots, x_n$ 生成的理想为 I, 且设 $I \subset \mathfrak{m}$, 则以下陈述等价:

(i) $j_I(M) = n$;

(ii) $\mathrm{H}_i(\mathbf{x}; M) = 0$ 对所有 $i \geq 1$ 成立;

(iii) $\mathrm{H}_1(\mathbf{x}; M) = 0$;

(iv) $\mathbf{x}$ 是 M-正则列.

证明 (i) $\iff$ (ii): 注意到 $IM \neq M$, 因此这是定理 9.7.8 (ii) 的结论.

(ii) $\implies$ (iii): 平凡.

(iii) $\implies$ (iv): 包含于推论 9.5.6.

(iv) $\implies$ (i): 此时 $IM \neq M$, 故定理 9.7.7 (ii) 表明 $j_I(M) \geq n$, 而定理 9.7.8 (ii) 又蕴涵 $j_I(M) \leq n$. 由此得到 (i). □

9.8 对称代数和外代数的对偶性

习题

1. 设 $\mathbf{x}$ 为环 R 的元素列. 设有 R-模的无界正合列

$$\cdots \to N_{i+1} \xrightarrow{f_{i+1}} N_i \xrightarrow{f_i} N_{i-1} \to \cdots \quad (i \in \mathbb{Z})$$

而且 $\mathbf{x}$ 对每个 $i \in \mathbb{Z}$ 都是 N_i-弱正则列, 证明 $N_\bullet \otimes R/\mathbf{x}R$ 仍是正合列.

第十章 正则性和深度

10.1 可逆模

对于选定的环 R, 本节在不致混淆时将 $\underset{R}{\otimes}$ 简记为 $\otimes$. 记自由 R-模 F 的秩为 $\mathrm{rk}(F) = \mathrm{rk}_R(F)$.

定义 10.1.1 设 R 为环, M 为 R-模. 如果存在 R-模 N 以及同构 $M \otimes N \simeq R$, 则称 M 为可逆模.

举例明之, R 本身是可逆模. 若 M 可逆, 则定义 10.1.1 中的 N 也可逆. 若 M_1 和 M_2 可逆, 则 $M_1 \otimes M_2$ 亦可逆.

此外, 由 (1.3.2) 可知对于任意 R-代数 S, 函子 $S \otimes (\cdot)$ 映可逆 R-模为可逆 S-模.

引理 10.1.2 模 M 可逆当且仅当函子 $M \otimes (\cdot) : R\text{-Mod} \to R\text{-Mod}$ 是范畴等价.

证明 设 M 可逆, 取 N 使得 $M \otimes N \simeq R$, 则张量积的结合约束, 幺约束和交换约束表明 $M \otimes (\cdot)$ 和 $N \otimes (\cdot)$ 互为逆拟函子. 反之设 $M \otimes (\cdot)$ 是范畴等价, 则存在 N 使得 R 同构于 N 的像 $M \otimes N$. □

基于上述范畴等价, 定义 10.1.1 中的 N 精确到同构由 M 唯一确定.

综上, R-Mod 中所有可逆模的同构类[1]对 $\otimes$ 构成交换群, 其中的乘法来自 $\otimes$, 以 R 的同构类为幺元.

定义 10.1.3 (Picard 群) 对于环 R, 记 R-Mod 中所有可逆模的同构类对 $\otimes$ 构成的交换群为 $\mathrm{Pic}(R)$, 称为 R 的 Picard 群.

[1]注记 1.1.4 确保这确实是集合, 也可以从引理 10.1.4 推导.

以上的定义和结论适用于所有对称幺半范畴, 此处应用的不过是 $(R\text{-}\mathsf{Mod}, \otimes)$ 的特例. 为了得到实用的信息, 需要进一步的模论诠释; 特别地, 我们希望对定义 10.1.1 中的 N 得到更明确的描述.

引理 10.1.4 对于 R-模 M, 以下陈述等价:

(i) M 是有限生成投射模, 而且 $M_{\mathfrak{p}} \simeq R_{\mathfrak{p}}$ 对所有素理想 $\mathfrak{p}$ 成立;

(ii) M 可逆.

当以上任一条件成立时, 定义 $M^{\otimes(-1)} := \mathrm{Hom}_R(M, R)$, 则有典范同构 $\mathrm{ev}_M : M \otimes M^{\otimes(-1)} \xrightarrow{\sim} R$.

证明 (i) $\implies$ (ii). 命 $N := \mathrm{Hom}_R(M, R)$, 考虑典范同态

$$\mathrm{ev}_M : M \otimes N \to R, \quad x \otimes \varphi = \varphi(x).$$

对所有素理想 $\mathfrak{p}$, 命题 5.2.3 给出 $N_{\mathfrak{p}} \simeq \mathrm{Hom}_{R_{\mathfrak{p}}}(M_{\mathfrak{p}}, R_{\mathfrak{p}})$, 而 $(\mathrm{ev}_M)_{\mathfrak{p}}$ 相应地等同于 $\mathrm{ev}_{M_{\mathfrak{p}}}$. 由 $M_{\mathfrak{p}} \simeq R_{\mathfrak{p}}$ 易见 $\mathrm{ev}_{M_{\mathfrak{p}}}$ 是同构, 从而引理 2.4.1 说明 ev 是同构.

(ii) $\implies$ (i). 兹断言 M 是有限生成投射模. 一种看法是注意到 (ii) 蕴涵 M 和 N 作为对称幺半范畴 $(R\text{-}\mathsf{Mod}, \otimes)$ 的对象互为对偶, 故 [8, 命题 9.2.2] 说明两者都是有限生成投射模. 以下提供另一种直接论证.

取 N 以及同构 $\varphi : M \otimes N \xrightarrow{\sim} R$. 记 $c : M \otimes M \xrightarrow{\sim} M \otimes M$ 为交换约束, 考虑

$$M \xrightarrow{\sim} M \otimes R \xrightarrow{\mathrm{id}_M \otimes \varphi^{-1}} M \otimes M \otimes N \xrightarrow{c \otimes \mathrm{id}_N} M \otimes M \otimes N \xrightarrow{\mathrm{id}_M \otimes \varphi} M \otimes R \xrightarrow{\sim} M,$$

每段都是同构, 记其合成为 σ. 另一方面, 取 $\sum_{i=1}^n x_i \otimes y_i = \varphi^{-1}(1_R) \in M \otimes N$, 则 σ 也等同于合成同态

$$M \xrightarrow{x \mapsto (\varphi(x \otimes y_i))_i} R^{\oplus n} \xrightarrow{(a_i)_i \mapsto \sum_i a_i x_i} M.$$

因此 M 同构于 $R^{\oplus n}$ 的直和项, 断言得证.

基于对称性, N 也是有限生成投射模. 对所有素理想 $\mathfrak{p}$, 命题 5.7.2 说明 $M_{\mathfrak{p}}$ 和 $N_{\mathfrak{p}}$ 皆为有限秩自由模, $M \otimes N \simeq R$ 蕴涵 $\mathrm{rk}(M_{\mathfrak{p}}) = \mathrm{rk}(N_{\mathfrak{p}}) = 1$. 证毕. □

对于可逆模 M, 今后将张量幂的定义 (1.3.1) 扩及

$$M^{\otimes(-n)} := \left(M^{\otimes(-1)}\right)^{\otimes n}, \quad n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}.$$

不难对所有 $a, b \in \mathbb{Z}$ 得到典范同构

$$M^{\otimes(a+b)} \simeq M^{\otimes a} \otimes M^{\otimes b}, \quad (M^{\otimes a})^{\otimes b} \simeq M^{\otimes ab}. \tag{10.1.1}$$

引理 10.1.5 设 M 为可逆 R-模. 若 $t \in R$ 非零因子, 则乘法给出的同态 $M \xrightarrow{t} M$ 为单.

证明 对于 (i), 短正合列 $0 \to R \xrightarrow{t} R \to R/(t) \to 0$ 诱导正合列

$$\mathrm{Tor}_1^R(R/(t), M) \to M \xrightarrow{t} M.$$

引理 10.1.4 蕴涵 M 平坦, 故 $\mathrm{Tor}_1^R(R/(t), M) = 0$. □

以下将环 R 嵌入其全分式环 $\mathrm{Frac}(R)$ (定义 2.9.1).

定义 10.1.6 (分式理想) *若 I 是 $\mathrm{Frac}(R)$ 的 R-子模, 而且 $\mathrm{Frac}(R) \cdot I = \mathrm{Frac}(R)$, 则称 I 为 R 的分式理想; 若 I 还是可逆模, 则称之为 R 的可逆分式理想.*

注记 10.1.7 对于 $\mathrm{Frac}(R)$ 的有限生成 R-子模 I (例如可逆分式理想), 存在非零因子 $t \in R$ 使得 $tI \subset R$. 另一方面, 若 I 是分式理想, 则 $\mathrm{Frac}(R) \cdot I = \mathrm{Frac}(R)$ 蕴涵存在 $x \in I$ 和 $\frac{1}{u} \in \mathrm{Frac}(R)$ 使得 $\frac{1}{u} \cdot x = 1$, 亦即 $x = u$, 故此时 $I \cap R$ 包含 R 的某个非零因子 u.

对 $\mathrm{Frac}(R)$ 的所有 R-子模 I 和 J, 定义

$$IJ := \left\{ \sum_k x_k y_k \in \mathrm{Frac}(R) : x_k \in I,\ y_k \in J \right\};$$

若 I 和 J 是分式理想, 则 IJ 亦然. 运算 $(I, J) \mapsto IJ$ 显然满足结合律和交换律, 给出以 R 为幺元的交换幺半群, 我们关心其中的可逆元.

引理 10.1.8 *设 I 和 J 为 $\mathrm{Frac}(R)$ 的 R-子模, $IJ = R$, 则 I 和 J 既是分式理想也是有限生成投射 R-模.*

证明 显然 $\mathrm{Frac}(R)I = \mathrm{Frac}(R) = \mathrm{Frac}(R)J$, 故 I 和 J 都是分式理想. 取 $x_1, \ldots, x_n \in I$ 和 $y_1, \ldots, y_n \in J$ 使得 $\sum_{i=1}^n x_i y_i = 1$. 同态

$$I \xrightarrow{x \mapsto (xy_i)_i} R^{\oplus n} \xrightarrow{(z_i)_i \mapsto \sum_i x_i z_i} I$$

合成为恒等, 因此 I 是有限生成投射 R-模. 对称性表明 J 亦然. □

引理 10.1.9 *设 R 为半局部环, M 为有限生成投射 R-模, 而且 $\mathfrak{p} \mapsto \mathrm{rk}_{R_\mathfrak{p}}(M_\mathfrak{p})$ 是常值, 其中 $\mathfrak{p}$ 遍历 R 的素理想, 则 M 是有限秩自由 R-模.*

证明 记 R 的相异极大理想为 $\mathfrak{m}_1, \ldots, \mathfrak{m}_k$, 记所有 $M_\mathfrak{p}$ 共同的秩为 $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. 中国剩余定理 1.1.2 给出

$$\begin{aligned} M/\mathrm{rad}(R)M \simeq (R/\mathrm{rad}(R)) \otimes M &\simeq \prod_{i=1}^r (R/\mathfrak{m}_i) \otimes M \\ &\simeq \prod_{i=1}^r \kappa(\mathfrak{m}_i) \underset{R_{\mathfrak{m}_i}}{\otimes} M_{\mathfrak{m}_i}, \end{aligned}$$

而 $\kappa(\mathfrak{m}_i) \simeq R/\mathfrak{m}_i$. 既然每个 $M_{\mathfrak{m}_i}$ 有相同的秩, 记为 $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, 上式蕴涵 $M/\mathrm{rad}(R)M$ 是秩 n 自由 $R/\mathrm{rad}(R)$-模. 代入引理 5.7.1 第二部分可见 M 是秩 n 自由 R-模. □

命题 10.1.10 设 R 为环. 对 $\mathrm{Frac}(R)$ 的所有 R-子模 I 定义 R-模

$$I^{-1} := \{x \in \mathrm{Frac}(R) : xI \subset R\}.$$

(i) 若 $\mathrm{Frac}(R)$ 是半局部环, 则任何可逆模都同构于某个可逆分式理想, 而 $\mathrm{Frac}(R)$ 的任何可逆 R-子模都是可逆分式理想.

(ii) 若 I 和 J 是可逆分式理想, 则有以下同构

$$\begin{aligned} I \otimes J &\xrightarrow{\sim} IJ, \quad x \otimes y \mapsto xy, \\ I^{-1}J &\xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_R(I, J), \quad t \mapsto [x \mapsto tx], \end{aligned}$$

使得 $\mathrm{Frac}(R)$ 中的乘法反映同态的合成, 作为特例, 此时 $I^{-1} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_R(I, R) = I^{\otimes(-1)}$ 是可逆分式理想.

(iii) 设 I 是 $\mathrm{Frac}(R)$ 的 R-子模, 则 I 是可逆分式理想当且仅当 $I^{-1}I = R$.

(iv) 对所有可逆分式理想 I 和 J, 有双射

$$\begin{aligned} \left\{t \in \mathrm{Frac}(R)^{\times} : I^{-1}J = tR\right\} &\xrightarrow{1:1} \left\{R\text{-模同构 } \varphi : I \xrightarrow{\sim} J\right\} \\ t &\longmapsto [x \mapsto tx]. \end{aligned}$$

证明 (i). 给定可逆模 M, 引理 10.1.5 蕴涵 R-模同态 $M \to \mathrm{Frac}(R) \otimes M$ 为单. 留意到 $\mathrm{Frac}(R) \otimes M$ 是可逆 $\mathrm{Frac}(R)$-模, 故代入引理 10.1.9 可知 $\mathrm{Frac}(R) \otimes M \simeq \mathrm{Frac}(R)$. 问题化简到 $M \subset \mathrm{Frac}(R)$ 的情形.

此时 M 是 $\mathrm{Frac}(R)$ 的 R-子模, $\mathrm{Frac}(R) \otimes M$ 等同于 $\mathrm{Frac}(R) \cdot M \subset \mathrm{Frac}(R)$ (引理 1.6.4). 于是存在 $\mathrm{Frac}(R)$-模同构 $\mathrm{Frac}(R) \cdot M \simeq \mathrm{Frac}(R)$, 特别地, 存在 $x \in \mathrm{Frac}(R) \cdot M$ 使得对所有 $a \in R$ 皆有 $ax = 0 \iff a = 0$, 它必属于 $\mathrm{Frac}(R)^{\times}$, 故 $\mathrm{Frac}(R) \cdot M = \mathrm{Frac}(R)$.

(ii). 对于第一个同构, 取非零因子 $t \in R$ 使得 $tI \subset R$ (注记 10.1.7). 考虑交换图表

$$\begin{tikzcd} I \otimes J \arrow[r] \arrow[d, "t\otimes\mathrm{id}"'] & IJ \arrow[d, "t"] \\ (tI) \otimes J \arrow[r] & tIJ, \end{tikzcd}$$

因为 J 平坦, 竖向同态皆为单. 问题按此化到 $I \subset R$ 的情形, 而 J 平坦蕴涵 $I \otimes J \xrightarrow{\sim} IJ$ (推论 5.4.4).

对于第二个同构, 先说明 $I^{-1}J \to \mathrm{Hom}_R(I, J)$ 单. 取 $y \in I \cap R$ 使得 y 非 R 的零因子 (注记 10.1.7), 设 $t \in I^{-1}J$, 若 $ty = 0$ 则 $t = 0$, 单性得证.

对于满性, 给定 $\varphi \in \mathrm{Hom}_R(I, J)$, 取 y 如上, 命 $t := y^{-1}\varphi(y) \in I^{-1}J$, 以下说明 $\varphi(x) = tx$ 对所有 $x \in I$ 成立. 此式对 $x \in Ry$ 显然成立; 至于一般的 x, 因为 $y \in \mathrm{Frac}(R)^\times$, 存在 R 的非零因子 u 使得 $ux \in Ry$, 故 $u\varphi(x) = \varphi(ux) = utx$, 两边可消去 u.

取特例 $J = R$ 给出关于 I^{-1} 的断言.

(iii). 若 I 是可逆分式理想, 则 (ii) 将 $\mathrm{Hom}_R(I, R) \otimes I \to R$ 等同于乘法 $I^{-1} \otimes I \xrightarrow{\sim} I^{-1}I \subset R$, 故 $I^{-1}I = R$.

反之设 R-子模 $I \subset \mathrm{Frac}(R)$ 满足 $I^{-1}I = R$. 引理 10.1.8 说明 I 和 I^{-1} 都是分式理想, 也是有限生成投射 R-模. 代入注记 10.1.7 得到 R 的非零因子 t 使得 $tI^{-1} \subset R$. 现在重复 (ii) 第一个同构的论证, 以 (I^{-1}, I) 代替该处的 (I, J), 并且注意到所需的只是 $tI^{-1} \subset R$ 和 I 的平坦性, 便足以得出 $I^{-1} \otimes I \xrightarrow{\sim} I^{-1}I = R$, 因此 I 可逆.

(iv). 由 (ii) 知可逆分式理想之间的同构来自 $\mathrm{Frac}(R)^\times$. 设存在 $t \in \mathrm{Frac}(R)^\times \cap I^{-1}J$, 则所有同态 $I \to J$ 都能表成 $x \mapsto tx$ 合成 $\mathrm{End}_R(J)$ 的某个元素. 然而 (iii) 蕴涵 $\mathrm{End}_R(J) \simeq J^{-1}J = R$, 故此时 $I^{-1}J = tR$. □

命题 10.1.10 (i) 的条件在 R 为 Noether 环 (此时 $\mathrm{Ass}(R)$ 有限) 或整环 (平凡) 时成立.

推论 10.1.11 设 $\mathrm{Frac}(R)$ 是半局部环. 将所有可逆分式理想通过 $(I, J) \mapsto IJ$ 作成交换群, 记它对子群 $\{(t) : t \in \mathrm{Frac}(R)^\times\}$ 的商为 $\mathfrak{C}$.

(i) 记可逆分式理想 I 在 $\mathfrak{C}$ 中的像为 $[I]$, 则 $\mathfrak{C}$ 的元素皆可表作 $[I]$ 之形, 其中 $I \subset R$.

(ii) 我们有群同构

$$\mathfrak{C} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Pic}(R), \quad [I] \mapsto I \text{ 的同构类}.$$

证明 对所有可逆分式理想 I, 注记 10.1.7 给出 $t \in \mathrm{Frac}(R)^\times$ 使得 $tI \subset R$, 而 $[tI] = [tR][I]$, 这给出 (i).

对于 (ii), 命题 10.1.10 (i) 说明所有可逆模都来自可逆分式理想, 而 (iv) 说明可逆分式理想之间的同构来自 $\mathrm{Frac}(R)^\times$ 的乘法, 故有群同构 $\mathfrak{C} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Pic}(R)$. □

命题 10.1.12 若 R 是唯一分解整环, 则 $\mathrm{Pic}(R)$ 平凡.

证明 推论 10.1.11 将问题化约为证明 R 的所有可逆分式理想 $I \subset R$ 均为主理想.

注意到 $I \neq 0$. 任取 $f \in I \smallsetminus \{0\}$ 并且作不可约分解

$$f = up_1^{e_1} \cdots p_n^{e_n}, \quad n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, \quad e_i \in \mathbb{Z}_{\geq 1},$$

其中 $u \in R^\times$ 而 $p_1, \ldots, p_n \in R$ 是互不等价的素元.

由于 I 是有限生成投射模, 命题 5.7.4 (iii) 对所有 $1 \leq i \leq n$ 给出 $a_i \in R$ 使得 $a_i \notin (p_i)$ 而 $I[a_i^{-1}]$ 是自由 $R[a_i^{-1}]$-模, 表作 (g_i), 其中 $g_i \in R[a_i^{-1}]$. 注意到 $R[a_i^{-1}]$ 仍

是唯一分解整环 (由命题 7.3.3 推导或直接验证), 而 p_i 在其中的像仍是素元. 因此可作分解

$$g_i = p_i^{f_i} g_i', \quad f_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, \quad g_i' \notin (p_i);$$

注意到 $e_i \geq f_i$. 以下论证 $I = \left(p_1^{f_1} \cdots p_n^{f_n}\right)$.

命题 5.7.4 (iii) 说明 $\mathrm{Spec}(R)$ 可由形如 $D(a)$ 的开子集覆盖, 其中 $a \in R$ 使得 $I[a^{-1}]$ 成为 $R[a^{-1}]$ 的主理想; 事实上, 取有限多个 $D(a)$ 即可覆盖 $\mathrm{Spec}(R)$ (命题 2.5.1). 基于 §5.6 介绍的平坦下降, 对每个这般的 a 证明 $I[a^{-1}] = \left(p_1^{f_1} \cdots p_n^{f_n}\right)$ 即可.

设 $I[a^{-1}] = (g)$, 命

$$J := \left\{1 \leq j \leq n : p_j \notin R[a^{-1}]^\times\right\}.$$

注意到 $j \in J$ 等价于 p_j 是 $R[a^{-1}]$ 的素元. 在 $R[a^{-1}]$ 中 g 整除 f, 故 g 的唯一分解式只涉及素元 $\{p_j : j \in J\}$, 而且 p_j 在 g 中的幂次 d_j 满足 $d_j \leq e_j$. 对所有 $j \in J$, 作为 $R[(aa_j)^{-1}]$ 的子集有以下等式

$$(g_j) = I[(aa_j)^{-1}] = (g).$$

然而 p_j 在 $R[(aa_j)^{-1}]$ 中仍是素元, 上式遂导致 $f_j = d_j$. 综上可得 $I[a^{-1}] = \left(\prod_{j \in J} p_j^{f_j}\right) = \left(p_1^{f_1} \cdots p_n^{f_n}\right)$. □

10.2 正则局部环

回忆参数理想的定义 7.2.1. 对于 Noether 局部环 $(R, \mathfrak{m})$, 引理 7.2.2 说明 R 的参数理想恰是满足 $\mathfrak{m}^k \subset I \subset \mathfrak{m}$ 的理想 I, 其中 $k \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ 依赖于 I. 命 $d := \dim R$, 定理 7.2.8 说明 $d \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, 而且存在 $x_1, \ldots, x_d \in \mathfrak{m}$ 使之生成 R 的一个参数理想.

定义 10.2.1 (参数系) 设 $(R, \mathfrak{m})$ 为 d 维 Noether 局部环. 若 $x_1, \ldots, x_d \in \mathfrak{m}$ 生成 R 的参数理想, 则称它们为 R 的一族参数系.

引理 10.2.2 设 $(R, \mathfrak{m})$ 为 d 维 Noether 局部环, 而 $x_1, \ldots, x_d$ 是 R 的参数系. 对所有 $0 \leq i \leq d$ 皆有 $\dim(R/(x_1, \ldots, x_i)) = d - i$, 而且 $x_{i+1}, \ldots, x_d$ 的像是 $R/(x_1, \ldots, x_i)$ 的参数系.

证明 注记 7.2.9 的应用. □

一个自然的问题是: 何时能确保有参数系 $x_1, \ldots, x_d$ 使得 $\mathfrak{m} = (x_1, \ldots, x_d)$?

定义 10.2.3 (正则局部环和正则参数系) 设 $(R, \mathfrak{m})$ 为 Noether 局部环, $d := \dim R$. 若存在 $x_1, \ldots, x_d$ 使得 $\mathfrak{m} = (x_1, \ldots, x_d)$, 则称 $(R, \mathfrak{m})$ 为正则局部环, 并且称 $x_1, \ldots, x_d$ 为正则参数系.

定理 10.2.4 设 $(R, \mathfrak{m})$ 为 Noether 局部环, 记其剩余类域为 κ. 我们有 $\dim R \leq \dim_\kappa \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$, 等号成立当且仅当 R 是正则局部环. 此时 $x_1, \ldots, x_d \in \mathfrak{m}$ 是正则参数系当且仅当它们在 $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ 中的像构成 $R/\mathfrak{m}$-向量空间的基.

证明 对所有 $s \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, 推论 2.3.5 (iii) 蕴涵 κ-向量空间 $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ 能由 s 个元素生成当且仅当 $\mathfrak{m}$ 作为 R-模能由 s 个元素生成, 定理 7.2.8 遂给出 $s \geq \dim R$, 而等号成立当且仅当 R 正则; 此时 $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ 的生成元 $\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_{\dim R}$ 无非是它的基. □

注记 10.2.5 对于正则局部环 $(R, \mathfrak{m})$, 若 R 非域, 则 $\mathfrak{m}^2 \neq \mathfrak{m}$, 故存在 $x \in \mathfrak{m} \smallsetminus \mathfrak{m}^2$; 将 x 在 $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ 中的像扩充为一组基, 再取 R 中的代表元, 便有正则参数系 $x = x_1, \ldots, x_d \in \mathfrak{m}$. 于是引理 10.2.2 蕴涵 $R/(x)$ 是以 $x_2, \ldots, x_d$ 的像为正则参数系的 $d-1$ 维正则局部环. 这种技巧常用于递归论证.

定理 10.2.4 提示了以下概念的地位.

定义 10.2.6 (O. Zariski) 设 R 为 Noether 环, $\mathfrak{p}$ 为其素理想. 定义 R 在 $\mathfrak{p}$ 处的 Zariski 余切空间为 $\kappa(\mathfrak{p})$-向量空间 $\mathfrak{p}R_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}^2 R_\mathfrak{p}$, 定义 R 在 $\mathfrak{p}$ 处的 Zariski 切空间为 $\mathfrak{p}R_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}^2 R_\mathfrak{p}$ 的对偶空间.

因此 Zariski 余切空间便是对 Noether 局部环 $(R_\mathfrak{p}, \mathfrak{m} := \mathfrak{p}R_\mathfrak{p})$ 定义的 $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$, 定理 10.2.4 确保它是有限维 $\kappa(\mathfrak{p})$-向量空间. 又因为 $\mathfrak{p}$ 处的 Zariski 余切空间同构于局部化 $(\mathfrak{p}/\mathfrak{p}^2) \underset{R}{\otimes} R_\mathfrak{p}$, 当 $\mathfrak{p}$ 是极大理想时, $\mathfrak{p}/\mathfrak{p}^2$ 本身便是 Zariski 余切空间.

推论 10.2.7 对 Noether 局部环 $(R, \mathfrak{m})$ 取 $\mathfrak{m}$-进完备化 $\widehat{R}$, 则 $(\widehat{R}, \widehat{\mathfrak{m}})$ 也是 Noether 局部环, 而且 R 正则当且仅当 $\widehat{R}$ 正则.

证明 推论 8.4.6 说明 $\widehat{R}$ 为 Noether 环, 命题 8.5.1 (iii) 说明 $(\widehat{R}, \widehat{\mathfrak{m}})$ 局部, 而推论 8.5.5 第二部分说明 $\dim R = \dim \widehat{R}$. 此外命题 8.4.4 给出兼容的同构

$$R/\mathfrak{m} \xrightarrow{\sim} \widehat{R}/\widehat{\mathfrak{m}}, \quad \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 \xrightarrow{\sim} \widehat{\mathfrak{m}}/\widehat{\mathfrak{m}}^2,$$

故定理 10.2.4 蕴涵 R 和 $\widehat{R}$ 的正则性等价. □

例 10.2.8 设 $\Bbbk$ 为域, 则形式幂级数 $\Bbbk$-代数 $\Bbbk[\![X_1, \ldots, X_d]\!]$ 是正则局部环. 诚然, 它是以 $\mathfrak{m} = (X_1, \ldots, X_d)$ 为极大理想的 Noether 局部环 (引理 B.2.7), 而推论 7.5.4 给出的 $\dim \Bbbk[\![X_1, \ldots, X_d]\!] = d$ 说明 $X_1, \ldots, X_d$ 是其正则参数系.

定理 10.2.9 正则局部环必为整环.

证明 对正则局部环 $(R, \mathfrak{m})$ 记 $\kappa = R/\mathfrak{m}$, 对 $d := \dim R$ 递归地论证. 若 $d = 0$ 则 $\mathfrak{m} = 0$ 而 R 是域. 以下设 $d > 0$. 已知 R 的极小素理想个数有限, 而 $\dim_\kappa \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 \geq 1$. 对 $I := \mathfrak{m}$, $\mathfrak{m}^2$ 和 R 的所有极小素理想应用素避性质 (命题 1.1.3), 可得 $t \in \mathfrak{m}$ 使得 t 既不属于 $\mathfrak{m}^2$ 也不属于任何极小素理想. 命 $R' := R/(t)$, 它是以 $\mathfrak{m}' := \mathfrak{m}/(t)$ 为极大理

想的 Noether 局部环; 由注记 10.2.5 可见 R' 也是正则局部环, 而且

$$\dim R' = \dim R - 1,$$
$$\dim_\kappa \mathfrak{m}'/(\mathfrak{m}')^2 = \dim_\kappa \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 - 1 = \dim R - 1.$$

递归遂知 R' 是整环, 故 (t) 是素理想.

以引理 2.8.1 任选满足 $\mathfrak{p} \subset (t)$ 的极小素理想 $\mathfrak{p}$, 按构造 $t \notin \mathfrak{p}$. 说明 $\mathfrak{p} = 0$ 即可. 诚然, $\mathfrak{p}$ 的元素总能写成 $s = ta$, 其中 $a \in R$. 由 $t \notin \mathfrak{p}$ 得到 $a \in \mathfrak{p}$. 于是 $\mathfrak{p} \subset t\mathfrak{p} \subset \mathfrak{m}\mathfrak{p}$, 故 $\mathfrak{p} = \mathfrak{m}\mathfrak{p}$. 定理 2.3.4 蕴涵 $\mathfrak{p} = 0$, 证毕. □

接着考察低维的正则局部环.

例 10.2.10 满足 $\dim R = 0$ 的正则局部环 $(R, \mathfrak{m})$ 必有 $\mathfrak{m} = 0$. 由此可见 0 维正则局部环无非是域.

至于 1 维情形, 则涉及 §10.1 和 §6.5 的知识.

例 10.2.11 设 $(R, \mathfrak{m})$ 为局部整环, 若 $\mathfrak{m}$ 是非零主理想, 则 R 是 1 维正则局部环. 这是因为易见 $\dim R = 1$, 而若 $\mathfrak{m} = (x)$ 则 x 给出 R 的正则参数系.

反向则有以下结论.

引理 10.2.12 若 Noether 环 R 是 1 维正则局部环, 则 R 是离散赋值环.

证明 定理 10.2.9 说明 R 是 Noether 整环. 命 $K := \mathrm{Frac}(R)$, 兹断言 R 是赋值环. 取 R 的正则参数系 ϖ. 给定 $x = \frac{r}{s} \in K^\times$, 其中 $r, s \in R \smallsetminus \{0\}$. 若 $r, s \in (\varpi)$ 则可从中消去 ϖ; Krull 交定理的推论 3.7.2 (取 $I = (\varpi)$) 表明 ϖ 不可能无穷整除 r 或 s, 所以最终必可化到 $\varpi \nmid r$ 或 $\varpi \nmid s$ 的状况. 由于 $R^\times = R \smallsetminus (\varpi)$, 第一种情形导致 $x^{-1} = \frac{s}{r} \in R$, 而第二种情形导致 $x \in R$.

既知 R 是 Noether 赋值环, 而且 R 非域, 代入命题 6.5.4 知 R 是离散赋值环. □

命题 10.2.14 将改进例 10.2.11 和引理 10.2.12.

引理 10.2.13 设 R 为 Noether 整环, 则 R 是正规整环当且仅当对于所有 $t \in R$ 和 $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}_R(R/(t))$, 环 $R_\mathfrak{p}$ 的理想 $\mathfrak{p}R_\mathfrak{p}$ 都是主理想.

证明 对于 "当" 的方向, 命题 3.4.12 在 $\mathrm{Frac}(R)$ 中给出 $R = \bigcap_\mathfrak{p} R_\mathfrak{p}$, 其中 $\mathfrak{p}$ 遍历 $\mathrm{Ass}_R(R/(t))$ 的元素, t 遍历 $R \smallsetminus \{0\}$. 对于这些 $\mathfrak{p}$, 例 10.2.11 蕴涵 $R_\mathfrak{p}$ 是正则局部环, 因而是离散赋值环 (引理 10.2.12), 因而是主理想整环 (引理 6.5.3), 因此也是正规整环 (命题 6.2.2). 由此易见它们的交 R 也正规.

对于 "仅当" 方向, 考虑 $t \in R$ 和 $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}_R(R)$, 目标是证 $\mathfrak{p}R_\mathfrak{p}$ 是 $R_\mathfrak{p}$ 的主理想. 若 $t = 0$ 则必有 $\mathfrak{p} = 0$, 此时问题平凡. 以下设 $t \neq 0$. 鉴于 $\mathrm{Ass}_R(R)$ 相对于局部化的性状 (命题 3.4.6 (iii)), 不难以 $R_\mathfrak{p}$ 代 R, 将问题简化到 R 是局部环而 $\mathfrak{p}$ 是极大理想的情形, $\mathfrak{p} \neq 0$.

将 $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}_R(R/(t))$ 表为 $\mathrm{ann}(\overline{x})$, 其中 $\overline{x} \in R/(t)$ 是某个 $x \in R$ 的像, 因此 $\mathfrak{p}x \subset (t)$. 按照命题 10.1.10 的方式定义 $\mathrm{Frac}(R)$ 的 R-子模 $\mathfrak{p}^{-1}$. 兹断言 $\mathfrak{p}^{-1}\mathfrak{p} = R$.

显见 $\mathfrak{p}^{-1} \supset R$, 故 $\mathfrak{p}^{-1}\mathfrak{p} \supset \mathfrak{p}$, 而按定义 $\mathfrak{p}^{-1}\mathfrak{p}$ 是 R 的 R-子模, 亦即理想, 故必有 $\mathfrak{p}^{-1}\mathfrak{p} \in \{R, \mathfrak{p}\}$. 假如 $\mathfrak{p}^{-1}\mathfrak{p} = \mathfrak{p}$, 则在定理 6.1.2 (iii) 中取 $M = \mathfrak{p}$ 可知每个 $y \in \mathfrak{p}^{-1}$ 都是 R 上的整元, 正规性遂蕴涵 $\mathfrak{p}^{-1} \subset R$. 又由 $\mathfrak{p}x \subset (t)$ 知 $\frac{x}{t} \in \mathfrak{p}^{-1} \subset R$, 故 $\overline{x} = 0$ 而 $\mathfrak{p} = R$, 矛盾.

综上, $\mathfrak{p}^{-1}\mathfrak{p} = R$. 于是存在 $y \in \mathfrak{p}^{-1}$ 使得 $y\mathfrak{p} \not\subset \mathfrak{p}$, 由 $\mathfrak{p}$ 极大可得 $y\mathfrak{p} = R$, 继而得到 $\mathfrak{p} = (y^{-1})$ 是主理想. □

命题 10.2.14 设 R 为 Noether 局部环, 则以下等价:

(i) R 是 1 维正规整环,

(ii) R 是整环, 其极大理想是非零主理想,

(iii) R 是 1 维正则局部环,

(iv) R 是离散赋值环.

证明 (i) $\implies$ (ii). 任取不可逆的 $t \in R \smallsetminus \{0\}$, 则因为 $\dim R = 1$ 而 0 是素理想, $\mathrm{Ass}_R(R/(t))$ 的元素只能是 R 的极大理想 $\mathfrak{m} \neq 0$, 引理 10.2.13 遂说明 $\mathfrak{m}$ 是主理想,

(ii) $\implies$ (iii) 来自例 10.2.11.

(iii) $\implies$ (iv) 来自引理 10.2.12.

(iv) $\implies$ (i). 已知离散赋值环是 1 维主理想整环 (引理 6.5.3), 故引理 10.2.13 蕴涵 R 是 1 维正规整环. □

推论 10.2.15 设 R 为 Noether 正规整环, 则有 $\mathrm{Frac}(R)$ 中的等式

$$R = \bigcap_{\mathfrak{p}:\mathrm{ht}(\mathfrak{p})=1} R_{\mathfrak{p}}.$$

证明 包含关系 $\subset$ 显然. 对于 $\supset$ 方向, 命题 3.4.12 将 R 等同于所有 $R_{\mathfrak{p}}$ 之交, 其中要求 $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}_R(R/(t))$ 而 $t \in R \smallsetminus \{0\}$, 证明这些素理想皆满足 $\mathrm{ht}(\mathfrak{p}) = 1$ 即可. 首先 $\mathfrak{p} \neq 0$, 故 $\mathrm{ht}(\mathfrak{p}) \geq 1$. 其次, 引理 10.2.13 和主理想定理 7.3.1 蕴涵 $\mathrm{ht}(\mathfrak{p}) = \mathrm{ht}(\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}) \leq 1$. □

推论 10.2.16 设 $(R, \mathfrak{m})$ 为 Noether 局部环, 记 $\widehat{R}$ 为其 $\widehat{\mathfrak{m}}$-进完备化, 则 R 是离散赋值环当且仅当 $\widehat{R}$ 亦然.

证明 推论 8.5.3 确保 $\widehat{R}$ 是 Noether 局部环. 鉴于命题 10.2.14, 原断言等价于 R 是 1 维正则局部环当且仅当 $\widehat{R}$ 亦然. 结合推论 8.5.5 与 10.2.7 即可. □

最后应用 §8.6 的结果来探讨正则完备局部环.

推论 10.2.17 设 $(R, \mathfrak{m})$ 为正则完备局部环, 命 $\kappa = R/\mathfrak{m}$ 而 $d = \dim R$. 若 R 包含域, 则 $R \simeq \kappa[\![X_1, \ldots, X_d]\!]$.

证明 根据定义 8.6.8 之上的讨论和定理 8.6.10 (i), 存在系数域 $\Lambda \subset R$ 使得 $R \twoheadrightarrow \kappa$ 诱导 $\Lambda \xrightarrow{\sim} \kappa$; 方便起见, 以下等同 Λ 和 κ. 因为 R 是正则局部环, 可取 $x_1, \ldots, x_d \in \mathfrak{m}$ 使得它们在 $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ 中的像给出 κ-向量空间的基, 从而 $\mathfrak{m} = (x_1, \ldots, x_d)$. 考虑 κ-代数之间的连续同态

$$\Phi : \kappa[\![X_1, \ldots, X_d]\!] \to R, \quad \Phi(X_i) = x_i;$$

两边都是完备局部环, 完备性说明 Φ 良定义且为满. 假如存在 $a \in \ker(\Phi) \smallsetminus \{0\}$, 则 $\dim R \leq \dim \kappa[\![X_1, \ldots, X_d]\!]/(a) = d - 1$ (引理 7.2.6), 矛盾. 综上, Φ 是同构. □

10.3 Dedekind 整环

研究 Dedekind 整环的动机来自代数数论, 目的是在理想的层次恢复数论中的唯一分解性质. Dedekind 整环在交换环论的大框架下有直截了当的描述.

定义 10.3.1 (Dedekind 整环) 称 1 维 Noether 正规整环为 Dedekind 整环.

Dedekind 整环的原始例子是整数环 $\mathbb{Z}$. 本节最后的命题 10.3.9 将说明对于有限域扩张 $L|\mathbb{Q}$ (称为代数数域), $\mathbb{Z}$ 在 L 中的整闭包 (称为 L 的代数整数环) 也是 Dedekind 整环.

引理 10.3.2 Dedekind 整环对不含 0 的乘性子集的局部化或者是域, 或者是 Dedekind 整环.

证明 局部化保持 Noether 和正规性 (命题 6.3.2), 维数不增; 零维整环无非是域. □

根据命题 10.2.14, 局部 Dedekind 整环无非是离散赋值环.

引理 10.3.3 若 $\mathfrak{p}$ 是 Dedekind 整环 R 的非零素理想, 则 $R_{\mathfrak{p}}$ 是离散赋值环, 而 $\mathfrak{p}$ 是定义 10.1.6 所谓的可逆分式理想.

证明 由 $\mathfrak{p} \neq 0$ 可知 $\mathfrak{p}$ 极大, 故 $R_{\mathfrak{p}}$ 是局部 Dedekind 环, 因而是离散赋值环.

留意到整环的非零理想总是分式理想. 由上一步可知在每个极大理想 $\mathfrak{m}$ (或零理想) 处, $\mathfrak{p}$ 的局部化总同构于 $R_{\mathfrak{m}}$ (或等同于 $\mathrm{Frac}(R)$); 由此易知 $\mathfrak{p}$ 可逆, 详见命题 5.7.6 和引理 10.1.4. □

对于可逆分式理想 I, 可按命题 10.1.10 的方式定义可逆分式理想 I^{-1}, 它满足 $I^{-1}I = R$.

定理 10.3.4 设 R 为 Dedekind 整环, I 是其中的非零理想, 则:

(i) 存在 $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ 和非零素理想 $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_n$ 使得 $I = \mathfrak{p}_1 \cdots \mathfrak{p}_n$, 当 $n = 0$ 时右式规定为 R, 此外 n 和 $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_n$ (计重数不计顺序) 由 I 唯一确定;

(ii) I 是可逆分式理想.

证明 (i). 若 I 是素理想则断言平凡. 设 I 非素理想, 则存在素理想 $\mathfrak{p} \supset I$. 命

$$J = \{x \in R : x\mathfrak{p} \subset I\} \supset I,$$

则 $J\mathfrak{p} \subset I$; 以下说明 $J\mathfrak{p} = I$. 为此, 对 R 的所有极大理想 $\mathfrak{m}$ 说明 $(J\mathfrak{p})_{\mathfrak{m}} = I_{\mathfrak{m}}$ 即可.

先观察到 $J = \mathrm{ann}_R(\mathfrak{p}/I)$, 而对任何有限 R-模 M 皆有 $\mathrm{ann}_R(M)_{\mathfrak{m}} = \mathrm{ann}_{R_{\mathfrak{m}}}(M_{\mathfrak{m}})$, 这点可以直接验证, 或视为命题 5.2.6 的特例; 由此知理想 J 的构造和 $\mathfrak{m}$ 处的局部化交换. 此外 $(J\mathfrak{p})_{\mathfrak{m}} = J_{\mathfrak{m}}\mathfrak{p}_{\mathfrak{m}}$. 当 $\mathfrak{m} \neq \mathfrak{p}$ 时 $\mathfrak{p}_{\mathfrak{m}} = R_{\mathfrak{m}}$ 而 $J_{\mathfrak{m}} = I_{\mathfrak{m}}$. 当 $\mathfrak{m} = \mathfrak{p}$ 时, 选取离散赋值环 $R_{\mathfrak{p}}$ 的一致化元 ϖ, 表 $I_{\mathfrak{p}}$ 为 (ϖ^k), 其中 $k \geq 1$, 则 $J_{\mathfrak{m}} = (\varpi^{k-1})$, 所求等式亦成立.

上述论证顺带给出 $J \neq I$. 若 J 非素理想, 则迭代操作给出 $J = J'\mathfrak{p}'$, 依此类推; 由于 $I \subsetneq J \subsetneq J' \subsetneq \cdots$, 最终必有某个 $J^{(n)}$ 是素理想, 从而迭代停止, 使 I 分解为素理想之积.

至于唯一性, 设有 $\mathfrak{p}_1 \cdots \mathfrak{p}_n = \mathfrak{q}_1 \cdots \mathfrak{q}_m$. 注意到 $n = 0 \iff m = 0$. 若 $n \geq 1$, 则因 $\mathfrak{p}_1 \supset \mathfrak{q}_1 \cdots \mathfrak{q}_m$ 不妨设 $\mathfrak{p}_1 = \mathfrak{q}_1$. 引理 10.3.3 蕴涵 R 的素理想皆是可逆分式理想, 将两边同乘以分式理想 $\mathfrak{p}_1^{-1}$ 得 $\mathfrak{p}_2 \cdots \mathfrak{p}_n = \mathfrak{q}_2 \cdots \mathfrak{q}_m$, 然后递归地处理.

(ii). 既然 I 分解为可逆分式理想之积, 命题 10.1.10 确保 I 也可逆. □

推论 10.3.5 Dedkind 整环 R 的任何非零分式理想 I 皆可逆, 而且精确到重排有唯一表法

$$I = \mathfrak{p}_1^{e_1} \cdots \mathfrak{p}_m^{e_m}, \quad e_1, \ldots, e_m \in \mathbb{Z} \smallsetminus \{0\},$$

其中 $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ 而 $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_m$ 是 R 的相异非零素理想, 当 $m = 0$ 时右式规定为 R.

证明 注记 10.1.7 说明有 $t \in R \smallsetminus \{0\}$ 使得 $(t)I = tI \subset R$. 将非零理想 (t) 和 tI 按定理 10.3.4 (i) 分解, 集项再移项可得 I 的分解. 唯一性同样可用移项处理, 更直接的看法则是 $I_{\mathfrak{p}_i} \simeq \mathfrak{p}_i^{e_i} R_{\mathfrak{p}_i}$. □

推论 10.3.6 对于 Dedekind 整环 R 的所有非零分式理想 I, 记非零素理想 $\mathfrak{p}$ 在推论 10.3.5 的分解中出现的指数为 $v_{\mathfrak{p}}(I) \in \mathbb{Z}$. 则 $I \supset J$ 当且仅当 $v_{\mathfrak{p}}(I) \leq v_{\mathfrak{p}}(J)$ 对所有 $\mathfrak{p}$ 成立.

证明 注意到 $I_{\mathfrak{p}} = \mathfrak{p}^{v_{\mathfrak{p}}(I)} R_{\mathfrak{p}}$, 而 $I \subset J$ 当且仅当 $I_{\mathfrak{p}} \subset J_{\mathfrak{p}}$ 对所有 $\mathfrak{p}$ 成立. □

基于推论 10.3.6, 可以从 I 和 J 的分解读出非零分式理想 $I + J$ 和 $I \cap J$ 的分解.

推论 10.3.7 设 R 为 Dedekind 整环.

(i) 对任何理想 $I \supset J \neq 0$ 都存在 $x \in R$ 使得 $I = J + (x)$.

(ii) 对任何非零理想 I 和 $x \in I \smallsetminus \{0\}$ 都存在 $y \in I$ 使得 $I = (x, y)$.

证明 (i). 作分解 $I = \mathfrak{p}_1^{e_1} \cdots \mathfrak{p}_m^{e_m}$ 和 $J = \mathfrak{p}_1^{f_1} \cdots \mathfrak{p}_m^{f_m}$, 其中 $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_m$ 是相异非零素理想而 $f_i \geq e_i \geq 0$; 见推论 10.3.6. 对所有 i 取 $x_i \in \mathfrak{p}_i^{e_i} \smallsetminus \mathfrak{p}_i^{e_i+1}$, 再以中国剩余定理 1.1.2 取 $x \in R$ 使得

$$x \equiv x_i \pmod{\mathfrak{p}_i^{f_i}}, \quad 1 \leq i \leq m,$$

则考虑在每个非零素理想处的局部化易见 $I = J + (x)$.

(ii) 是 (i) 对 $I \supset (x)$ 的应用. □

按定义 10.1.3 取 Dedekind 整环的 Picard 群 $\mathrm{Pic}(R)$. 根据推论 10.1.11 和定理 10.3.4 (ii), 它同构于以下的群 $\mathfrak{C}$: 其元素是非零理想 $I \subset R$ 对

$$I_1 \sim I_2 \iff \exists t \in \mathrm{Frac}(R)^\times,\ I_1 = tI_2$$

的等价类, 二元运算来自理想相乘, 以非零主理想的等价类为幺元.

推论 10.3.8 设 R 为 Dedekind 整环, 则 R 是唯一分解整环当且仅当它是主理想整环.

证明 说明 "仅当" 方向即可. 设 R 为唯一分解 Dedekind 整环. 对于任何非零理想 I, 已知它是可逆分式理想, 则因为命题 10.1.12 蕴涵 $\mathrm{Pic}(R)$ 平凡, 先前对 $\mathrm{Pic}(R) \simeq \mathfrak{C}$ 的描述蕴涵 I 必为主理想. □

命题 10.3.9 设 R 为 Dedekind 整环, $K := \mathrm{Frac}(R)$ 而域 L 是 K 的有限扩张. 记 R 在 L 中的整闭包为 S, 则:

(i) S 是 Dedekind 整环;

(ii) 当 $L|K$ 可分或 R 是某个域上的有限生成代数时, S 是有限 R-代数;

(iii) $\mathrm{Spec}(S) \to \mathrm{Spec}(R)$ 为满, 其纤维皆有限, 而且当 $L|K$ 正规时 $\mathrm{Aut}(L|K)$ 在每个纤维上传递地作用.

证明 (i). Krull–秋月定理 6.9.3 (i) 蕴涵 S 是 1 维 Noether 整环, 而 S 作为整闭包是正规的.

(ii) 是定理 6.8.1 和 6.8.2 的综合.

(iii) 来自定理 6.6.3 和 Krull–秋月定理 6.9.3 (ii). □

对于 Dedekind 整环上的有限生成模, 也有一些和主理想环情形 (参考 [9, §12.6]) 类似的结论, 本章习题将有所介绍.

10.4 深度

本节和 §9.7 紧密相关, 同样采用约定 9.3.10 的符号来代表环中的元素列. 首先给出深度的一般定义, 然后探讨 Noether 环和 Noether 局部环的特例.

定义 10.4.1 (深度) 设 R 为环, I 为其理想, M 为 R-模. 定义 M 的 I-深度 $\mathrm{depth}_I(M) \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \sqcup \{+\infty\}$ 如下:

◇ 若 $IM = M$, 则 $\mathrm{depth}_I(M) := +\infty$;

◇ 若 $IM \neq M$, 则 $\mathrm{depth}_I(M) := \sup\{$包含于 I 的 M-正则列的长度$\}$.

命题 10.4.2 在上述场景中, 若要求 R 为 Noether 环而 M 有限生成, 则

$$\mathrm{depth}_I(M) = j_I(M) \quad (\text{定义 } 9.7.1);$$

若进一步要求 $IM \neq M$, 则 $\mathrm{depth}_I(M) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, 而且所有极长 M-正则列 (定义 9.7.5) 的长度相同.

证明 应用定理 9.7.7. □

推论 10.4.3 给定 Noether R 的理想 I 和有限生成 R-模 M.

(i) 若 $\mathbf{x} = [x_1, \ldots, x_r]$ 为包含于理想 I 的 M-弱正则列, 则有

$$\mathrm{depth}_I(M) = r + \mathrm{depth}_I(M/\mathbf{x}M).$$

(ii) 对 R 的所有乘性子集 U 皆有

$$\mathrm{depth}_I(M) \leq \mathrm{depth}_{I[U^{-1}]}(M[U^{-1}]).$$

(iii) 当 I 为真理想时,

$$\begin{aligned}\mathrm{depth}_I(M) &= \inf_{\mathfrak{p}\in V(I)} \mathrm{depth}_{\mathfrak{p}R_\mathfrak{p}}(M_\mathfrak{p}) \\ &= \inf_{\mathfrak{m}\in V(I)\cap\mathrm{MaxSpec}(R)} \mathrm{depth}_{\mathfrak{m}R_\mathfrak{m}}(M_\mathfrak{m})\end{aligned}$$

(iv) 若 R 是局部环, 记其极大理想为 $\mathfrak{m}$, 则 $\mathfrak{m}$-进完备化给出的 $\widehat{R}$-模 $\widehat{M}$ 满足

$$\mathrm{depth}_{\widehat{\mathfrak{m}}}(\widehat{M}) = \mathrm{depth}_\mathfrak{m}(M).$$

证明 鉴于命题 10.4.2, 这不外是命题 9.7.2 的改述. □

例 10.4.4 引理 9.7.6 说明当 R 为 Noether 环时

$$\mathrm{depth}_I(M) = 0 \iff \mathrm{Ass}(M) \cap V(I) \neq \varnothing.$$

引理 10.4.5 设 $(R, \mathfrak{m})$ 为 Noether 局部环, $\mathfrak{p} \subsetneq \mathfrak{m}$ 为素理想, 而且两者之间没有其它素理想. 对于有限生成 R-模 M 和 $n \in \mathbb{Z}$, 设 $\mathrm{Ext}^n_{R_\mathfrak{p}}(\kappa(\mathfrak{p}), M_\mathfrak{p}) \neq 0$, 则 $\mathrm{Ext}^{n+1}_R(\kappa(\mathfrak{m}), M) \neq 0$.

证明 引理 9.6.3 蕴涵 $R_\mathfrak{p} \otimes \mathrm{Ext}^n_R(R/\mathfrak{p}, M) \simeq \mathrm{Ext}^n_{R_\mathfrak{p}}(\kappa(\mathfrak{p}), M_\mathfrak{p}) \neq 0$, 故 $\mathrm{Ext}^n_R(R/\mathfrak{p}, M) \neq 0$. 取 $x \in \mathfrak{m} \smallsetminus \mathfrak{p}$. 短正合列

$$0 \to R/\mathfrak{p} \xrightarrow{x} R/\mathfrak{p} \to R/(\mathfrak{p} + (x)) \to 0$$

诱导正合列

$$\mathrm{Ext}^n_R(R/\mathfrak{p}, M) \xrightarrow{x} \mathrm{Ext}^n_R(R/\mathfrak{p}, M) \to \mathrm{Ext}^{n+1}_R(R/(\mathfrak{p}+(x)), M).$$

此处的 Ext-模都是有限生成 R-模 (命题 9.6.1), 故定理 2.3.4 (代入 $I = (x)$) 蕴涵 x 给出的同态非满; 于是 $\mathrm{Ext}^{n+1}_R(R/(\mathfrak{p}+(x)), M) \neq 0$.

由于包含 $\mathfrak{p}+(x)$ 的素理想只有 $\mathfrak{m}$, 定理 3.3.3 说明 $R/(\mathfrak{p}+(x))$ 是 Artin 环, 因而是有限长度 R-模 (定理 3.3.1); 其合成因子皆同构于 $\kappa(\mathfrak{m})$. 假如 $\mathrm{Ext}^{n+1}_R(\kappa(\mathfrak{m}), M) = 0$, 则考虑合成列可见 $\mathrm{Ext}^{n+1}_R(R/(\mathfrak{p}+(x)), M) = 0$, 矛盾. □

命题 10.4.6 设 R 为 Noether 环, M 为有限生成 R-模. 设 $\mathfrak{p} \subsetneq \mathfrak{q}$ 为 R 的素理想. 若它们能置入素理想列

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_0 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathfrak{p}_r = \mathfrak{q},$$

使得该列无法以插项来加细, 则

$$\begin{aligned}\mathrm{depth}_{\mathfrak{q}R_\mathfrak{q}}(M_\mathfrak{q}) &\leq \mathrm{depth}_{\mathfrak{p}R_\mathfrak{p}}(M_\mathfrak{p}) + r \\ &\leq \mathrm{depth}_{\mathfrak{p}R_\mathfrak{p}}(M_\mathfrak{p}) + \dim R_\mathfrak{q}/\mathfrak{p}R_\mathfrak{q}.\end{aligned}$$

证明 处理第一个不等式即可. 鉴于分段局部化 (1.7.4), 问题简化到特例 $r = 1$. 当 $\mathfrak{p} \notin \mathrm{Supp}(M)$ 时断言平凡. 以下设 $\mathfrak{p} \in \mathrm{Supp}(M)$, 因而 $\mathfrak{q} \in \mathrm{Supp}(M)$ 而 $n := \mathrm{depth}_{\mathfrak{p}R_\mathfrak{p}} M_\mathfrak{p} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. 此时 $\mathrm{Ext}^n_{R_\mathfrak{p}}(\kappa(\mathfrak{p}), M_\mathfrak{p}) \neq 0$, 代入引理 10.4.5 知

$$\mathrm{Ext}^{n+1}_{R_\mathfrak{q}}(\kappa(\mathfrak{q}), M_\mathfrak{q}) \neq 0,$$

故 $\mathrm{depth}_{\mathfrak{q}R_\mathfrak{q}}(M_\mathfrak{q}) \leq n+1$. 证毕. □

注意到当 $\mathfrak{p} \subsetneq \mathfrak{q}$ 给定, 命题 10.4.6 中的素理想列总是存在, 这是定理 7.2.8 对局部环 $R_\mathfrak{q}/\mathfrak{p}R_\mathfrak{q}$ 的应用.

推论 10.4.7 在命题 10.4.6 的场景中, 设 $\mathfrak{p} \in \mathrm{Supp}(M)$, 则

$$\dim M_\mathfrak{q} - \mathrm{depth}_{\mathfrak{q}R_\mathfrak{q}}(M) \geq \dim M_\mathfrak{p} - \mathrm{depth}_{\mathfrak{p}R_\mathfrak{p}}(M).$$

证明 此时也有 $\mathfrak{q} \in \mathrm{Supp}(M)$, 断言中的所有量都是整数. 等同 $M_\mathfrak{p}$ 和 $(M_\mathfrak{q})_{\mathfrak{p}R_\mathfrak{q}}$, 则引理 7.1.4 (iii) 和引理 7.1.7 (ii) 蕴涵

$$\begin{aligned}\dim M_\mathfrak{p} + \dim R_\mathfrak{q}/\mathfrak{p}R_\mathfrak{q} &= \mathrm{codim}\left(V(\mathfrak{p}R_\mathfrak{q}), \mathrm{Supp}(M_\mathfrak{q})\right) + \dim R_\mathfrak{q}/\mathfrak{p}R_\mathfrak{q} \\ &= \mathrm{ht}\left(\mathfrak{p}R_\mathfrak{q}/\mathrm{ann}(M_\mathfrak{q})\right) + \dim R_\mathfrak{q}/\mathfrak{p}R_\mathfrak{q} \\ &\leq \dim R_\mathfrak{q}/\mathrm{ann}(M_\mathfrak{q}) = \dim M_\mathfrak{q}.\end{aligned}$$

结合命题 10.4.6 以完成证明. □

推论 10.4.8 设 $(R,\mathfrak{m})$ 为 Noether 局部环, M 为有限生成非零 R-模, 则

$$\operatorname{depth}_{\mathfrak{m}}(M) \leq \inf_{\mathfrak{p}\in\operatorname{Ass}(M)} \dim R/\mathfrak{p}.$$

特别地, $\operatorname{depth}_{\mathfrak{m}}(M) \leq \dim M$.

证明 回忆到 $\operatorname{Ass}(M) \neq \varnothing$. 若 $\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass}(M)$ 则 $\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}} \in \operatorname{Ass}(M_{\mathfrak{p}})$ (引理 3.4.4 (i)), 故例 10.4.4 说明 $\operatorname{depth}_{\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}}(M_{\mathfrak{p}}) = 0$. 代入命题 10.4.6 (取 $\mathfrak{q} = \mathfrak{m}$) 即得 $\operatorname{depth}_{\mathfrak{m}}(M) \leq \dim R/\mathfrak{p}$. □

特别地, 若 Noether 局部环 $(R,\mathfrak{m})$ 上的有限生成模 M 满足 $\dim M = 0$, 则自动有 $\operatorname{depth}_{\mathfrak{m}} M = 0$.

10.5 Cohen–Macaulay 性质

对于 Noether 局部环 $(R,\mathfrak{m})$ 和有限生成 R-模 M, 推论 10.4.8 说明 $M \neq 0$ 时 $\operatorname{depth}_{\mathfrak{m}}(M) \leq \dim M$. 本节的兴趣在于等号成立的情形.

引理 10.5.1 设 $(R,\mathfrak{m})$ 为 Noether 局部环. 若有限生成非零 R-模 M 满足 $\operatorname{depth}_{\mathfrak{m}}(M) = \dim M$, 则对所有 $\mathfrak{p} \in \operatorname{Supp}(M)$ 皆有 $\operatorname{depth}_{\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}}(M_{\mathfrak{p}}) = \dim M_{\mathfrak{p}}$.

证明 推论 10.4.7 和 10.4.8 给出

$$\dim M - \operatorname{depth}_{\mathfrak{m}}(M) \geq \dim M_{\mathfrak{p}} - \operatorname{depth}_{\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}}(M_{\mathfrak{p}}) \geq 0.$$

明所欲证. □

定义 10.5.2 (Cohen–Macaulay 模和环) 设 R 为 Noether 环, M 为有限生成 R-模. 若对所有 $\mathfrak{p} \in \operatorname{Supp}(M)$ 皆有

$$\operatorname{depth}_{\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}}(M_{\mathfrak{p}}) = \dim M_{\mathfrak{p}},$$

则称 M 为 Cohen–Macaulay 模.

若 R 作为 R-模是 Cohen–Macaulay 模, 则称 R 为 Cohen–Macaulay 环.

- ◇ 定义 10.5.2 的条件只需要对 $\operatorname{Supp}(M) \cap \operatorname{MaxSpec}(R)$ 的元素来检验, 这是引理 10.5.1 的应用.
- ◇ 若 U 是 R 的乘性子集, M 是 Cohen–Macaulay R-模, 则 $M[U^{-1}]$ 是 Cohen–Macaulay $R[U^{-1}]$-模, 这是缘于局部化的传递性 (引理 1.7.8).
- ◇ 特别地, Cohen–Macaulay 环的局部化仍是 Cohen–Macaulay 环.

先为 Noether 局部环上的 Cohen–Macaulay 模确立若干初步性质.

命题 10.5.3 设 $(R,\mathfrak{m})$ 为 Noether 局部环.

(i) 若 R 是正则局部环 (定义 10.2.3), 则 R 是 Cohen–Macaulay 环, 事实上 R 的任何正则参数系 $x_1,\ldots,x_d$ 都给出 R-正则列.

反之, 若 $\mathbf{x}=[x_1,\ldots,x_e]$ 是生成 $\mathfrak{m}$ 的 R-正则列, 则 R 是满足 $\dim R=e$ 的正则局部环, 以 $x_1,\ldots,x_d$ 为正则参数系.

(ii) 设 M 为有限生成 R-模, 则 M 是 Cohen–Macaulay R-模当且仅当其 $\mathfrak{m}$-进完备化 $\widehat{M}$ 是 Cohen–Macaulay $\widehat{R}$-模.

(iii) 设 $\varphi: R\to S$ 为 Noether 局部环之间的满同态, 而 N 为有限生成 S-模, 则 N 是 Cohen–Macaulay S-模当且仅当它是 Cohen–Macaulay R-模.

证明 (i). 对于第一部分, 已知 $d=\dim R$. 鉴于推论 10.4.8 的不等式, 说明正则参数系 $x_1,\ldots,x_d$ 必为 R-正则列即可. 不妨设 $d\geq 1$.

注意到 $x_1\neq 0$ 而 R 是整环 (定理 10.2.9). 引理 10.2.2 蕴涵 $R/(x_1)$ 是以 $x_2,\ldots,x_d$ 的像为正则参数系的正则局部环. 递归可知 $x_1,\ldots,x_d$ 是 R 的正则参数系.

至于第二部分, 命 $d=\dim R$. 给定 $\mathbf{x}$, 推论 10.4.8 给出 $e\leq d$, 而定理 10.2.4 给出 $d\leq \dim_{\kappa(\mathfrak{m})}\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2\leq e$. 综之 $d=e$ 而 $\mathbf{x}$ 是正则参数系.

(ii). 回忆到 $(\widehat{R},\widehat{\mathfrak{m}})$ 仍是 Noether 局部环, 而且 $M=0 \iff \widehat{M}=0$ (命题 8.5.4). 结合推论 8.5.5 和 10.4.3 (iv) 以完成证明.

(iii). 注意到 φ 是定义 1.11.7 所谓的局部同态. 由显然的环同构 $R/\mathrm{ann}_R(N)\xrightarrow{\sim} S/\mathrm{ann}_S(N)$ 可见 $\dim_R N=\dim_S N$. 另一方面, 由 N-正则列的定义易见 N 对 S 和 R 的深度相同. □

定理 10.5.4 设 $(R,\mathfrak{m})$ 为局部环, $M\neq 0$ 为 Cohen–Macaulay R-模.

(i) 对所有 $\mathfrak{p}\in\mathrm{Ass}(M)$ 皆有 $\dim R/\mathfrak{p}=\dim(M)$.

(ii) 对所有真理想 I 皆有 $\dim M/IM+\mathrm{depth}_I(M)=\dim M$.

(iii) 对于元素列 $\mathbf{x}=[x_1,\ldots,x_r]$, 以下等价:

(a) $\mathbf{x}$ 是 M-正则列,

(b) $\dim M/\mathbf{x}M+r=\dim M$.

(iv) 设 $\mathbf{x}=[x_1,\ldots,x_r]$ 是 M-正则列, 则 $\mathbf{x}$ 极长当且仅当 $(x_1,\ldots,x_r)$ 是 M 的参数理想 (定义 7.2.1).

证明 (i). 由 $\mathrm{Supp}(M)=\bigcup_{\mathfrak{p}\in\mathrm{Ass}(M)}V(\mathfrak{p})$ 知 $\dim R/\mathfrak{p}\leq\dim\mathrm{Supp}(M)=\dim M$, 而推论 10.4.8 给出 $\mathrm{depth}_{\mathfrak{m}} M\leq\dim R/\mathfrak{p}$.

(ii). 对 $\operatorname{depth}_I(M)$ 递归. 若 $\operatorname{depth}_I(M) = 0$ 则例 10.4.4 给出 $\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass}(M)$ 使得 $I \subset \mathfrak{p}$. 此时引理 2.4.8 (iii) 给出

$$\operatorname{Supp}(M/IM) = V(I) \cap \operatorname{Supp}(M) \supset V(\mathfrak{p}),$$

故等同有限生成 R-模和拓扑空间的 Krull 维数可见

$$\begin{aligned}\dim M \geq \dim M/IM = \dim \operatorname{Supp}(M/IM) \geq \dim V(\mathfrak{p}) \\ = \dim R/\mathfrak{p} \overset{\text{(i)}}{=\!=} \dim M.\end{aligned}$$

若 $\operatorname{depth}_I(M) > 0$, 取 $x \in I$ 使得 $M \xrightarrow{x} M$ 为单而 $M/xM \neq 0$. 结合引理 7.2.6 第二部分和推论 10.4.3 (i), 问题可以化到 M/xM 的情形处理.

(iii). 取 $I = (x_1, \ldots, x_r)$. 由 $j_I(M) = \operatorname{depth}_I(M)$ 和 (ii) 可知 (b) 等价于 $j_I(M) = r$, 故应用推论 9.7.9 知 (a) 和 (b) 等价.

(iv). 注意到 $\mathbf{x}$ 包含于 $\mathfrak{m}$. 由引理 7.1.7 (iii) 和参数理想的定义知 $(x_1, \ldots, x_r)$ 是 M 的参数理想当且仅当 $\dim M/\mathbf{x}M = 0$; 根据 (iii), 这又相当于 $r = \dim M$, 也相当于 $\mathbf{x}$ 极长. □

接着考察一般的 Noether 环.

引理 10.5.5 设 R 为 Noether 环, M 为有限生成 R-模, $\mathbf{x}$ 为 M-正则列.

(i) 若 M 是 Cohen–Macaulay 模, 则 $M/\mathbf{x}M$ 亦然.

(ii) 设 R 为局部环, 则 $M/\mathbf{x}M$ 是 Cohen–Macaulay R-模 (或 $R/\mathbf{x}R$-模, 见命题 10.5.3 (iii)) 当且仅当 M 亦然.

证明 先考虑 (ii) 的场景. 结合推论 10.4.3 (i) 与定理 10.5.4 (iii), 可见 M 是 Cohen–Macaulay 模当且仅当 $M/\mathbf{x}M$ 亦然.

对于 (i) 的场景, 考虑任意 $\mathfrak{p} \in \operatorname{Supp}(M/\mathbf{x}M) \subset \operatorname{Supp}(M)$, 则 $M_{\mathfrak{p}}$ 是 Cohen–Macaulay 模, 而 $\mathbf{x}$ 的像 $\mathbf{x}_{\mathfrak{p}}$ 是 $M_{\mathfrak{p}}$-正则列, 代入 (ii) 可见 $(M/\mathbf{x}M)_{\mathfrak{p}}$ 是 Cohen–Macaulay $R_{\mathfrak{p}}$-模. □

定理 10.5.6 设 R 为 Noether 局部环, 而且存在满足 $\operatorname{Supp}(M) = \operatorname{Spec}(R)$ 的 Cohen–Macaulay 模 M, 则:

(i) 所有 R 中的极长 (亦即无法再插项) 的素理想链 $\mathfrak{p}_0 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathfrak{p}_n$ 都有相同的长度 $n = \dim R$;

(ii) R 是等维环 (定义 7.1.8);

(iii) 对所有素理想 $\mathfrak{p}$ 都有 $\dim R = \dim R_{\mathfrak{p}} + \dim R/\mathfrak{p}$;

(iv) R 是悬链环 (定义 7.10.1);

(v) 前提中的 M 对所有真理想 I 皆满足 $\operatorname{depth}_I(M) = \operatorname{ht}(I)$.

证明 (ii) 和 (iii) 是 (i) 的简单结论. 以下对 $\dim R$ 递归证明 (i). 当 $\dim R = 0$ 时问题是平凡的. 设 $\dim R > 0$, 则也必然有 $n > 0$. 素避性质 (命题 1.1.3) 说明存在 $x \in \mathfrak{p}_1$ 使得 x 不包含于任何极小理想. 兹断言可取到 $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$, 以 x^n 代 x 后可要求 $\mathfrak{p}_1 \in \operatorname{Ass}_R(M/xM)$.

注意到 $\mathfrak{p}_0$ 是 $\operatorname{Supp}(M) = \operatorname{Spec}(R)$ 对 $\subset$ 的极小元, 故 $x \notin \mathfrak{p}_0$ 而 $\mathfrak{p}_0 \in \operatorname{Ass}_R(M)$. 取子模 $N \subset M$ 使得 $N \simeq R/\mathfrak{p}_0$. 定理 4.6.4 给出 $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ 使得 $N \cap x^n M \subset xN$. 记 $\overline{N} \subset M/x^n M$ 为 N 的像, 则有满同态

$$\overline{N} \twoheadrightarrow N/xN \simeq R/(\mathfrak{p}_0 + (x)) \twoheadrightarrow R/\mathfrak{p}_1.$$

上式表明 $\mathfrak{p}_1 \in \operatorname{Supp}(\overline{N})$. 由 $\mathfrak{p}_0 + (x^n) \subset \operatorname{ann}(\overline{N})$ 可知 $\mathfrak{p}_1$ 是 $\operatorname{Supp}(\overline{N}) = V(\operatorname{ann}(\overline{N}))$ 对 $\subset$ 的极小元, 故 $\mathfrak{p}_1 \in \operatorname{Ass}_R(\overline{N}) \subset \operatorname{Ass}(M/x^n M)$. 断言得证.

按上述方式取 x. 等同 $\operatorname{Spec}(R/(x))$ 与 $V(x) \subset \operatorname{Spec}(R)$, 则 $\operatorname{Ass}_R(M/xM) = \operatorname{Ass}_{R/(x)}(M/xM)$ (命题 3.4.6 (vi)). 注意到 x 非 R 的零因子, 引理 7.2.6 遂导致 $\dim R/(x) = \dim R - 1$. 引理 10.5.5 (i) 表明 M/xM 是 Cohen–Macaulay $R/(x)$-模, 而

$$\operatorname{Supp}(M/xM) = \operatorname{Supp}(M) \cap V(x) = \operatorname{Spec}(R/(x)).$$

定理 10.5.4 (i) 遂说明 $\mathfrak{p}_1/(x)$ 是 $R/(x)$ 的极小理想, 而

$$\mathfrak{p}_1/(x) \subsetneq \cdots \subsetneq \mathfrak{p}_n/(x)$$

是 $R/(x)$ 的极长素理想链. 递归假设给出 $n - 1 = \dim R/(x) - 1 = \dim R - 1$.

(iv). 命题 7.10.3 表明对所有素理想 $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{q}$ 证 $\operatorname{ht}(\mathfrak{q}) = \operatorname{ht}(\mathfrak{p}) + \operatorname{ht}(\mathfrak{q}/\mathfrak{p})$ 即可. 局部化保持关于 M 的条件, 故不妨设 R 是以 $\mathfrak{q}$ 为极大理想的局部环, 问题化为证 $\dim R = \operatorname{ht}(\mathfrak{p}) + \dim R/\mathfrak{p}$, 此即 (iii).

(v). 回忆到 $\operatorname{ht}(I) := \inf_{\mathfrak{p} \supset I} \operatorname{ht}(\mathfrak{p})$, 而推论 10.4.3 (iii) 表明

$$\operatorname{depth}_I(M) = \inf_{\mathfrak{p} \supset I} \operatorname{depth}_{\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}}(M_{\mathfrak{p}}).$$

但 $M_{\mathfrak{p}}$ 是满足 $\operatorname{Supp}(M_{\mathfrak{p}}) = \operatorname{Spec}(R_{\mathfrak{p}})$ 的 Cohen–Macaulay $R_{\mathfrak{p}}$-模, 因此 $\operatorname{ht}(\mathfrak{p}) = \dim R_{\mathfrak{p}} = \dim M_{\mathfrak{p}} = \operatorname{depth}_{\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}}(M_{\mathfrak{p}})$. □

定理 10.5.6 的前提在 R 为 Cohen–Macaulay 环时成立 (取 $M = R$).

推论 10.5.7 设 Noether 局部环 R 为 Cohen–Macaulay 环, 则对所有真理想 I 都有 $\operatorname{ht}(I) + \dim(R/I) = \dim R$.

证明 定理 10.5.4 (ii) 给出 $\dim R/I + \operatorname{depth}_I(R) = \dim R$, 代入定理 10.5.6 (v). □

依此可给出 Cohen–Macaulay 环的一则刻画, 对局部和非局部情形一体适用. 对于 Noether 环 R 的真理想 I, 如果 $\mathrm{Ass}_R(R/I)$ 的元素都是 $(V(I), \subset)$ 的极小元, 则称 I 为**非混合理想**[2].

定理 10.5.8 Noether 环 R 是 Cohen–Macaulay 环当且仅当对于所有真理想 $I \subset R$, 若 I 可由 $\mathrm{ht}(I)$ 个元素生成, 则 I 是非混合的.

证明 对于 "仅当" 方向, 问题易化到 R 为局部环的情形来讨论. 设 $I = (x_1, \ldots, x_r)$, 其中 $r := \mathrm{ht}(I)$. 推论 10.5.7 说明 $\dim R/I + r = \dim R$, 故定理 10.5.4 (iii) 说明 $\mathbf{x} = [x_1, \ldots, x_r]$ 是 R-正则列. 引理 10.5.5 说明 R/I 是 Cohen–Macaulay 模, 而定理 10.5.4 (i) 给出所求的非混合性质.

对于 "当" 的方向, 考虑 R 的素理想 $\mathfrak{p}$, 命 $r := \mathrm{ht}(\mathfrak{p})$. 按推论 7.3.2 的方式取 $x_1, \ldots, x_r \in \mathfrak{p}$ 使得:

- ◇ $\mathrm{ht}((x_1, \ldots, x_i)) = i$, 特别地 $(x_1, \ldots, x_i)$ 非混合;
- ◇ 当 $i < r$ 时 x_{i+1} 不属于 $V((x_1, \ldots, x_i))$ 的任何极小元, 因而非混合性质蕴涵 x_{i+1} 不属于 $\mathrm{Ass}(R/(x_1, \ldots, x_i))$ 的任何元素.

基于零因子和相伴素理想的关系 (命题 3.4.6 (ii)), 推得 $\mathbf{x} = [x_1, \ldots, x_r]$ 是包含于 $\mathfrak{p}$ 的 R-正则列, 而

$$r \leq \mathrm{depth}_{\mathfrak{p}}(R) \leq \mathrm{depth}_{\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}}(R_{\mathfrak{p}}) \leq \dim R_{\mathfrak{p}} = \mathrm{ht}(\mathfrak{p}) = r.$$

因此 $R_{\mathfrak{p}}$ 是 Cohen–Macaulay 环. □

定理 10.5.6 (iv) 可以进一步强化, 为此需要以下事实.

定理 10.5.9 设 R 为 Noether 环, $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ 而 M 为 Cohen–Macaulay R-模, 则 $R[X_1, \ldots, X_n] \underset{R}{\otimes} M$ 是 Cohen–Macaulay $R[X_1, \ldots, X_n]$-模.

证明 处理 $n = 1$ 情形足矣. 命 $M[X] := R[X] \underset{R}{\otimes} M$, 给定 $R[X]$ 的极大理想 $\mathfrak{m}$ 使得 $M[X]_{\mathfrak{m}} \neq 0$, 命 $\mathfrak{p} := \mathfrak{m} \cap R$, 则 $M[X]_{\mathfrak{m}} \simeq R[X]_{\mathfrak{m}} \underset{R_{\mathfrak{p}}}{\otimes} M_{\mathfrak{p}}$, 故 $M_{\mathfrak{p}} \neq 0$.

取 $M_{\mathfrak{p}}$-正则列 $\mathbf{x} = [x_1, \ldots, x_d]$ 使得 $d = \dim M_{\mathfrak{p}}$. 命

$$Q := M[X]_{\mathfrak{m}} / \mathbf{x} M[X]_{\mathfrak{m}} \simeq R[X]_{\mathfrak{m}} \underset{R_{\mathfrak{p}}}{\otimes} M_{\mathfrak{p}} / \mathbf{x} M_{\mathfrak{p}}.$$

注意到 $\mathbf{x}$ 包含于 $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{m}$, 故 $Q \neq 0$. 又因为 $R_{\mathfrak{p}} \to R_{\mathfrak{p}}[X]$ 和 $R_{\mathfrak{p}}[X] \to R[X]_{\mathfrak{m}}$ 皆平坦, 故 $R_{\mathfrak{p}} \to R[X]_{\mathfrak{m}}$ 平坦; 综上, $\mathbf{x}$ 也是 $M[X]_{\mathfrak{m}}$-正则列.

[2] 一些文献对非混合理想的定义更严格, 要求 $\mathrm{Ass}_R(R/I)$ 的元素有相同高度.

根据引理 10.5.5 (ii), 证明 Q 是 Cohen–Macaulay 模即可说明 $M[X]_{\mathfrak{m}}$ 是 Cohen–Macaulay 模. 记 $\kappa := \kappa(\mathfrak{p})$, 兹断言

$$\begin{aligned}\operatorname{Supp}(Q) &= \{\mathfrak{q} \in \operatorname{Spec} R[X] : \mathfrak{q} \cap R = \mathfrak{p}\} \\ &\simeq \operatorname{Spec}(\kappa[X]).\end{aligned}$$

诚然, $\mathbf{x}$ 是极长 $M_{\mathfrak{p}}$-正则列, 故 $\operatorname{depth}_{\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}}(M_{\mathfrak{p}}/\mathbf{x}M_{\mathfrak{p}}) = 0$ 而 $\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}} \in \operatorname{Ass}_{R_{\mathfrak{p}}}(M_{\mathfrak{p}})$ (例 10.4.4), 而定理 10.5.4 (i) 进一步给出 $\operatorname{Ass}_{R_{\mathfrak{p}}}(M_{\mathfrak{p}}) = \{\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}\}$. 于是 $\operatorname{Supp}(M_{\mathfrak{p}}) = \{\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}\}$. 因为 $R_{\mathfrak{p}} \to R[X]_{\mathfrak{m}}$ 平坦, 运用命题 1.10.10, 引理 2.4.5 和命题 5.2.6 比较支集即得断言的等式, 其下的同构则来自命题 1.11.8.

上述断言导致 $\operatorname{depth}_{R[X]_{\mathfrak{m}}}(Q) \leq \dim Q \leq 1$. 问题化为说明存在 Q 的非零因子 $f \in \mathfrak{m}$. 观察到 $\mathfrak{m}$ 对应到 $\kappa[X]$ 的极大理想, 后者必包含 $\overline{f} \in \kappa[X] \smallsetminus \{0\}$ 使得其最高次系数可逆; 取 $\overline{f}$ 的原像 $f \in \mathfrak{m}$, 则 f 的最高次系数 $\notin \mathfrak{p}$. 由此可见 f 在

$$R_{\mathfrak{p}}[X] \underset{R_{\mathfrak{p}}}{\otimes} (M_{\mathfrak{p}}/\mathbf{x}M_{\mathfrak{p}}) = \bigoplus_{k \geq 0} \left(X^k \otimes M_{\mathfrak{p}}/\mathbf{x}M_{\mathfrak{p}}\right)$$

上的乘法作用是单射, 故 $Q \xrightarrow{f} Q$ 亦单. 证毕. □

推论 10.5.10 设 Noether 环 R 为 Cohen–Macaulay 环, 则 R 是泛悬链环 (定义 7.10.4).

证明 对所有 $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, 定理 10.5.9 说明 $R[X_1, \ldots, X_n]$ 仍是 Cohen-Macaulay 环, 因而是悬链环 (命题 7.10.6 + 定理 10.5.6 (iv)). □

推论 10.5.11 Noether 完备局部环必为泛悬链环.

证明 推论 8.6.11 说明 Noether 完备局部环是正则局部环的商, 而命题 10.5.3 (i) 说明正则局部环是 Cohen–Macaulay 环. □

10.6 Serre 正规性判准

本节的环 R 均默认为非零环.

定义 10.6.1 以下考虑关于环 R 和 R-模 M 的两类条件. 设 $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$.

▷ $\mathbf{R}_k$ 对所有满足 $\operatorname{ht}(\mathfrak{p}) \leq k$ 的素理想 $\mathfrak{p}$, 环 $R_{\mathfrak{p}}$ 皆是正则局部环.

▷ $\mathbf{S}_k(M)$ 对所有素理想 $\mathfrak{p} \in \operatorname{Supp}(M)$ 皆有 $\operatorname{depth}_{\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}}(M_{\mathfrak{p}}) \geq \min\{k, \dim M_{\mathfrak{p}}\}$.

对于 $M = R$ 的特例, 简记 $\mathbf{S}_k(R)$ 为 $\mathbf{S}_k$, 它等价于 R 的所有素理想 $\mathfrak{p}$ 皆有

$$\operatorname{depth}_{\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}}(R_{\mathfrak{p}}) \geq \min\{k, \operatorname{ht}(\mathfrak{p})\}.$$

上述条件一般只对 Noether 环及其上的有限生成模来考虑. 回忆到 $\mathrm{ht}(\mathfrak{p})$ 等同于 $V(\mathfrak{p})$ 在拓扑空间 $\mathrm{Spec}(R)$ 中的余维数, 见 §7.1; 条件 $\mathbf{R}_k$ 可理解为余维数 $\leq k$ 时的正则性. 条件 $\mathbf{S}_k(M)$ 则被称为对 M 的 Serre 条件.

◇ 对所有 k, 显然有

$$\mathbf{R}_{k+1} \implies \mathbf{R}_k, \quad \mathbf{S}_{k+1}(M) \implies \mathbf{S}_k(M),$$

而当 $k \geq \dim R$ 时 $\mathbf{R}_{k+1} \iff \mathbf{R}_k$ 且 $\mathbf{S}_{k+1}(M) \iff \mathbf{S}_k(M)$.

◇ 其次, 缘于局部化的传递性 (引理 1.7.8), 对任何乘性子集 $U \not\ni 0$ 的局部化保持条件 $\mathbf{R}_k$ 和 $\mathbf{S}_k(M)$.

命题 10.6.2 设 R 为 Noether 环, M 为有限生成 R-模, 则 $\mathbf{S}_k(M)$ 对所有 k 成立的充要条件是 M 为 Cohen–Macaulay 模.

证明 设 $\mathfrak{p} \in \mathrm{Supp}(M)$. 由于 $\dim M_{\mathfrak{p}} \geq \mathrm{depth}_{\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}}(M_{\mathfrak{p}})$ (推论 10.4.8), 当 $k \geq \dim M_{\mathfrak{p}}$ 时 $\mathbf{S}_k(M)$ 等价于 $\mathrm{depth}_{\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}}(M_{\mathfrak{p}}) = \dim M_{\mathfrak{p}}$. □

以下探究一些 k 较小的情形.

命题 10.6.3 设 R 为 Noether 环, 则 $\mathbf{R}_0$ 成立当且仅当 $R_{\mathfrak{p}}$ 对 R 的所有极小素理想 $\mathfrak{p}$ 都是域.

证明 应用例 10.2.10. □

命题 10.6.4 设 R 为 Noether 环, M 为有限生成 R-模, 则 $\mathbf{S}_0(M)$ 总是成立, 而 $\mathbf{S}_1(M)$ 成立当且仅当 $\mathrm{Ass}_R(M)$ 的元素恰是 $(\mathrm{Supp}(M), \subset)$ 的极小元; 换言之, $\mathbf{S}_1(M)$ 等价于 $\mathrm{Ass}_R(M)$ 不含嵌入素理想 (注记 3.4.7).

证明 考虑 $\mathfrak{p} \in \mathrm{Supp}(M)$. 既然 $\mathrm{depth}_{\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}}(M_{\mathfrak{p}}) \geq 0$ 恒成立, $\mathbf{S}_0(M)$ 亦然. 其次, $\mathbf{S}_1(M)$ 相当于要求 $\dim M_{\mathfrak{p}} \geq 1$ 时 $\mathrm{depth}_{\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}}(M_{\mathfrak{p}}) \neq 0$, 而例 10.4.4 表明这等价于当 $\mathfrak{p}$ 非极小时 $\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}} \notin \mathrm{Ass}_{R_{\mathfrak{p}}}(M_{\mathfrak{p}})$; 鉴于命题 3.4.6 (iii), 后者等价于 $\mathfrak{p} \notin \mathrm{Ass}_R(M)$. □

结合命题 10.6.2 与 10.6.4 可见对于 Cohen–Macaulay 环, $\mathrm{Ass}_R(R)$ 的元素恰是极小素理想.

下面是既约 Noether 环的一则刻画, 其论证涉及 §3.5 探讨的准素分解.

命题 10.6.5 设 R 为 Noether 环, 则 R 既约当且仅当它满足 $\mathbf{R}_0$ 和 $\mathbf{S}_1$.

证明 基于先前的结论, $\mathbf{R}_0$ 和 $\mathbf{S}_1$ 分别等价于要求 $R_{\mathfrak{p}}$ 对 R 的所有极小素理想 $\mathfrak{p}$ 都是域, 以及 $\mathrm{Ass}_R(R)$ 的元素恰是 R 的极小素理想.

"仅当" 方向是引理 2.9.2 和推论 3.5.7 的综合. 以下处理 "当" 的方向.

以定理 3.5.9 取极小准素分解 $0 = \bigcap_{j=1}^m I_j$, 其中 $I_1, \ldots, I_m$ 是 R 的理想, 使得 $\mathrm{Ass}_R(R/I_j) = \{\mathfrak{p}_j\}$ 是相异独点集, 且 $\mathrm{Ass}_R(R) = \{\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_m\}$. 条件表明每个 $\mathfrak{p}_j$ 皆

极小而 $R_{\mathfrak{p}_j}$ 是域. 推论 3.5.8 表明 $I_j = \ker\left[R \to R_{\mathfrak{p}_j}\right]$, 这是包含于 $\mathfrak{p}_j$ 的素理想, 故 $I_j = \mathfrak{p}_j$. 综上可得 $0 = \bigcap_{j=1}^m \mathfrak{p}_j$, 从而 $\mathrm{nil}(R) = 0$. □

行将证明的定理 10.6.7 被称为 Serre 的正则性判准. 我们需要一则性质: 设 R 为 Noether 环而 $t \in R$ 非零因子, 则 $\mathrm{ht}((t)) = 1$, 详见定理 7.3.1 和引理 7.3.4.

引理 10.6.6 Noether 环 R 满足 $\mathbf{S}_2$ 当且仅当:

- ◇ 所有 $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}_R(R)$ 均满足 $\mathrm{ht}(\mathfrak{p}) = 0$;
- ◇ 若 $t \in R$ 非零因子, 则所有 $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}_R(R/(t))$ 均满足 $\mathrm{ht}(\mathfrak{p}) = 1$.

证明 设 $\mathbf{S}_2$ 成立. 命题 10.6.4 说明所有 $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}_R(R)$ 皆满足 $\mathrm{ht}(\mathfrak{p}) = 0$. 其次考虑非零因子 t 和 R 的素理想 $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}_R(R/(t))$. 观察到 $R_\mathfrak{p} \xrightarrow{t} R_\mathfrak{p}$ 仍为单, 而 $\mathfrak{p}R_\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}_{R_\mathfrak{p}}(R_\mathfrak{p}/(t))$. 引理 9.7.6 蕴涵 $\mathrm{depth}_{\mathfrak{p}R_\mathfrak{p}}(R_\mathfrak{p}/(t)) = 0$, 推论 10.4.3 (i) 进而蕴涵 $\mathrm{depth}_{\mathfrak{p}R_\mathfrak{p}}(R_\mathfrak{p}) = 1$. 条件 $\mathbf{S}_2$ 遂导致 $\mathrm{ht}(\mathfrak{p}) \le 1$, 然而 $t \in \mathfrak{p}$ 蕴涵 $\mathrm{ht}(\mathfrak{p}) \ge 1$.

反之设断言中的性质成立, 以下说明对所有素理想 $\mathfrak{p}$ 和 $i \in \{1, 2\}$ 皆有

$$\mathrm{ht}(\mathfrak{p}) \ge i \implies \mathrm{depth}_{\mathfrak{p}R_\mathfrak{p}}(R_\mathfrak{p}) \ge i.$$

观察到 $i = 1$ 时的蕴涵关系不外是 $\mathbf{S}_1$, 命题 10.6.4 (取 $M = R$) 说明其成立. 以下考虑 $i = 2$ 情形. 设 $\mathrm{ht}(\mathfrak{p}) \ge 2$. 假如 $\mathrm{depth}_{\mathfrak{p}R_\mathfrak{p}}(R_\mathfrak{p}) \le 1$, 则推论 10.4.3 (iii) 蕴涵 $\mathrm{depth}_\mathfrak{p}(R) \le 1$, 分两种情形讨论.

- ◇ 若 $\mathrm{depth}_\mathfrak{p}(R) = 0$ 则存在 $\mathfrak{p}' \supset \mathfrak{p}$ 使得 $\mathfrak{p}' \in \mathrm{Ass}_R(R)$ (例 10.4.4), 但断言中的条件蕴涵 $\mathrm{ht}(\mathfrak{p}) \le \mathrm{ht}(\mathfrak{p}') = 0$, 矛盾.
- ◇ 若 $\mathrm{depth}_\mathfrak{p}(R) = 1$ 则存在 R 的非零因子 x 使得 $\mathrm{depth}_\mathfrak{p}(R/(x)) = 0$ (推论 10.4.3 (i)). 先前的论证给出 $\mathfrak{p}' \supset \mathfrak{p}$ 使得 $\mathfrak{p}' \in \mathrm{Ass}_R(R/(x))$, 但断言中的条件蕴涵 $\mathrm{ht}(\mathfrak{p}) \le \mathrm{ht}(\mathfrak{p}') = 1$, 矛盾.

综上易见 R 满足 $\mathbf{S}_2$. □

定理 10.6.7 (J.-P. Serre) 设 R 为 Noether 环, 则 R 是有限多个正规整环 (定义 6.3.1) 的直积当且仅当 R 满足 $\mathbf{R}_1$ 和 $\mathbf{S}_2$.

证明 从 "仅当" 方向入手. 设 $R = R_1 \times \cdots \times R_n$, 其中每个 R_i 都是正规整环; 注意到 R_i 自动是 Noether 环. 回忆 §1.2 结尾的内容: $\mathrm{Spec}(R)$ 是 $\mathrm{Spec}(R_1), \ldots, \mathrm{Spec}(R_n)$ 的无交并, $\mathfrak{p}_i \in \mathrm{Spec}(R_i)$ 对应 R 的素理想

$$\mathfrak{p} = R_1 \times \cdots \times \underbrace{\mathfrak{p}_i}_{\text{第 } i \text{ 项}} \times \cdots \times R_n,$$

而 $\mathrm{ht}(\mathfrak{p}) = \mathrm{ht}(\mathfrak{p}_i)$. 相应地,

$$\mathrm{Ass}_R(R/(t)) = \bigsqcup_{i=1}^n \mathrm{Ass}_{R_i}(R_i/(t_i)), \quad t = (t_1, \ldots, t_n) \in R.$$

鉴于引理 10.6.6, 这就将 $\mathbf{S}_2$ 的验证化约到每个 R_i 上, 从而由引理 10.2.13 料理.

另一方面, 局部化保持正规性 (命题 6.2.3), 命题 10.2.14 蕴涵 $\mathbf{R}_1$ 对每个 R_i 成立, 因而对 R 成立.

现在处理 "当" 的方向. 设 R 满足 $\mathbf{R}_1$ 和 $\mathbf{S}_2$, 则它也满足 $\mathbf{R}_0$ 和 $\mathbf{S}_1$, 故命题 10.6.5 说明 R 既约. 对所有非零因子 $t \in R$ 和 $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}_R(R/(t))$, 从 $\mathbf{S}_2$ 知 $\mathrm{ht}(\mathfrak{p}) = 1$, 而从 $\mathbf{R}_1$ 配合命题 10.2.14 知 $R_{\mathfrak{p}}$ 是正规整环.

将 R 嵌入其全分式环 $\mathrm{Frac}(R)$. 兹断言 R 在 $\mathrm{Frac}(R)$ 中整闭. 若 $\alpha \in \mathrm{Frac}(R)$ 在 R 上为整元, 则对于所有非零因子 $t \in R$ 以及 $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}_R(R/(t))$, 它在 $\mathrm{Frac}(R_{\mathfrak{p}})$ 中的像 $\alpha_{\mathfrak{p}}$ 在 $R_{\mathfrak{p}}$ 上为整元; 已知 $R_{\mathfrak{p}}$ 是正规整环, 故 $\alpha_{\mathfrak{p}} \in R_{\mathfrak{p}}$. 代入命题 3.4.12 知 $\alpha \in R$. 断言得证.

于是 R 是既约正规 Noether 环. 应用命题 6.3.5 完成证明. □

10.7 平坦性和深度的关系

先来探讨平坦性和正则列的关系.

引理 10.7.1 设 $(R, \mathfrak{m}) \to (S, \mathfrak{n})$ 为 Noether 局部环之间的局部同态, M 为平坦 R-模, N 为有限生成 S-模. 若 R-模同态 $f : N \to M$ 诱导单同态 $f_1 : N/\mathfrak{m}N \to M/\mathfrak{m}M$, 则 f 是单同态, 而且 $M/\operatorname{im}(f)$ 是平坦 R-模.

证明 对所有 $n \geq 1$ 有行正合交换图表

$$\begin{tikzcd} & \mathfrak{m}^n/\mathfrak{m}^{n+1} \underset{R}{\otimes} N \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes f"'] & N/\mathfrak{m}^{n+1}N \arrow[r] \arrow[d, "f_{n+1}"] & N/\mathfrak{m}^n N \arrow[r] \arrow[d, "f_n"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \mathfrak{m}^n/\mathfrak{m}^{n+1} \underset{R}{\otimes} M \arrow[r] & M/\mathfrak{m}^{n+1}M \arrow[r] & M/\mathfrak{m}^n M \arrow[r] & 0; \end{tikzcd}$$

注意到 $\mathfrak{m}^n/\mathfrak{m}^{n+1} \underset{R}{\otimes} M \simeq \mathfrak{m}^n/\mathfrak{m}^{n+1} \underset{R/\mathfrak{m}}{\otimes} M/\mathfrak{m}M$, 以 N 代 M 亦同, 左侧竖直箭头依此等同于 $\mathrm{id} \otimes f_1$, 故单. 由此递归地从蛇形引理推得每个 f_n 皆为单. 于是 $\ker(f) \subset \bigcap_n \mathfrak{m}^n N \subset \bigcap_n \mathfrak{n}^n N = 0$ (定理 3.7.1).

下一步是说明 $M/\operatorname{im}(f)$ 平坦, 对所有真理想 $I \subset R$ 考虑 $0 \to N \xrightarrow{f} M \to M/\operatorname{im}(f) \to 0$ 诱导的正合列

$$\mathrm{Tor}_1^R(R/I, M) \to \mathrm{Tor}_1^R(R/I, M/\operatorname{im}(f)) \to N/IN \xrightarrow{\overline{f}} M/IM, \quad \overline{f} = f \bmod I,$$

其左端为零, 问题归结为证 $\overline{f}$ 单. 观察到 $R/I \to S/IS$ 仍是局部环之间的局部同态, M/IM 仍是平坦 R/I-模, 而 $\overline{f}_1$ 等同于 f_1. 上一步蕴涵 $\overline{f}$ 单. 因此 $\mathrm{Tor}_1^R(R/I, M/\operatorname{im}(f)) = 0$, 证毕. □

命题 10.7.2 设 $(R,\mathfrak{m}) \to (S,\mathfrak{n})$ 为 Noether 局部环之间的局部同态, N 为有限生成 S-模, 而且它作为 R-模平坦. 若 S 的元素列 $\mathbf{x} = [x_1, \ldots, x_r]$ 是 $N/\mathfrak{m}N$-正则列, 则它是 N-正则列, 而且 $N/\mathbf{x}N$ 作为 R-模平坦.

证明 问题即刻简化到 $r = 1$ 而 $\mathbf{x} = [x]$ 的情形. 在引理 10.7.1 中代入 $M = N$, 并将 $f : N \to N$ 取为 $f(y) = xy$ 即可. □

命题 10.7.3 设 $(R,\mathfrak{m})$ 和 $(S,\mathfrak{n})$ 为 Noether 局部环, $R \to S$ 为局部同态, M 和 N 分别是 R-模和 S-模, 皆有限生成且非零, 并要求 N 作为 R-模平坦. 此时 $M \underset{R}{\otimes} N \neq 0$ 而

$$\operatorname{depth}_{\mathfrak{n}}\left(M \underset{R}{\otimes} N\right) = \operatorname{depth}_{\mathfrak{m}}(M) + \operatorname{depth}_{\mathfrak{n}}(N/\mathfrak{m}N).$$

证明 首先说明 S-模 $M \underset{R}{\otimes} N$ 非零: 它和 $S/\mathfrak{n}$ 的张量积同构于 $M/\mathfrak{m}M \underset{R/\mathfrak{m}}{\otimes} N/\mathfrak{n}S$, 但 $M/\mathfrak{m}M$ 和 $N/\mathfrak{n}S$ 皆非零.

对 $n := \operatorname{depth}_{\mathfrak{m}}(M) + \operatorname{depth}_{\mathfrak{n}}(N/\mathfrak{m}N)$ 递归论证. 若 $n = 0$, 则例 10.4.4 蕴涵存在 $z \in M$ 使得 $\operatorname{ann}_R(z) = \mathfrak{m}$, 存在 $\bar{y} \in N/\mathfrak{m}N$ 使得 $\operatorname{ann}_S(\bar{y}) = \mathfrak{n}$. 任取 $\bar{y}$ 的代表元 $y \in N$. 从 z 对应的 $R/\mathfrak{m} \hookrightarrow M$ 和 N 的平坦条件得到单同态 $N/\mathfrak{m}N \hookrightarrow M \underset{R}{\otimes} N$, 它映 $\bar{y}$ 为 $z \otimes y$, 故 $\operatorname{ann}_S(z \otimes y) = \mathfrak{n}$, 而例 10.4.4 给出 $\operatorname{depth}_{\mathfrak{n}}(M \underset{R}{\otimes} N) = 0$.

接着设 $\min\{n, \operatorname{depth}_{\mathfrak{n}}(N/\mathfrak{m}N)\} \geq 1$. 此时存在 $x \in \mathfrak{n}$ 使之非 $N/\mathfrak{m}N$ 的零因子, 推论 10.4.3 (i) 蕴涵

$$\operatorname{depth}_{\mathfrak{n}}(N/(\mathfrak{n}N + xN)) = \operatorname{depth}_{\mathfrak{n}}(N/\mathfrak{m}N) - 1.$$

另一方面, 对自同态 $N \xrightarrow{x} N$ 应用命题 10.7.2 可知其为单, 而且 N/xN 仍是平坦 R-模, 搭配递归假设可得

$$\operatorname{depth}_{\mathfrak{n}}\left(M \underset{R}{\otimes} (N/xN)\right) = \operatorname{depth}_{\mathfrak{m}}(M) + \operatorname{depth}_{\mathfrak{n}}(S/(\mathfrak{n}S + xS)),$$

$$\underbrace{\operatorname{Tor}_1^R(M, N/xN)}_{=0} \to M \underset{R}{\otimes} N \xrightarrow{x} M \underset{R}{\otimes} N \to M \underset{R}{\otimes} (N/xN) \to 0 \quad \text{正合.}$$

依推论 10.4.3 (i), 第二式给出 $\operatorname{depth}_{\mathfrak{n}}(M \underset{R}{\otimes} N) = \operatorname{depth}_{\mathfrak{n}}(M \underset{R}{\otimes} (N/xN)) + 1$. 由此推得所求等式.

最后设 $n \geq 1$ 而 $\operatorname{depth}_{\mathfrak{n}}(N/\mathfrak{m}N) = 0$. 此时 $\operatorname{depth}_{\mathfrak{m}}(M) > 0$, 故存在 $x \in \mathfrak{m}$ 使之非 M 的零因子, 又由 N 平坦知 x 非 $M \underset{R}{\otimes} N$ 的零因子. 推论 10.4.3 (i) 蕴涵

$$\operatorname{depth}_{\mathfrak{m}}(M/xM) = \operatorname{depth}_{\mathfrak{m}}(M) - 1,$$
$$\operatorname{depth}_{\mathfrak{n}}\left((M/xM) \underset{R}{\otimes} N\right) = \operatorname{depth}_{\mathfrak{n}}\left(M \underset{R}{\otimes} N\right) - 1.$$

和先前一样从递归假设推得所求等式. □

推论 10.7.4 设 $(R,\mathfrak{m})$ 和 $(S,\mathfrak{n})$ 为 Noether 局部环, $R\to S$ 为平坦局部同态, M 为有限生成非零 R-模, 则:

(i) $\dim_S M\underset{R}{\otimes}S=\dim_R M+\dim_S M\underset{R}{\otimes}(S/\mathfrak{m}S)$;

(ii) $\mathrm{depth}_{\mathfrak{n}}\left(M\underset{R}{\otimes}S\right)=\mathrm{depth}_{\mathfrak{m}}(M)+\mathrm{depth}_{\mathfrak{n}}\left(M\underset{R}{\otimes}(S/\mathfrak{m}S)\right)$;

(iii) $M\underset{R}{\otimes}S$ 是 Cohen–Macaulay S-模当且仅当 M 是 Cohen–Macaulay R-模且 $M\underset{R}{\otimes}(S/\mathfrak{m}S)$ 是 Cohen–Macaulay $S/\mathfrak{m}S$-模.

证明 (i). 首先将 R (或 S) 对 $\mathrm{ann}(M)$ (或 $\mathrm{ann}(M\underset{R}{\otimes}S)=S\mathrm{ann}(M)$, 见命题 5.2.6) 取商, 化约到 $\mathrm{ann}(M)=0$ 且 $\mathrm{ann}(M\underset{R}{\otimes}S)=0$ 的情形. 所求等式归结为推论 7.4.4 (i) 已有的

$$\dim S=\dim R+\dim S/\mathfrak{m}S.$$

(ii) 是命题 10.7.3 在 $N=S$ 时的特例.

由于深度不超过维数 (推论 10.4.8), 断言 (iii) 是 (i) 和 (ii) 的综合, 但需要对 $M\underset{R}{\otimes}(S/\mathfrak{m}S)$ 应用命题 7.4.4 (iii). □

在适当条件下, 从推论 10.7.4 (i) 的维数公式 (取 $M=R$) 也能反推平坦性, 细说如下.

命题 10.7.5 设 $(R,\mathfrak{m})$ 和 $(S,\mathfrak{n})$ 为 Noether 局部环, $R\to S$ 为局部同态. 若 R 是正则局部环, N 是非零 Cohen–Macaulay S-模, 而且

$$\dim_S N=\dim R+\dim_{S/\mathfrak{m}S}N/\mathfrak{m}N,$$

则 N 是平坦 R-模.

证明 对 $d:=\dim R$ 递归论证. 若 $d=0$ 则 R 是域, 一切平凡. 以下设 $d\geq 1$. 取 $x\in\mathfrak{m}\smallsetminus\mathfrak{m}^2$, 注记 10.2.5 确保 $\overline{R}:=R/(x)$ 是 $d-1$ 维正则局部环. 命 $\overline{N}=N/xN$, $\overline{S}=S/xS$. 命题 7.4.3 给出

$$\dim_{\overline{S}}\overline{N}\leq\dim\overline{R}+\dim_{\overline{S}/\mathfrak{m}\overline{S}}\overline{N}/\mathfrak{m}\overline{N};\tag{10.7.1}$$

严格来说, 该处只是特例 $\overline{N}=\overline{S}$, 但将 $\overline{S}$ 对 $\mathrm{ann}(\overline{N})$ 取商可得 (10.7.1) 的一般情形. 基于引理 7.2.6 推得

$$\begin{aligned}\dim_S N\leq\dim_{\overline{S}}\overline{N}+1&\leq\dim\overline{R}+\dim_{\overline{S}/\mathfrak{m}\overline{S}}\overline{N}/\mathfrak{m}\overline{N}+1\\&=\dim R+\dim_{S/\mathfrak{m}S}N/\mathfrak{m}N.\end{aligned}$$

其左右两端相等, 因此 (10.7.1) 中等号成立, 而 $\dim_{\overline{S}}\overline{N}=\dim_S N-1$; 根据 Cohen–Macaulay 条件和定理 10.5.4 (iii), 后一等式又蕴涵 $N\xrightarrow{x}N$ 单.

于是引理 10.5.5 (ii) 蕴涵 $\overline{N}$ 是 Cohen–Macaulay $\overline{S}$-模, 而 (10.7.1) 等号成立, 递归假设遂说明 $\overline{N}$ 是平坦 $\overline{S}$-模. 回忆到 $N \xrightarrow{x} N$ 单蕴涵 $\mathrm{Tor}_1^S(\overline{S}, N) = 0$ (引理 5.4.1), 故平坦性的局部判准 (定理 5.8.3) 表明 N 是平坦 S-模. □

以上结论常应用于 $N = S$ 的情形.

10.8 同调维数

我们在 §9.6 以同调工具引入了环的内射维数, 投射维数和整体维数. 这些概念也适用于非交换环, 乃至于有足够内射和投射对象的 Abel 范畴. 然而本节的结论则属交换环论独有.

以下选定环 R.

引理 10.8.1 给定 R-模 N. 设 $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, 则 $\mathrm{inj.dim}(N) \leq n$ 当且仅当 $\mathrm{Ext}_R^{n+1}(R/I, N) = 0$ 对所有理想 I 成立.

证明 处理 “当” 的方向即可. 将任意内射解消 $0 \to N \to J^\bullet$ 在第 n 项截断, 得到正合列

$$0 \to N \to J_0 \to \cdots \to J_{n-1} \to K \to 0,$$

其中 $K = \mathrm{im}[J_{n-1} \to J_n]$, 当 $n = 0$ 时规定 $K = N$. 证 K 是内射模即可. 反复应用同调论中的移维技巧 [8, 命题 3.12.9], 可对所有理想 I 得到 $\mathrm{Ext}_R^1(R/I, K) \simeq \mathrm{Ext}_R^{n+1}(R/I, N) = 0$. 考虑 $0 \to J \to R \to R/J \to 0$ 对 Ext 函子诱导的长正合列, 可推得任何同态 $J \to K$ 都能延拓为 $R \to K$, 而这又蕴涵 K 内射, 见 [7, 命题 6.9.10]. □

上述结论相当于说在 $\mathrm{inj.lim}(N)$ 的定义中, 在 Ext 函子的第一个变元考虑形如 R/J 的模足矣.

引理 10.8.2 设 $R \to S$ 为环同态, M 为 R-模, N 为 S-模.

(i) 若 $R \to S$ 平坦, 则 $\mathrm{proj.dim}_S\left(S \underset{R}{\otimes} M\right) \leq \mathrm{proj.dim}_R(M)$.

(ii) 若 S 作为 R-模投射, 则 $\mathrm{proj.dim}_R(N) \leq \mathrm{proj.dim}_S(N)$.

证明 (i). 设 M 有长度 $\leq n$ 的投射解消 $P_\bullet \to M \to 0$, 则 $S \underset{R}{\otimes} M$ 有长度 $\leq n$ 的投射解消 $S \underset{R}{\otimes} P_\bullet \to S \underset{R}{\otimes} M \to 0$.

(ii). 设 N 有长度 $\leq n$ 的投射解消 $Q_\bullet \to N \to 0$, 则每个 Q_i 都是自由 S-模的直和项, 因而也是自由 R-模的直和项, 故给出 R 上长度 $\leq n$ 的投射解消. □

命题 10.8.3 以下设 R 为非零 Noether 环, M 为有限生成 R-模, N 为任意 R-模.

(i) 设 U 为 R 的乘性子集, 则

$$\begin{aligned}\text{inj.dim}_{R[U^{-1}]}(N[U^{-1}]) &\leq \text{inj.dim}_R(N),\\ \text{proj.dim}_{R[U^{-1}]}(M[U^{-1}]) &\leq \text{proj.dim}_R(M),\\ \text{gl.dim}(R[U^{-1}]) &\leq \text{gl.dim}(R).\end{aligned}$$

(ii) 让 $\mathfrak{m}$ 遍历 R 的极大理想, 则

$$\begin{aligned}\text{inj.dim}_R(N) &= \sup_{\mathfrak{m}} \text{inj.dim}_{R_\mathfrak{m}}(N_\mathfrak{m}),\\ \text{proj.dim}_R(M) &= \sup_{\mathfrak{m}} \text{proj.dim}_{R_\mathfrak{m}}(M_\mathfrak{m}),\\ \text{gl.dim}(R) &= \sup_{\mathfrak{m}} \text{gl.dim}(R_\mathfrak{m}).\end{aligned}$$

(iii) 从 $\text{Spec}(R)$ 到 $\mathbb{Z}_{\geq 0} \sqcup \{+\infty\}$ 的映射 $\mathfrak{p} \mapsto \text{proj.dim}(M_\mathfrak{p})$ 是上半连续的, 换言之 $\{\mathfrak{p} : \text{proj.dim}(M_\mathfrak{p}) \leq m\}$ 对所有 $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \sqcup \{+\infty\}$ 皆开.

证明 (i). 对于第一个不等式, 以引理 10.8.1 刻画 inj.dim, 并且回忆到 $R[U^{-1}]$ 的理想都形如 $J[U^{-1}]$, 其中 J 是 U 的理想 (1.7.2), 而且引理 9.6.3 对所有 i 给出

$$\text{Ext}^i_{R[U^{-1}]}\left(R[U^{-1}]/J[U^{-1}], N[U^{-1}]\right) \simeq \text{Ext}^i_R\left(R/J, N\right)[U^{-1}].$$

对于第二个不等式, 改用引理 9.6.2 给出的

$$\text{Ext}^i_{R[U^{-1}]}\left(M[U^{-1}], L\right) \simeq \text{Ext}^i_R(M, L),$$

其中 L 是任意 $R[U^{-1}]$-模, 在右式视为 R-模. 对第一个不等式两边取 sup 便是第三个不等式. 另一种方法是应用引理 10.8.2 (i).

鉴于引理 2.4.1, 同理可证 (ii).

(iii). 设 $\mathfrak{p}$ 为素理想, $n := \text{proj.dim}(M_\mathfrak{p})$. 我们寻求 $\mathfrak{p}$ 在 $\text{Spec}(R)$ 中的开邻域 V 使得 $\mathfrak{q} \in V$ 蕴涵 $\text{proj.lim}(M_\mathfrak{q}) \leq n$. 显然可设 $n \neq +\infty$. 取 M 的投射解消 $P_\bullet \to M \to 0$, 使得每个 P_i 都是有限生成投射模. 在第 n 项作截断给出正合列

$$0 \to Q \to P_{n-1} \to \cdots \to P_0 \to M \to 0,$$

其中 $Q = \ker[P_n \to P_{n-1}]$, 在 $n = 0$ 时规定 $Q = M$; 注意到 Q 是有限展示 R-模. 局部化保持上述投射解消和正合列, 移维给出

$$\text{Ext}^1_{R_\mathfrak{p}}(Q_\mathfrak{p}, \cdot) \simeq \text{Ext}^{n+1}_{R_\mathfrak{p}}(Q_\mathfrak{p}, \cdot) = 0,$$

故 $Q_\mathfrak{p}$ 是有限生成投射 $R_\mathfrak{p}$-模, 因而是有限秩自由模 (命题 5.7.2), 记其秩为 k.

兹断言存在 $f \in R \smallsetminus \mathfrak{p}$ 使得 $Q[f^{-1}] \simeq R[f^{-1}]^{\oplus k}$, 这表明所求的开邻域 V 可取为 $D(f)$. 论证是标准的: 取互逆的 $R_\mathfrak{p}$-模同态 $\alpha : Q_\mathfrak{p} \leftrightarrows R_\mathfrak{p}^{\oplus k} : \beta$, 由于 Q 是有限展示模, 通分后可取到 $f_0 \in R \smallsetminus \mathfrak{p}$ 使得 α 和 β 来自 $Q[f_0^{-1}] \leftrightarrows R[f_0^{-1}]^{\oplus k}$; 两者的合成未必都是恒等, 但适当取 $f_1 \in R \smallsetminus \mathfrak{p}$ 并 $f := f_0 f_1$ 代 f_0 可解决这一问题. □

现在来具体描述多项式环的整体维数.

引理 10.8.4 设 R 为环, M 为 $R[X]$-模, 则:

(i) $\mathrm{proj.dim}_R(M) \leq \mathrm{proj.dim}_{R[X]}(M) \leq \mathrm{proj.dim}_R(M)+1$;

(ii) 若 X 非 M 的零因子, 则 $\mathrm{proj.dim}_R(M/XM) \leq \mathrm{proj.dim}_{R[X]}(M)$;

(iii) 若 $X \in \mathrm{ann}_{R[X]}(M)$, 则 $\mathrm{proj.dim}_{R[X]}(M) = \mathrm{proj.dim}_R(M)+1$.

证明 (i). 第一个不等式来自引理 10.8.2 (ii), 第二个不等式来自 $R[X]$-模短正合列

$$0 \to R[X] \underset{R}{\otimes} M \xrightarrow{\psi} R[X] \underset{R}{\otimes} M \xrightarrow{\varphi} M \to 0,$$
$$\psi(f \otimes m) = Xf \otimes m - f \otimes Xm, \quad \varphi(f \otimes m) = fm.$$

对 $\mathrm{Ext}^{\bullet}_{R[X]}(\cdot, Q)$ 诱导的长正合列 (Q 是任意 $R[X]$-模) 以及引理 9.6.2.

(ii). 不妨设 $M \neq 0$ 且 $d := \mathrm{proj.dim}_{R[X]}(M) < +\infty$, 对之递归论证. 若 $d=0$ 则 M (或 M/XM) 是投射 $R[X]$-模 (或 R-模). 以下设 $d \geq 1$. 任取短正合列 $0 \to M' \to L \to M \to 0$, 其中 L 是自由 $R[X]$-模. 乘以 X 给出此列的自同态, 应用蛇形引理遂有 R-模短正合列

$$0 \to M'/XM' \to L/XL \to M/XM \to 0.$$

注意到 M' 非零, X 非 M' 的零因子, 而 $\mathrm{proj.dim}_{R[X]}(M') < d$; 递归假设说明 $\mathrm{proj.dim}_R(M'/XM') < d$, 同时 L/XL 自由. 综上易得 $\mathrm{proj.dim}_R(M/XM) \leq d$.

(iii). 仍可设 $M \neq 0$ 而 $d := \mathrm{proj.dim}_{R[X]}(M) < +\infty$; 此时 $d > 0$. 对于上一步的短正合列, 蛇形引理给出 R-模正合列

$$0 \to M \to M'/XM' \to L/XL \to M \to 0.$$

命 $N = \ker[L/XL \twoheadrightarrow M]$; 由于 L/XL 自由, (i) 蕴涵 $\mathrm{proj.dim}_R(N) < d$. 从短正合列 $0 \to M \to M'/XM' \to N \to 0$ 可知当 $k \geq d$ 而 Q 是任意 R-模时

$$\mathrm{Ext}^k_R(M'/XM', Q) \to \mathrm{Ext}^k_R(M, Q) \to \mathrm{Ext}^{k+1}_R(N, Q)$$

正合, 且右项为零; 因为 X 非 M' 的零因子, (ii) 蕴涵 $\mathrm{proj.dim}_R(M'/XM') < d$, 上式左项亦为零.

综上可得 $\mathrm{proj.dim}_R(M) < d$, 但 (i) 又给出 $\mathrm{proj.dim}_R(M) \geq d-1$. □

定理 10.8.5 对所有环 R 和 $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ 皆有 $\mathrm{gl.dim}(R[X_1, \ldots, X_n]) = n + \mathrm{gl.dim}(R)$.

证明 处理 $n=1$ 即可. 引理 10.8.4 (i) 蕴涵 $\mathrm{gl.dim}(R[X]) \leq \mathrm{gl.dim}(R)+1$. 另一方面, 给定 R-模 M, 以 $f \cdot m := f(0)m$ 作成 $R[X]$-模, 则引理 10.8.4 (iii) 蕴涵 $\mathrm{proj.dim}_{R[X]}(M) = \mathrm{proj.dim}_R(M)+1$, 这给出 $\mathrm{gl.dim}(R[X]) \geq \mathrm{gl.dim}(R)+1$. □

接着要求 R 是 Noether 环. 给定有限生成 R-模 M, 先来回顾如何构造每一项均为有限秩的自由解消 $F_\bullet \to M \to 0$.

1. 取 M 的生成元 $x_1, \ldots, x_{k_0}$. 相应地有 $F_0 := R^{\oplus k_0}$ 和满同态 $F_0 \xrightarrow{d_0} M$, 映标准基中的 e_i 为 x_i. 命 $M_0 = \ker(d_0)$, 这仍是有限生成 R-模.

2. 取 M_0 的一列生成元 $x'_1, \ldots, x'_{k_1}$, 得到 $F_1 := R^{\oplus k_1} \twoheadrightarrow M_0$ 与相应的 $d_1 : F_1 \to F_0$ 和 $M_1 := \ker(d_1)$.

3. 依此类推, 得到
$$\cdots \to F_i \xrightarrow{d_i} F_{i-1} \to \cdots \to M \to 0;$$
其中 F_i 是自由 R-模, $k_i := \mathrm{rk}_R(F_i) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, 而且 $M_i := \ker(d_i) \subset F_i$ 带有展示
$$F_{i+2} \xrightarrow{d_{i+2}} F_{i+1} \to M_i \to 0; \tag{10.8.1}$$
规定 $M_{-1} = M$, 则上式对所有 $i \geq -1$ 成立.

以下聚焦于 $(R, \mathfrak{m})$ 是 Noether 局部环的情形, 命 $\kappa = R/\mathfrak{m}$. 我们寻求 $F_\bullet \to M \to 0$ 使其每一步都是最经济的. 第一步的 $x_1, \ldots, x_{k_0}$ 生成 M 当且仅当其像 $\bar{x}_1 \ldots, \bar{x}_{k_0}$ 生成 $M/\mathfrak{m}M$ (推论 2.3.5 (iii)), 因此最优取法是让 $k_0 = \dim_\kappa M/\mathfrak{m}M$ 而 $\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_{k_0}$ 是 κ-向量空间 $M/\mathfrak{m}M$ 的基.

后续步骤的最优条件依然类似: 我们要求 $F_{i+1} \twoheadrightarrow M_i$ 在取 $(\cdot) \underset{R}{\otimes} \kappa$ 后为同构.

注意到如果某一步给出 $F_m = 0$, 则后续的 $F_{m+1}, F_{m+2}, \ldots$ 全为零.

定义–命题 10.8.6 (极小自由解消) 对于 Noether 局部环 $(R, \mathfrak{m})$ 和有限生成 R-模 M, 满足上述最优条件的解消称为 M 的极小自由解消, 它们具有以下唯一性: 给定极小自由解消 $F_\bullet \to M \to 0$ 和 $G_\bullet \to M \to 0$, 存在链复形范畴 $\mathsf{Ch}(R)$ 中的同构 $F_\bullet \simeq G_\bullet$.

证明 关于唯一性, 先来考察解消的第一步. 注意到 $F_0 = R^{\oplus k_0} = G_0$. 设 $G_0 \twoheadrightarrow M$ 的取法来自 $M/\mathfrak{m}M$ 的基 $\bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_{k_0}$ 及其代表元 $y_1, \ldots, y_{k_0} \in M$, 则可将每个 x_i 表为 $\sum_j a_{ij} y_j$. 在 $M/\mathfrak{m}M$ 中考察, 可见每个 a_{ij} 的陪集 $\bar{a}_{ij} \in R/\mathfrak{m}$ 皆唯一, 而且 $k_0 \times k_0$ 矩阵 $(\bar{a}_{ij})_{i,j}$ 可逆. 行列式理论遂蕴涵 R 上的矩阵 $(a_{ij})_{i,j}$ 可逆. 按 $\varphi_0(e_i) = \sum_{j=1}^{k_0} a_{ij} e_j$ 定义 R^{k_0} 的自同构 φ_0, 综上可得交换图表

$$\begin{tikzcd} R^{\oplus k_0} \arrow[d, "\varphi_0"', "\wr"] \arrow[dr, "e_i \mapsto x_i"] & \\ R^{\oplus k_0} \arrow[r, "e_i \mapsto y_i"'] & M. \end{tikzcd}$$

两个解消对应的 $M_0 := \ker[R^{\oplus k_0} \to M]$ 按此等同. 对后续每一步如是操作, 给出 $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$, 便有所求同构. □

引理 10.8.7 给定 Noether 局部环 $(R, \mathfrak{m})$ 和有限生成 R-模 M 的自由解消 $F_\bullet \to M \to 0$, 使得每个 F_i 都是有限秩自由模. 命 $\kappa = R/\mathfrak{m}$. 以下陈述等价:

(i) $F_\bullet \to M \to 0$ 是极小自由解消;

(ii) 链复形 $F_\bullet \underset{R}{\otimes} \kappa$ 中的同态全为零;

(iii) $\mathrm{rk}_R(F_i) = \dim_\kappa \mathrm{Tor}_i^R(M, \kappa)$ 对所有 $i \geq 0$ 成立;

(iv) $\mathrm{rk}_R(F_i) = \dim_\kappa \mathrm{Ext}_R^i(M, \kappa)$ 对所有 $i \geq 0$ 成立.

证明 (i) $\iff$ (ii). 对于所有 $i \geq -1$, 对 (10.8.1) 取 $(\cdot) \underset{R}{\otimes} \kappa$ 得到正合列

$$F_{i+2} \underset{R}{\otimes} \kappa \xrightarrow{d_{i+2} \otimes \mathrm{id}_\kappa} F_{i+1} \underset{R}{\otimes} \kappa \to M_i \underset{R}{\otimes} \kappa \to 0.$$

自由解消 $F_\bullet \to M \to 0$ 极小当且仅当 $F_{i+1} \underset{R}{\otimes} \kappa \xrightarrow{\sim} M_i \underset{R}{\otimes} \kappa$ 恒成立, 当且仅当 $F_{i+2} \underset{R}{\otimes} \kappa \to F_{i+1} \underset{R}{\otimes} \kappa$ 恒为零.

(ii) $\iff$ (iii). 留意到 $\mathrm{rk}_R(F_i) = \dim_\kappa F_i \underset{R}{\otimes} \kappa$. 运用 κ-向量空间同构 $\mathrm{Tor}_i^R(M, \kappa) \simeq \mathrm{H}_i(F_\bullet \underset{R}{\otimes} \kappa)$ 并比较维数.

(ii) $\iff$ (iv). 同理, 但改用 κ-向量空间同构 $\mathrm{Ext}_R^i(M, \kappa) \simeq \mathrm{H}^i \mathrm{Hom}_R(F_\bullet, \kappa)$ 和 $\mathrm{Hom}_R(F_\bullet, \kappa) \simeq \mathrm{Hom}_\kappa(F_\bullet \underset{R}{\otimes} \kappa, \kappa)$. □

命题 10.8.8 设 R 为 Noether 局部环, 记其剩余类域为 κ. 考虑有限生成 R-模 M.

(i) 对所有 $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ 皆有

$$\mathrm{proj.dim}(M) \leq n \iff \mathrm{Tor}_{n+1}^R(\kappa, M) = 0.$$

(ii) 取 $F_\bullet \to M \to 0$ 为 M 的极小自由解消, 规定 $\inf \varnothing = +\infty$, 则

$$\mathrm{proj.dim}(M) = \inf\{n \in \mathbb{Z}_{\geq 0} : F_{n+1} = 0\}.$$

证明 (i). 对于 $\Longrightarrow$ 方向, 将 (9.6.1) 应用于 κ 可得 $\mathrm{Tor}_{n+1}^R(\kappa, M) = 0$.

对于 $\Longleftarrow$ 方向, 取极小自由解消 $F_\bullet \to M \to 0$. 引理 10.8.7 表明 $F_{n+1} = 0$, 于是 M 有长度 $\leq n$ 的自由解消.

(ii). 若 $F_{n+1} = 0$, 则之前论证给出 $\mathrm{proj.dim}(M) \leq n$, 因此 $\mathrm{proj.dim}(M) \leq \inf\{n : F_{n+1} = 0\}$. 假如严格不等式成立, 则存在 n 使得 $\mathrm{proj.dim}(M) = n$ 而 $F_{n+1} \neq 0$; 前者通过 (i) 蕴涵 $\mathrm{Tor}_{n+1}^R(\kappa, M) = 0$, 但这与引理 10.8.7 的陈述 (iii) 矛盾. □

推论 10.8.9 设 R 为 Noether 局部环, 剩余类域记为 κ, 则 $\mathrm{gl.dim}(R) = \mathrm{proj.dim}(\kappa)$.

证明 说明 $\mathrm{gl.dim}(R) \leq \mathrm{proj.dim}(\kappa)$ 即可. 命 $n = \mathrm{proj.dim}(\kappa)$, 不妨设 $n \neq +\infty$. 命题 10.8.8 (i) 说明 M 有限生成时 $\mathrm{proj.dim}(M) \leq n$. 这导致 $\mathrm{Ext}_R^{n+1}(R/I, N) = 0$ 对所有理想 I 和 R-模 N 成立, 故引理 10.8.1 给出 $\mathrm{inj.dim}(N) \leq n$. 取 $\sup_N$ 给出 $\mathrm{gl.dim}(R) \leq n$. □

推论 10.8.10 设 R 为 Noether 局部环, M 为有限生成非零 R-模. 设 $\mathbf{x} = [x_1, \ldots, x_r]$ 为 M-正则列, 则

$$r + \mathrm{proj.dim}_R(M) = \mathrm{proj.dim}_R(M/\mathbf{x}M).$$

证明 讨论 $r = 1$ 而 $\mathbf{x} = [x]$ 的情形即可. 记 R 的极大理想为 $\mathfrak{m}$. 命 $\kappa = R/\mathfrak{m}$. 短正合列 $0 \to M \xrightarrow{x} M \to M/xM \to 0$ 诱导长正合列

$$\mathrm{Tor}_n^R(\kappa, M) \xrightarrow{x} \mathrm{Tor}_n^R(\kappa, M) \to \mathrm{Tor}_n^R(\kappa, M/xM) \to \mathrm{Tor}_{n-1}^R(\kappa, M) \xrightarrow{x} \mathrm{Tor}_{n-1}^R(\kappa, M),$$

其中 $n \in \mathbb{Z}$; 因为 $x \in \mathfrak{m}$, 标为 x 的同态全为零, 故有正合列

$$0 \to \mathrm{Tor}_n^R(\kappa, M) \to \mathrm{Tor}_n^R(\kappa, M/xM) \to \mathrm{Tor}_{n-1}^R(\kappa, M) \to 0.$$

其余不外是命题 10.8.8 的应用. □

10.9 Auslander–Buchsbaum 公式

对于 Noether 局部环上的有限生成模, Auslander–Buchsbaum 公式联系其深度和投射维数, 这是同调方法在交换环论中的经典应用. 相关论证涉及 Kozul 复形的性质.

定理 10.9.1 (M. Auslander, D. Buchsbaum) 设 $(R, \mathfrak{m})$ 为 Noether 局部环, M 是满足 $\mathrm{proj.dim}(M) < +\infty$ 的有限生成非零 R-模, 则

$$\mathrm{proj.dim}(M) + \mathrm{depth}_{\mathfrak{m}}(M) = \mathrm{depth}_{\mathfrak{m}}(R).$$

证明 对 $\mathrm{proj.dim}(M)$ 递归论证. 当 $\mathrm{proj.dim}(M) = 0$ 时 M 是有限秩非零自由模, 因此 $\mathrm{depth}_{\mathfrak{m}}(M) = \mathrm{depth}_{\mathfrak{m}}(R)$.

以下设 $\mathrm{proj.dim}(M) \geq 1$. 取 M 的极小自由解消 $F_\bullet \to M \to 0$ (定义–命题 10.8.6). 取 $M_0 = \ker[F_0 \to M]$, 则 F_0 和 M_0 皆非零, 有短正合列

$$0 \to M_0 \to F_0 \to M \to 0, \tag{10.9.1}$$

而且 $\cdots \to F_1 \to M_0 \to 0$ 是 M_0 的极小自由解消. 于是命题 10.8.8 (ii) 蕴涵 $\mathrm{proj.dim}(M_0) = \mathrm{proj.dim}(M) - 1$. 命 $d := \mathrm{depth}_{\mathfrak{m}}(M_0)$; 归纳假设表明 $\mathrm{proj.dim}(M_0) + d = \mathrm{depth}_{\mathfrak{m}}(R)$, 问题归结为证 $\mathrm{depth}_{\mathfrak{m}}(M) = d - 1$.

取 R 的元素列 $\mathbf{x} = [x_1, \ldots, x_n]$ 使之生成 $\mathfrak{m}$. 以下用命题 10.4.2 等同 $\mathrm{depth}_{\mathfrak{m}}$ 与 $j_{\mathfrak{m}}$, 并且按照定理 9.7.8 (ii) (取 $I = \mathfrak{m}$) 以 Koszul 上同调的最低非零次数来刻画 $\mathrm{depth}_{\mathfrak{m}}$.

对于短正合列 (10.9.1), 引理 9.3.6 对 Koszul 上链复形给出相应的短正合列, 因此有 Koszul 上同调的长正合列

$$\cdots \to \mathrm{H}^i(\mathbf{x}; M_0) \to \mathrm{H}^i(\mathbf{x}; F_0) \to \mathrm{H}^i(\mathbf{x}; M) \to \mathrm{H}^{i+1}(\mathbf{x}; M_0) \to \mathrm{H}^{i+1}(\mathbf{x}; F_0) \to \cdots.$$

由 $\mathrm{depth}_{\mathfrak{m}}(F_0) = \mathrm{depth}_{\mathfrak{m}}(R) \geq d = \mathrm{depth}_{\mathfrak{m}}(M_0)$ 知 $i < d-1$ 时 $\mathrm{H}^i(\mathbf{x}; M) = 0$. 问题化约为证 $\mathrm{H}^{d-1}(\mathbf{x}; M) \neq 0$.

已知 $\mathrm{H}^d(\mathbf{x}; M_0) \neq 0$, 由长正合列 ($i = d-1$) 可知证 $\mathrm{H}^d(\mathbf{x}; M_0) \to \mathrm{H}^d(\mathbf{x}; F_0)$ 为零同态即可. 首先设 $\mathrm{proj.dim}(M_0) > 0$, 此时 $d < \mathrm{depth}_{\mathfrak{m}}(R) = \mathrm{depth}_{\mathfrak{m}}(F_0)$ 而 $\mathrm{H}^d(\mathbf{x}; F_0) = 0$.

接着设 $\mathrm{proj.dim}(M_0) = 0$. 此时 M_0 和 F_0, F_1 皆是有限秩自由模; 命 $T = \mathrm{H}^d(\mathbf{x}; R)$, 则有

$$\mathrm{H}^d(\mathbf{x}; M_0) = M_0 \underset{R}{\otimes} T, \quad \mathrm{H}^d(\mathbf{x}; F_i) = F_i \underset{R}{\otimes} T \quad (i = 0, 1),$$

而 $\mathrm{H}^d(\mathbf{x}; F_1) \to \mathrm{H}^d(\mathbf{x}; M_0) \to \mathrm{H}^d(\mathbf{x}; F_0)$ 是 $F_1 \twoheadrightarrow M_0 \hookrightarrow F_0$ 和 id_T 的张量积, 特别地, $\mathrm{H}^d(\mathbf{x}; F_1) \to \mathrm{H}^d(\mathbf{x}; M_0)$ 为满. 问题进一步化为证 $F_1 \xrightarrow{d_1} F_0$ 诱导的 $\mathrm{H}^d(\mathbf{x}; F_1) \to \mathrm{H}^d(\mathbf{x}; F_0)$ 为零同态.

将 $\mathrm{H}^d(\mathbf{x}; F_1) \to \mathrm{H}^d(\mathbf{x}; F_0)$ 表成 $\mathrm{End}_R(T)$ 上的 $k_0 \times k_1$ 矩阵; 引理 10.8.7 的陈述 (ii) 表明矩阵元皆属于 $\mathfrak{m} \cdot \mathrm{id}_T$. 然而引理 9.3.7 说明 $\mathfrak{m}$ 零化对 $\mathbf{x}$ 的所有 Koszul 上同调. 综上, $\mathrm{H}^d(\mathbf{x}; F_1) \to \mathrm{H}^d(\mathbf{x}; F_0)$ 确为零. 明所欲证. □

接着探讨正则局部环的情形.

定理 10.9.2 设 R 为正则局部环, 则 $\mathrm{gl.dim}(R) = \dim R$.

证明 在推论 10.8.10 中取 $M = R$, $r = \dim R$ 而 $x_1, \ldots, x_r$ 为 R 的正则参数系, 此时 $\mathrm{proj.dim}(R) = 0$ 而 $R/\mathbf{x}R = \kappa$. 以推论 10.8.9 求 $\mathrm{proj.dim}(\kappa)$. □

推论 10.9.3 若 R 是正则局部环, 则任何有限生成 R-模的极小自由解消的长度均 $\leq \dim R$.

证明 以命题 10.8.8 (ii) 控制极小自由解消的长度. □

为了明确整体维数和正则性的关系, 还需要一则技术性的引理.

引理 10.9.4 设 $(R, \mathfrak{m})$ 为 Noether 局部环, $\kappa := R/\mathfrak{m}$, 则 $\mathrm{gl.dim}(\kappa) \geq \dim_\kappa \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$.

证明 取 $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ 作为 κ-向量空间的基 $\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n$, 为每个 $\overline{x}_i$ 选取代表元 $x_i \in \mathfrak{m}$, 则 $\mathfrak{m} = (x_1, \ldots, x_n)$. 从 $\mathbf{x} := [x_1, \ldots, x_n]$ 构造 Koszul 链复形 $\mathrm{K}(\mathbf{x})$ (定义 9.3.5). 具体地

说, $\mathrm{K}(\mathbf{x})_k = \bigwedge^k (R^{\oplus n})$, 而 $\partial_{k+1} : \mathrm{K}(\mathbf{x})_{k+1} \to \mathrm{K}(\mathbf{x})_k$ 在基上描述为

$$\partial_{k+1}(e_{i_0} \wedge \cdots \wedge e_{i_k}) = \sum_{j=0}^{k} (-1)^j x_{i_j} e_{i_0} \wedge \cdots \widehat{e_{j_j}} \cdots \wedge e_{i_k}, \quad 1 \leq i_0 < \cdots < i_k \leq n,$$

其中 $e_1, \ldots, e_n$ 是 $R^{\oplus n}$ 的标准基, $\widehat{(\cdots)}$ 代表省略该项; 注意到 $\operatorname{coker}(\partial_1) = \kappa$, 记相应的商同态为 $\partial_0 : F_0 \twoheadrightarrow \kappa$.

取极小自由解消 $F_\bullet \to \kappa \to 0$. 今将构造链复形同态 $\alpha = (\alpha_i)_{i \geq 0} : \mathrm{K}(\mathbf{x}) \to F_\bullet$ 使得 $\alpha \otimes \mathrm{id}_\kappa$ 为单; 根据 $\mathrm{K}(\mathbf{x})_n \underset{R}{\otimes} \kappa \simeq \kappa$ 和命题 10.8.8 (ii), 这将蕴涵 $\mathrm{gl.dim}(\kappa) \geq n$.

初始构造容易: 取 $f_0 \in F_0$ 使之映为 $1 \in \kappa$, 则 $f_0 \notin \mathfrak{m} F_0$; 因为 $\mathrm{rk}(F_0) = 1$, 可定义 $\alpha_0 : R \xrightarrow{\sim} F_0$ 使得 $\alpha_0(1) = f_0$. 接着设 $i \geq 1$, 而且已有实线部分的交换图表

$$\begin{tikzcd}
\bigwedge^i R^{\oplus n} \arrow[r, "\partial_i"] \arrow[d, dashed, "\alpha_i"'] & \bigwedge^{i-1} R^{\oplus n} \arrow[r, "\partial_{i-1}"] \arrow[d, "\alpha_{i-1}"] & \cdots \arrow[r, "\partial_1"] & R \arrow[r, "\partial_0"] \arrow[d, "\alpha_0"] & \kappa \arrow[d, equal] \\
F_i \arrow[r, "d_i"'] & F_{i-1} \arrow[r, "d_{i-1}"'] & \cdots \arrow[r, "d_1"'] & F_0 \arrow[r, "d_0"'] & \kappa.
\end{tikzcd}$$

易见 $\mathrm{im}(\alpha_{i-1}\partial_i) \subset \ker(d_{i-1}) = \mathrm{im}(d_i)$; 因为 $\bigwedge^i R^{\oplus n}$ 是投射模, 确实有虚线之 α_i 使全图交换. 此外, 平坦性和引理 10.8.7 蕴涵

$$\mathrm{im}(\partial_i) \subset \mathfrak{m} \bigwedge^{i-1} R^{\oplus n} \simeq \left(\bigwedge^{i-1} R^{\oplus n} \right) \underset{R}{\otimes} \mathfrak{m}, \quad \mathrm{im}(d_i) \subset \mathfrak{m} F_{i-1} \simeq F_{i-1} \underset{R}{\otimes} \mathfrak{m}.$$

按此改写交换图表的左侧方块, 取 $(\cdot) \underset{R}{\otimes} \kappa$ 并将张量积移入 $\bigwedge^\bullet$ (见 [7, 引理 7.6.4]), 便有交换图表

$$\begin{tikzcd}
e_{h_1} \wedge \cdots \wedge e_{h_i} \arrow[r, mapsto] \arrow[d, phantom, "\cap" rotate=90] & \sum_{j=1}^{i} (-1)^{j-1} \left(\cdots \wedge \widehat{e_{h_j}} \wedge \cdots \right) \otimes \overline{x}_j \arrow[d, phantom, "\cap" rotate=90] \\
\bigwedge^i \kappa^{\oplus n} \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_i \otimes \mathrm{id}_\kappa"'] & \left(\bigwedge^{i-1} \kappa^{\oplus n} \right) \underset{\kappa}{\otimes} \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 \arrow[d, "(\alpha_{i-1} \otimes \mathrm{id}_\kappa) \otimes \mathrm{id}"] \\
F_i \underset{R}{\otimes} \kappa \arrow[r] & \left(F_{i-1} \underset{R}{\otimes} \kappa \right) \underset{\kappa}{\otimes} \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2.
\end{tikzcd}$$

因为 $\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n$ 线性无关, 易见第一行为单; $\alpha_{i-1} \otimes \mathrm{id}_\kappa$ 已知单, 故第二列亦单. 综上, $\alpha_i \otimes \mathrm{id}_\kappa$ 为单. 构造完结. □

定理 10.9.5 (J.-P. Serre) 对于 Noether 局部环 $(R, \mathfrak{m})$, 记 $\kappa = R/\mathfrak{m}$. 以下等价:

(i) R 是正则局部环,

(ii) $\mathrm{gl.dim}(R) < +\infty$,

(iii) 对所有 R-模 M 皆有 $\mathrm{proj.dim}(M) < +\infty$,

(iv) $\mathrm{proj.dim}(\kappa) < +\infty$.

证明 (i) $\implies$ (ii) 来自定理 10.9.2.

(ii) $\implies$ (iii) $\implies$ (iv) 平凡.

(iv) $\implies$ (i). 命 $n = \dim_\kappa \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$, 定理 10.2.4 和推论 10.4.8 将问题化为证 $\mathrm{depth}_{\mathfrak{m}}(R) \geq n$. 留意到 $\mathrm{depth}_{\mathfrak{m}}(\kappa) = 0$. 定理 10.9.1 (取 $M = \kappa$) 蕴涵 $\mathrm{depth}_{\mathfrak{m}}(R) = \mathrm{proj.dim}(\kappa)$. 应用引理 10.9.4 完成证明. □

推论 10.9.6 若 $\mathfrak{p}$ 是正则局部环 R 的素理想, 则 $R_{\mathfrak{p}}$ 仍是正则局部环.

证明 基于定理 10.9.5, 证 $\mathrm{gl.dim}(R_{\mathfrak{p}}) < +\infty$ 即可. 应用命题 10.8.3 (i). □

推论 10.9.7 设 $(R, \mathfrak{m})$ 和 $(S, \mathfrak{n})$ 为 Noether 局部环, $\varphi : S \to R$ 是局部同态 (定义 1.11.7), 也是平坦同态. 若 S 是正则局部环, 则 R 亦然.

证明 命 $n = \mathrm{gl.dim}(S) < +\infty$. 对 $\kappa := R/\mathfrak{m}$ 取极小自由解消 $F_\bullet \to \kappa \to 0$, 平坦性蕴涵 $S \underset{R}{\otimes} F_\bullet \to S \underset{R}{\otimes} \kappa$ 仍是自由解消, 而且 $\varphi(\mathfrak{m}) \subset \mathfrak{n}$ 和引理 10.8.7 的陈述 (ii) 蕴涵它仍极小. 于是命题 10.8.8 (ii) 蕴涵 $S \underset{R}{\otimes} F_{n+1} = 0$. 由 S 是忠实平坦 R-模 (命题 5.5.2) 知 $F_{n+1} = 0$, 从而 $\mathrm{proj.dim}(\kappa) \leq n$, 定理 10.9.5 说明 R 正则. □

10.10 应用: 正则局部环的唯一分解性

正则局部环的唯一分解性是同调技术在交换环论中的杰出体现, 其证明需要一些铺垫. 首先回忆到对于整环 R 中的非零元 x, 若它生成素理想 (x), 则称 x 为素元.

引理 10.10.1 设 R 为 Noether 整环, x 是其素元. 若 $R[x^{-1}]$ 是唯一分解整环, 则 R 亦然.

证明 应用命题 7.3.3 对 Noether 唯一分解整环的刻画. 设 $\mathfrak{p} \subset R$ 是高度 1 的素理想. 若 $x \in \mathfrak{p}$, 则考虑高度可知 $\mathfrak{p} = (x)$.

以下设 $x \notin \mathfrak{p}$, 此时 $\mathfrak{p}[x^{-1}] \subset R[x^{-1}]$ 是高度 1 的素理想, 因而可表作 $aR[x^{-1}]$, 其中 $a \in \mathfrak{p}[x^{-1}] \cap R = \mathfrak{p}$; 在所有这些元素 a 中, 选取使得理想 $(a) := aR$ 极大者. 兹断言必有 $a \notin (x)$: 假如 $a = bx$, 则 $(a) \subset (b)$, $b \in \mathfrak{p}$ 而 $bR[x^{-1}] = aR[x^{-1}]$, 但 $(a) \neq (b)$ (因 $x \notin R^\times$), 这与 a 的取法矛盾.

以下说明 $\mathfrak{p} = (a)$. 证 $\subset$ 即可. 设 $y \in \mathfrak{p}$, 则在 $R[x^{-1}]$ 中观察可见存在 $k \geq 0$ 和 $b \in R$ 使得 $x^k y = ab$; 若 $k \geq 1$, 则 $b \in (x)$ 而 $x^{k-1}y = a(bx^{-1})$. 于是能取到 $b \in R$ 使得 $y = ab \in (a)$. 证毕. □

定义 10.10.2 设 R 为环, M_1 和 M_2 为 R-模. 如果存在 $p, q \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ 和同构 $M_1 \oplus R^{\oplus p} \simeq M_2 \oplus R^{\oplus q}$, 则称 M_1 和 M_2 **稳定等价**. 和自由模稳定等价的模称为**稳定自由**的.

稳定等价显然给出 R-模之间的等价关系. 稳定自由模总是投射模.

引理 10.10.3 设 P 是投射 R-模, 而且具有长度有限的自由解消 $0 \to F_n \to \cdots \to F_0 \to P \to 0$, 则 P 稳定自由.

证明 对前提中的 n 递归. 当 $n = 0$ 时 $P \simeq F_0$ 自由. 设 $n \geq 1$, 命 $Q = \ker[F_0 \to P]$, 则投射条件蕴涵 $F_0 \simeq P \oplus Q$ (命题 1.4.3 (iv)), 而且 Q 是投射模, 具有更短的自由解消, 故 Q 稳定自由. 综上易见 P 稳定自由. □

留意到整环 R 中的非零理想是主理想当且仅当它作为 R-模同构于 R.

引理 10.10.4 设 I 为整环 R 的理想. 若 I 作为 R-模是稳定自由而且有限生成的, 则 I 是主理想.

证明 不妨设 $I \neq 0$. 首先说明 $I_\mathfrak{p} = IR_\mathfrak{p}$ 对 R 的所有素理想 $\mathfrak{p}$ 都是秩 1 自由 $R_\mathfrak{p}$-模. 命 $K = \mathrm{Frac}(R)$. 稳定自由蕴涵投射, 故 $I_\mathfrak{p}$ 是有限秩自由模 (用到命题 5.7.2), 但 $I[(R \smallsetminus \{0\})^{-1}] = K \cdot I = K$ 导致 $I_\mathfrak{p}$ 秩为 1.

其次, 存在 $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, 某个基数 n 以及 R-模同构 $I \oplus R^{\oplus m} \simeq R^{\oplus n}$; 两边和 $K := \mathrm{Frac}(R)$ 作张量积, 得到 $K^{\oplus(m+1)} \simeq K^{\oplus n}$, 因此 $n = m + 1$. 对 $I \oplus R^{\oplus m} \simeq R^{\oplus(m+1)}$ 两边取 $\bigwedge^{m+1}$, 右边产物同构于 R, 左边则同构于

$$\bigoplus_{a+b=m+1} \bigwedge^a I \underset{R}{\otimes} \bigwedge^b (R^{\oplus m})$$

(直接验证, 或理解为 [7, 推论 7.6.7] 的特例). 将在 $\mathfrak{p}$ 处的局部化和 $\bigwedge^\bullet$ 换序 (见 [7, 引理 7.6.4]) 并结合上一步结论, 可见 $\bigwedge^a I$ 仅在 $a \in \{0, 1\}$ 时非零, 而另一方面 $\bigwedge^{m+1}(R^{\oplus m}) = 0$. 这就给出模同构 $I \simeq R$. □

定理 10.10.5 (Auslander–Buchsbaum, 永田雅宜) 正则局部环是唯一分解整环.

证明 给定正则局部环 $(R, \mathfrak{m})$, 定理 10.2.9 确保 R 是 Noether 整环. 以下对 $d := \dim R$ 递归论证. 当 $d = 0$ 时 R 是域. 以下设 $d \geq 1$. 取 $x \in \mathfrak{m} \smallsetminus \mathfrak{m}^2$, 则注记 10.2.5 确保 $R/(x)$ 仍是正则局部环, 因而是整环, 故 x 是素元. 鉴于引理 10.10.1, 证 $R[x^{-1}]$ 是唯一分解整环即可.

根据命题 7.3.3, 目标化为证 $R[x^{-1}]$ 中满足 $\mathrm{ht}(\mathfrak{p}') = 1$ 的素理想 $\mathfrak{p}'$ 皆为主理想. 记 $\mathfrak{p} = R \cap \mathfrak{p}'$, 则 $\mathfrak{p}' = \mathfrak{p}[x^{-1}]$. 推论 10.9.3 说明 $\mathfrak{p}$ 具有长度有限的自由解消, 故 $\mathfrak{p}'$ 亦然. 引理 10.10.3 和 10.10.4 将问题进一步化为证 $\mathfrak{p}'$ 为投射模.

设 $\mathfrak{q}'$ 为 $R[x^{-1}]$ 的极大理想, $\mathfrak{q} := R \cap \mathfrak{q}'$, 则 $\mathfrak{q}' = \mathfrak{q}[x^{-1}]$ 而 $R[x^{-1}]_{\mathfrak{q}'} \simeq R_\mathfrak{q}$ 仍是正则局部环 (推论 10.9.6). 注意到 $x \notin \mathfrak{q}$ 蕴涵 $\mathfrak{q} \subsetneq \mathfrak{m}$, 故 $\dim R_\mathfrak{q} < \dim R$; 于是 $R_\mathfrak{q}$ 是唯一分解整环, $\mathfrak{p}' R[x^{-1}]_{\mathfrak{q}'}$ 是主理想.

既然 $\mathfrak{q}'$ 任意, 代入推论 5.7.3 可见 $\mathfrak{p}'$ 平坦, 再由命题 5.7.2 知其投射. 证毕. □

作为推论, 正则局部环是正规整环, 但这点可以有更简单的论证.

10.11 正则环

现在来推广正则局部环的概念.

定义 10.11.1 (正则环) 设 R 为 Noether 环. 若 $R_{\mathfrak{p}}$ 对于 R 的所有素理想 $\mathfrak{p}$ 都是正则局部环, 则称 R 为正则环.

推论 10.9.6 表明正则环的定义只需对极大理想来检验, 因此正则局部环是正则环. 同理, 若 U 是正则环 R 的乘性子集, 则 $R[U^{-1}]$ 也是正则环.

命题 10.11.2 设 R 为正则环, $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, 则 $R[X_1, \ldots, X_n]$ 也是正则环.

证明 不妨设 $n = 1$. 以下运用定理 10.9.5 对正则局部环的同调刻画. 对 $R[X]$ 的所有素理想 $\mathfrak{q}$, 命 $\mathfrak{p} = R \cap \mathfrak{q}$, 则 $R[X]_{\mathfrak{q}}$ 是 $R_{\mathfrak{p}}[X]$ 的局部化. 定理 10.8.5 表明

$$\mathrm{gl.dim}(R_{\mathfrak{p}}[X]) = n + \mathrm{gl.dim}(R_{\mathfrak{p}}) < +\infty,$$

因此 $\mathrm{gl.dim}(R[X]_{\mathfrak{q}}) < +\infty$ 而 $R[X]_{\mathfrak{q}}$ 是正则局部环. □

命题 10.11.3 若 R 是正则环, 则 R 是 Cohen–Macaulay 环 (定义 6.3.1), 也是正规环 (定义 10.5.2).

证明 Cohen–Macaulay 性质可以在每个 $R_{\mathfrak{p}}$ 上检验, 归结为命题 10.5.3 (i). 至于正规性, 兹从定理 10.6.7 对所有极大理想 $\mathfrak{m}$ 说明 $R_{\mathfrak{m}}$ 是正规整环. 定理 10.2.9 说明 $R_{\mathfrak{m}}$ 是整环, 条件 $\mathbf{R}_1$ 当然地成立; 命题 10.5.3 说明 $R_{\mathfrak{m}}$ 是 Cohen–Macaulay 环, 再应用命题 10.6.2 得到条件 $\mathbf{S}_2$. □

结合推论 10.5.10 和命题 10.11.3 可知正则环都是泛悬链环.

例 10.11.4 Dedekind 整环 (定义 10.3.1) 无非是 1 维正规整环, 这是命题 10.3.3 和 10.11.3 的综合. 作为特例, $\mathbb{Z}$ 是 1 维正规整环, 因此也是泛悬链环.

有限维 Noether 正则环依然可以用整体维数来刻画.

命题 10.11.5 对于 Noether 环 R 和 $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, 以下等价:

(i) $\mathrm{gl.dim}(R) = n$,

(ii) R 是 n 维正则环.

证明 (i) $\implies$ (ii). 命题 10.8.3 (i) 对所有极大理想 $\mathfrak{m}$ 说明 $\mathrm{gl.dim}(R_{\mathfrak{m}}) \leq n$, 因此定理 10.9.5 说明 $R_{\mathfrak{m}}$ 是正则局部环, 故 R 正则. 定理 10.9.2 说明 $\dim R_{\mathfrak{m}} = \mathrm{gl.dim}(R_{\mathfrak{m}})$, 代回命题 10.8.3 (ii) 可见

$$\dim R = \sup_{\mathfrak{m}} \dim R_{\mathfrak{m}} = \sup_{\mathfrak{m}} \mathrm{gl.dim}(R_{\mathfrak{m}}) = \mathrm{gl.dim}(R) = n.$$

(ii) $\implies$ (i). 同样技巧给出 $\mathrm{gl.dim}(R) = \sup_{\mathfrak{m}} \mathrm{gl.dim}(R_{\mathfrak{m}}) = \sup_{\mathfrak{m}} \dim R_{\mathfrak{m}}$. □

以下是平坦下降技术 (§5.6) 的一则例子.

命题 10.11.6 (正则性的平坦下降) 设 $\varphi: R \to S$ 为忠实平坦环同态. 若 S 是正则环, 则 R 亦然.

证明 推论 5.6.6 蕴涵 R 是 Noether 环. 由于 φ 诱导满射 $\mathrm{Spec}(S) \to \mathrm{Spec}(R)$ (定理 5.5.4), 对任何 $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R)$ 皆存在原像 $\mathfrak{q} \in \mathrm{Spec}(S)$, 相应的 $\varphi_{\mathfrak{p},\mathfrak{q}} : R_{\mathfrak{p}} \to S_{\mathfrak{q}}$ 是局部环之间的局部同态, 同时也是平坦同态 (命题 5.2.2 (ii)). 代入推论 10.9.7 知 $R_{\mathfrak{p}}$ 正则; $\mathfrak{p}$ 可任取, 故 R 正则. □

习题

1. 试严格地证明 (10.1.1).

2. 证明半局部 Dedekind 整环是主理想整环.

提示 证非零素理想 $\mathfrak{p}$ 皆为主理想即可. 记 R 的非零素理想为 $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_n$, 取 $x_1 \in \mathfrak{p}_1 \smallsetminus \mathfrak{p}_1^2$, 再以中国剩余定理取 $x \in R$ 使得

$$x \equiv x_1 \pmod{\mathfrak{p}_1^2}, \quad x \equiv 1 \pmod{\mathfrak{p}_j,\ j = 2, \ldots, n}.$$

考虑局部化来论证 $(x) = \mathfrak{p}_1$.

3. 说明零维 Noether 环是 Cohen–Macaulay 环.

4. 说明 1 维既约 Noether 环是 Cohen–Macaulay 环.

5. 说明有限多个维数 ≤ 2 的 Noether 正规整环的直积是 Cohen–Macaulay 环.

6. 对于 Noether 环 R 及其非零因子 t, 证明 R-模 $R/(t)$ 的嵌入素理想 (注记 3.4.7) 恰是 $\mathrm{Ass}_R(R/(t))$ 中满足 $\mathrm{ht}(\mathfrak{p}) > 1$ 的元素 $\mathfrak{p}$. 以此改述 Serre 条件 $\mathbf{S}_2$ 如下: R 和 $R/(t)$ (此处 $t \in R$ 非零因子) 皆无嵌入素理想.

7. 设 R 是 Noether 环. 证明若 $R[X]$ 是 Cohen–Macaulay 环, 则 R 亦然.

8. 设 $R \to S$ 是 Noether 环的嵌入, R 是正则环, S 是有限 R-代数. 证明 $R \to S$ 平坦当且仅当 S 是 Cohen–Macaulay 环.

提示 记素谱之间的映射为 $\mathfrak{q} \mapsto \mathfrak{p}$, 并且以命题 5.2.2 (ii) 联系 $R \to S$ 和 $R_{\mathfrak{p}} \to S_{\mathfrak{q}}$ 的平坦性. 有限条件蕴涵 $S_{\mathfrak{q}} \underset{R_{\mathfrak{p}}}{\otimes} \kappa(\mathfrak{p})$ 是 Cohen–Macaulay 环, 然后用推论 10.7.4 (iii).

第十一章 暂存区

11.1 Kähler 微分形式

以下采取约定 9.3.10 对元素列 $\mathbf{x}$ 的记法, 并考虑定义 9.3.5 中的上链复形 $\mathrm{K}^\bullet(\mathbf{x}, \cdot)$.

例 11.1.1 取 $\Bbbk$ 为交换环, R 为 n 元多项式 $\Bbbk$-代数 $\Bbbk[X_1, \ldots, X_n]$ 而 $M = \Bbbk[Y_1, \ldots, Y_n]$, 按照 $f \cdot x = f(\partial_1, \ldots, \partial_n)x$ 赋予 R-模结构, 其中 $\partial_i = \frac{\partial}{\partial Y_i}$ 是形式偏导运算. 取 R 的元素列 $\mathbf{x} = [X_1, \ldots, X_n]$, 则 $\mathrm{K}^\bullet(\mathbf{x}; M)$ 等同于 $\Bbbk[Y_1, \ldots, Y_n]$ 的 de Rham 复形, 方法是让 $f : \bigwedge^h(R^{\oplus n}) \to M$ 对应到微分 h-形式

$$\sum_{1 \leq \alpha_1 < \cdots < \alpha_h \leq n} m(\alpha_1, \ldots, \alpha_h) \,\mathrm{d}Y_{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}Y_{\alpha_h},$$

其中 m 是按 §9.3 的方式对应到 f 的量.

11.2 Cohn 结构定理的证明

附录 A 拓扑知识

A.1 基本术语

首先回顾拓扑基的定义.

定义 A.1.1 (基) 设 $\mathfrak{B}$ 为拓扑空间 X 的一族子集, 如果

- ◇ $\mathfrak{B}$ 的元素都是 X 的开子集,
- ◇ 对所有开子集 $U \subset X$, 存在 $\mathfrak{B}_U \subset \mathfrak{B}$ 使得 $U = \bigcup_{B \in \mathfrak{B}_U} B$,

则称 $\mathfrak{B}$ 为 X 的一组基.

拓扑空间 X 的子集 E 继承相应的诱导拓扑, 或称子空间拓扑: E 的开 (或闭) 子集形如 $E \cap U$ (或 $E \cap Z$), 其中 U (或 Z) 是 X 的开 (或闭) 子集.

对于连续映射 $f : X \to Y$, 如果 f 的像集是开 (或闭) 子集, 而且 f 给出从 X 到 $f(X)$ 相对于诱导拓扑的同胚, 则称 f 为开 (或闭) 嵌入.

定义 A.1.2 (闭点) 对于拓扑空间 X 和任意 $x \in X$, 若 $\{x\}$ 是 X 的闭子集, 则称 x 为 X 的闭点.

给定拓扑空间 X 的开覆盖 $\{U_i\}_{i \in I}$, 易证如果 X 的子集 E 和每个 U_i 的交都是 U_i 的开 (或闭) 子集, 则 E 是开 (或闭) 的; 因此子集开或闭可以局部地检验. 然而 “局部闭” 一词在拓扑学中另有所指.

定义 A.1.3 (局部闭子集) 如果拓扑空间 X 的子集 Z 形如 $U \cap Z$, 其中 $U \subset X$ 是开子集, $Z \subset X$ 是闭子集, 则称 Z 为 X 的局部闭子集.

局部闭子集的有限交仍是局部闭的, 局部闭子集的补集仍是局部闭的.

定义 A.1.4 (拟紧空间和拟紧映射) 如果拓扑空间 X 的任意开覆盖都有有限子覆盖, 则称 X 为拟紧的. [1)]

对于拓扑空间之间的连续映射 $f : X \to Y$, 如果 Y 的所有拟紧开子集在 X 中的原像都是拟紧的, 则称 f 为拟紧映射.[2)]

由定义立见拟紧映射的合成仍为拟紧. 空间 X 是拟紧的当且仅当映到独点集的映射 $X \to \{\star\}$ 拟紧, 因此拟紧映射可谓是拟紧空间的相对版本.

定义 A.1.5 (拟分离空间) 如果拓扑空间 X 中任两个拟紧开子集之交仍为拟紧的, 则称 X 为拟分离空间.

引理 A.1.6 拟紧空间的闭子集仍是拟紧的. 拓扑空间中有限多个拟紧子集之并仍是拟紧的.

证明 设 Z 是拟紧空间 X 的闭子集. 若 $Z \subset \bigcup_{i \in I} U_i$, 其中每个 U_i 都是 X 的开子集, 则 $\{U_i\}_{i \in I}$ 与 $\{X \smallsetminus Z\}$ 的并是 X 的开覆盖; 从中萃取包含 $X \smallsetminus Z$ 在内的有限子覆盖即可.

设 E_1 和 E_2 为拟紧子集. 若 $E_1 \cup E_2 \subset \bigcup_{i \in I} U_i$ 如上, 则存在有限子集 $I_1, I_2 \subset I$ 分别给出 E_1 和 E_2 的有限子覆盖; 取 $I_1 \cup I_2$ 给出 $E_1 \cup E_2$ 的有限子覆盖. □

定义 A.1.7 (回紧子集) 赋予拓扑空间 X 的子集 E 诱导拓扑. 若包含映射 $E \hookrightarrow X$ 是拟紧映射, 则称 E 为 X 的回紧子集.

回紧子集的平凡例子是 X 本身和 $\varnothing$.

引理 A.1.8 考虑连续映射 $f : X \to Y$. 若 X 拟紧, 则 $f(X)$ 对来自 Y 的诱导拓扑也拟紧. 若 f 是拟紧映射, 则 $f(X)$ 是 Y 的回紧子集.

证明 设 X 拟紧. 若有 $f(X) \subset \bigcup_{i \in I} V_i$, 其中 $V_i \subset Y$ 开, 则 $X = \bigcup_{i \in I} f^{-1}(V_i)$ 故存在有限子集 $I_0 \subset I$ 使得 $X = \bigcup_{i \in I_0} f^{-1}(V_i)$, 继而 $f(X) \subset \bigcup_{i \in I_0} V_i$. 综上, $f(X)$ 拟紧.

设 f 是拟紧映射, 而 $K \subset Y$ 是拟紧开子集, 则 $f^{-1}(K) \subset X$ 是拟紧开子集. 于是 $f(X) \cap K = f(f^{-1}(K))$ 根据上一段是 $f(X)$ 的拟紧子集. 这就说明包含映射 $f(X) \hookrightarrow Y$ 拟紧. □

引理 A.1.9 设 $E_1, E_2 \subset X$ 为回紧开子集, 则 $E_1 \cap E_2$ 和 $E_1 \cup E_2$ 亦然.

证明 对于交的情形, 设 K 为 X 的拟紧开子集, 则 E_2 回紧蕴涵 $E_2 \cap K$ 拟紧, 它也是开的; 继而 E_1 回紧蕴涵 $E_1 \cap (E_2 \cap K)$ 拟紧. 由此知 $E_1 \cap E_2$ 回紧.

[1)] 在数学分析中, 具此性质的 X 通常被称为紧, 但是在代数几何或相关领域中, 惯常将紧空间理解为具有 Hausdorff 性质的拟紧空间.

[2)] 这与数学分析中拟紧映射不同, 因为条件只针对 Y 的拟紧开子集, 而不是所有拟紧子集.

对于并的情形, 取 K 如上, 则 $(E_1 \cup E_2) \cap K = (E_1 \cap K) \cup (E_2 \cap K)$ 是两个拟紧子集之并, 仍为拟紧. 由此知 $E_1 \cup E_2$ 回紧. $\square$

引理 A.1.10 拟分离空间的等价刻画是所有拟紧开子集皆为回紧的.

证明 所有拟紧开子集皆回紧等价于说对所有拟紧开子集 U 和 V, 其交 $U \cap V$ 也是拟紧的; 此即拟分离空间的定义. $\square$

A.2 连通性

本节的 X 为选定的拓扑空间.

定义 A.2.1 (连通性) 当以下条件成立时, 称 X 为连通的: X 非空, 而且若有无交并 $X = A \sqcup B$, 其中 A 和 B 皆既开又闭 (等价于皆开, 也等价于皆闭), 则必有 $A = \varnothing$ 或 $B = \varnothing$.

独点集显然连通.

引理 A.2.2 给定 X 的一族连通子集 $(E_i)_{i \in I}$, 其中 $I \neq \varnothing$. 若 $\bigcap_{i \in I} E_i \neq \varnothing$, 则 $\bigcup_{i \in I} E_i$ 连通.

证明 设有 $\bigcup_i E_i = A \sqcup B$, 两者皆闭, 则不妨设 $A \cap \bigcap_i E_i \neq \varnothing$, 于是 $E_i \cap A \neq \varnothing$ 对所有 $i \in I$ 成立; 然而 $E_i = (E_i \cap A) \sqcup (E_i \cap B)$, 故 E_i 连通蕴涵 $E_i \subset A$. 由此知 $\bigcup_i E_i = A$. $\square$

定义 A.2.3 (连通分支) 将 X 的所有连通子集按包含关系赋序, 其中的极大元称为 X 的连通分支. 记 $\pi_0(X) := \{C \subset X : \text{连通分支}\}$.

引理 A.2.4 设 E 为 X 的任意连通子集.

(i) $\overline{E}$ 仍是 X 的连通子集.

(ii) 存在唯一的连通分支 C 使得 $E \subset C$.

(iii) X 是其所有连通分支的并.

(iv) 若 $f : X \to Y$ 是连续映射, 则 $f(E)$ 是 Y 的连通子集.

(v) 若连续映射 $f : X \to Y$ 的纤维皆连通, 而且对 Y 的所有子集 F 皆满足 F 闭 $\iff$ $f^{-1}(F)$ 闭, 则有双射

$$\begin{aligned} \{X \text{ 的连通分支}\} &\xleftrightarrow{1:1} \{Y \text{ 的连通分支}\} \\ E &\longmapsto f(E) \\ f^{-1}(F) &\longleftarrow F. \end{aligned}$$

证明 (i). 设有 $\overline{E} = A \sqcup B$, 两者皆在 $\overline{E}$ 中闭, 则 $E = (E \cap A) \sqcup (E \cap B)$; 不失一般性可设 $E \cap A = E$, 故 $\overline{E} \subset A$, 从而有 $\overline{E} = A$.

(ii). 基于 Zorn 引理, 存在性和唯一性都归结为引理 A.2.2.

(iii). 相当于证所有 $x \in X$ 都包含于某个连通分支. 在 (iii) 中代入 $E = \{x\}$ 即可.

(iv). 设有 $f(E) = A \sqcup B$, 其中 $A = f(E) \cap U$, $B = f(E) \cap V$ 而 $U, V \subset Y$ 皆开, 则 $E = (E \cap f^{-1}(U)) \sqcup (E \cap f^{-1}(V))$; 不失一般性可设 $E \cap f^{-1}(U) = \varnothing$, 则 $f(E) \cap U = \varnothing$. 综上, $f(E)$ 连通.

(v). 纤维连通蕴涵 f 满. 先论证若 $F \subset Y$ 连通, 则 $f^{-1}(F)$ 连通. 设 $f^{-1}(F) = A_1 \sqcup A_2$, 其中 A_1 和 A_2 皆闭, 则对所有 $y \in F$, 将纤维和分解取交后可见存在唯一的 $i \in \{1, 2\}$ 使得 $f^{-1}(y) \subset A_i$. 按照 i 的值作分解 $F = F_1 \sqcup F_2$; 我们有 $f^{-1}(F_i) = f^{-1}(F) \cap A_i$ 为闭, 故 F_i 闭. 由此知存在唯一的 i 使得 $F_i = F$, 相应地 $f^{-1}(F) = A_i$.

鉴于 (iv) 和上一段, $E \mapsto f(E)$ 和 $F \mapsto f^{-1}(F)$ 都保持连通性. 由 f 满知 $f(f^{-1}F) = F$; 另一方面, 若 E 为 X 的连通分支, 则 $E \subset f^{-1}f(E)$ 蕴涵 $E = f^{-1}f(E)$.

- ◇ 设 E 为 X 的连通分支. 取连通分支 $F' \supset f(E)$, 则 $f^{-1}(F') \supset f^{-1}f(E) = E$ 蕴涵 $f^{-1}(F') = E$, 故 $F' = f(f^{-1}F') = f(E)$.
- ◇ 设 F 为 Y 的连通分支. 取连通分支 $E' \supset f^{-1}(F)$, 则 $F = f(f^{-1}F) \subset f(E')$ 蕴涵 $F = f(E')$, 故 $E' = f^{-1}f(E') = f^{-1}(F)$.

综上可得连通分支之间的双向映射, 它们互为逆. □

引理 A.2.5 *设 $f : X \to Y$ 为连续映射. 若 f 的纤维皆连通, 而且 f 是开映射, 则 f 诱导连通分支之间的双射.*

证明 回忆到 f 满. 对于 Y 的子集 F, 我们有 $F = Y \smallsetminus f(X \smallsetminus f^{-1}(F))$. 因此 $f^{-1}(F)$ 闭蕴涵 F 闭. 代入引理 A.2.4 (v). □

引理 A.2.4 (i) 说明连通分支必为闭子集, 但未必开. 以下提供开性的一则充分条件.

定义 A.2.6 (局部连通空间) *若对于 $x \in X$ 的所有邻域 U, 存在 x 的连通邻域 U' 使得 $U' \subset U$, 则称 X 在 x 处局部连通; 处处局部连通的 X 称为局部连通空间.*

以下结论蕴涵定义 A.2.6 中的 U' 可取为开的.

引理 A.2.7 *若 X 局部连通, 则有*

(i) *X 的开子集也是局部连通的;*

(ii) *X 的连通分支都是开的;*

(iii) *X 有一族由连通开子集构成的基.*

证明 断言 (i) 自明. 对于 (ii), 设 C 是 X 的一个连通分支, $x \in C$, 取 x 的连通邻域 U', 则引理 A.2.2 蕴涵 $U' \cup C$ 连通, 故 $U' \subset C$; 这说明 C 开. 最后, 对所有 x 及其开邻域 U, 取 U 中包含 x 的连通分支 U', (i) 和 (ii) 说明 U' 开, 这就给出 (iii). □

以下概念是局部连通性的对立面.

定义 A.2.8 (全不连通空间) 若 X 的连通分支都是独点集, 则称 X 为全不连通空间.

A.3 Noether 空间

定义 A.3.1 (Noether 空间与局部 Noether 空间) 对于拓扑空间 X, 如果对任意闭子集降链

$$X_0 \supset X_1 \supset X_2 \supset \cdots$$

皆存在 k 使得 $i \geq k \implies X_i = X_k$, 则称 X 为 Noether 空间.

如果每个 $x \in X$ 都有开邻域 U 使得 U 是 Noether 空间, 则称 X 是局部 Noether 空间.

Noether 性质的等价表述是: 对于任何由 X 的闭子集构成的集合 $\mathcal{S}$, 按 $\subset$ 赋予偏序, 若 $\mathcal{S} \neq \varnothing$ 则它必含极小元. 论证不难, 可见 [7, 注记 6.10.5].

引理 A.3.2 设 X 为 Noether 空间, 则:

(i) X 的子集相对于诱导拓扑也是 Noether 空间;

(ii) 对于连续映射 $f: X \to Y$, 其像 $f(X)$ 相对于 Y 诱导的拓扑是 Noether 空间.

证明 对于 (i), 考虑子集 $E \subset X$ 中的闭子集降链 $E_0 \supset E_1 \supset \cdots$. 对每个 i 取 X 的闭子集 Z_i 使得 $E_i = E \cap Z_i$, 于是有 X 中的闭子集降链

$$Z_0 \supset Z_0 \cap Z_1 \supset Z_0 \cap Z_1 \cap Z_2 \supset \cdots,$$

而且 $E \cap (Z_0 \cap \cdots \cap Z_i) = E_i$. 综上可见存在 k 使得 $i \geq k \implies E_i = E_k$.

考虑像 $f(X)$ 中的闭子集降链 $Y_0 \supset Y_1 \supset \cdots$. 我们有 X 中的闭子集降链 $f^{-1}(Y_0) \supset f^{-1}(Y_1) \supset \cdots$, 而 $Y_i \subset f(X)$ 导致 $Y_i = f(f^{-1}(Y_i))$ 对所有 i 成立, 故存在 k 使得 $i \geq k \implies Y_i = Y_k$. □

引理 A.3.3 如果 X 是有限多个子集 $E_1, \ldots, E_m$ 的并, 每个 E_i 相对于诱导拓扑都是 Noether 空间, 则 X 亦然.

证明 考虑 X 的闭子集降链 $X_0 \supset X_1 \supset \cdots$. 对每个 $1 \leq i \leq m$, 得到 E_i 的闭子集降链 $X_0 \cap E_i \supset X_1 \cap E_i \supset \cdots$, 它在第 k_i 项之后稳定化. 由 $X_j = \bigcup_{i=1}^{m} (X_j \cap E_i)$ 可见原降链在第 $\max_{1 \leq i \leq m}\{k_i\}$ 项之后稳定化. □

引理 A.3.4 设 X 为 Noether 空间, 则 X 拟紧, 而且所有子集 $E \subset X$ 都是回紧子集 (定义 A.1.7).

证明 给定开覆盖 $X = \bigcup_{i \in I} U_i$, 若无有限子覆盖, 则可逐步从 I 取出一列元素 $i_1, i_2, \ldots$ 使得

$$X \supsetneq X \smallsetminus U_{i_1} \supsetneq X \smallsetminus (U_{i_1} \cup U_{i_2}) \supsetneq \cdots;$$

这是闭子集的无穷严格降链, 矛盾.

给定子集 $E \subset X$ 和 X 的拟紧开子集 K, 则 $E \cap K$ 既然是 X 的子集, 引理 A.3.2 和上一段蕴涵它对诱导拓扑也是拟紧的. 这说明包含映射 $E \hookrightarrow X$ 是拟紧映射, 故 E 回紧. □

引理 A.3.5 若 X 是局部 Noether 空间, 则 X 局部连通 (定义 A.2.6); 特别地, X 的连通分支皆开. 若要求 X 是 Noether 空间, 则其连通分支个数有限.

证明 先设 X 是 Noether 空间. 若有相异连通分支 $C_1, C_2, \ldots$ 则 $X = \bigsqcup_{i \geq 1} C_i \supsetneq \bigsqcup_{i \geq 2} C_i \supsetneq \cdots$ 是闭子集的降链, 故 Noether 条件蕴涵连通分支个数有限. 这又进一步说明每个连通分支皆开.

接着设 X 是局部 Noether 空间. 若 $x \in X$ 有邻域 U, 取 X 的 Noether 开子集 U' 使得 $x \in U'$, 则 $U \cap U'$ 仍是 Noether 的. 在 $U \cap U'$ 中取包含 x 的连通分支 C, 则上一段说明 C 是 x 的连通开邻域. 因此 X 在每个 x 处皆局部连通. □

A.4 不可约分支

先来定义不可约拓扑空间, 再定义拓扑空间的不可约分支.

定义 A.4.1 (不可约子集) 设 X 为拓扑空间, $X \neq \varnothing$. 若对所有满足 $X = Z_1 \cup Z_2$ 的闭子集 $Z_1, Z_2 \subset X$, 皆有 $X = Z_1$ 或 $X = Z_2$, 则称 X 不可约.

引理 A.4.2 设 E 为拓扑空间 X 的不可约子集. 若有闭子集 $Z_1, \ldots, Z_n \subset X$ 使得 $E \subset \bigcup_{i=1}^{n} Z_i$, 则存在 $1 \leq i \leq n$ 使得 $E \subset Z_i$.

证明 处理特例 $n = 2$ 即可. 由 $E \subset Z_1 \cup Z_2$ 可得 $E = (E \cap Z_1) \cup (E \cap Z_2)$, 然后代入不可约空间的定义. □

引理 A.4.3 不可约子集对连续映射的像仍是不可约子集.

证明 考虑连续映射 $f: X \to Y$ 和不可约子集 $E \subset X$. 若 $f(X) = Y_1 \cup Y_2$, 其中 Y_1 和 Y_2 是 $f(E)$ 的闭子集, 则 $X = (f^{-1}(Y_1) \cup f^{-1}(Y_2)$, 故必有 $X = f^{-1}(Y_1)$ 或 $X = f^{-1}(Y_2)$, 从而有 $f(X) = Y_1$ 或 $f(X) = Y_2$. □

定义 A.4.4 (不可约分支) 设 X 为拓扑空间. 若子集 $Z \subset X$ 本身不可约, 而且它在 X 的所有不可约子集中对包含关系是极大元, 则称 Z 为 X 的一个不可约分支.

引理 A.4.5 考虑拓扑空间 X.

(i) 若 X 不可约, 则 X 连通.

(ii) 不可约子集在 X 中的闭包仍不可约.

(iii) X 的不可约分支总是闭子集.

(iv) 任何不可约子集皆包含于某个不可约分支.

(v) X 等于其不可约分支的并; 特别地, 当 $X \neq \varnothing$ 时存在不可约分支.

证明 对于 (i), 如果 X 不连通, 则可以写成两个既开又闭的无交非空子集之并, 故 X 并非不可约.

对于 (ii), 考虑不可约子集 $E \subset X$. 若其闭包 $\overline{E}$ 是闭子集 Z_1 和 Z_2 之并, 则 $E = (Z_1 \cap E) \cup (Z_2 \cap E)$, 故有 $i \in \{1, 2\}$ 使得 $E = Z_i \cap E$; 因此 $Z_i \subset \overline{E} = \overline{Z_i \cap E} \subset Z_i$.

断言 (iii) 是 (ii) 的直接结论.

对于 (iv), 设 A 有不可约子集 E. 命 $\mathcal{S}$ 为 A 的所有含 E 的不可约子集所构成的集合, 按 $\subset$ 赋序; 因为 $E \in \mathcal{S}$, 这是非空偏序集. 为了用 Zorn 引理得到其极大元, 只须证 $\mathcal{S}$ 的每个全序子集 $\mathcal{T}$ 都有上界. 取 E' 为 $\mathcal{T}$ 中元素之并, 以下证 E' 不可约.

设 $E' = Z_1 \cup Z_2$, 其中 Z_1 和 Z_2 是 E' 的闭子集, $E' \neq Z_1$. 所有 $Z \in \mathcal{T}$ 都表作闭子集的并 $Z = (Z_1 \cap Z) \cup (Z_2 \cap Z)$. 必存在 $Z \in \mathcal{T}$ 使得 $Z \not\subset Z_1$, 否则 $E' = Z_1$. 故对 $\mathcal{T}$ 中所有的 $Z' \supset Z$ 都有 $Z' \not\subset Z_1$, 不可约性遂蕴涵 $Z' \subset Z_2$. 全序性质进一步蕴涵 $E' \subset Z_2$. 综之, E' 不可约.

断言 (v) 化为证每个 $x \in X$ 都包含于 X 的某个不可约分支. 然而 $\{x\}$ 不可约, 故应用 (iv) 即可. □

引理 A.4.6 设拓扑空间 X 满足 $X = \bigcup_{i=1}^{n} X_i$, 其中 $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ 每个 X_i 都是 X 的不可约闭子集, 而且满足 $i \neq j \implies X_i \not\subset X_j$. 此时

$$\{X_1, \ldots, X_n\} = \{X \text{ 的不可约分支}\}.$$

证明 设 Z 是 X 的不可约分支, 则引理 A.4.2 表明存在 i 使得 $Z \subset X_i$, 继而有 $Z = X_i$.

接着考虑给定之 $1 \leq i \leq n$. 引理 A.4.5 (iv) 给出 X 的不可约分支 Z_i 使得 $X_i \subset Z_i$. 根据上一步, 存在 $1 \leq j \leq n$ 使得 $Z_i = X_j$, 故由 $X_i \subset X_j$ 推得 $i = j$, 而 $X_i = Z_i$ 是不可约分支. □

引理 A.4.7 不可约拓扑空间 X 的非空开子集 U 必稠密, 而且 U 本身也不可约.

证明 设 V 为 X 的开子集. 若 $U \cap V = \varnothing$ 则 $X = (X \smallsetminus U) \cup (X \smallsetminus V)$, 故不可约性蕴涵 $V = \varnothing$. 由此知 U 稠密.

设 $U = (U \cap Z_1) \cup (U \cap Z_2)$, 其中 Z_1, Z_2 是 X 的闭子集, 则上一步给出 $X = \overline{U} \subset Z_1 \cup Z_2$, 故存在 $i \in \{1, 2\}$ 使得 $X = Z_i$, 继而有 $U \cap Z_i = U$. 证毕. □

命题 A.4.8 若 X 是 Noether 拓扑空间, 则:

(i) X 仅有有限多个相异不可约分支 $Z_1, \ldots, Z_n$.

在性质 (i) 对拓扑空间 X 成立的前提下:

(ii) $Z_i^* := Z_i \smallsetminus \bigcup_{j \neq i} Z_j$ 对所有 i 皆是 X 的开子集, 而 $X^* := \bigcup_{i=1}^n Z_i^*$ 是 X 的稠密开子集, X^* 的相异连通分支和不可约分支都是 $Z_1^*, \ldots, Z_n^*$;

(iii) 开子集 $U \subset X$ 稠密当且仅当 $U \cap Z_i^* \neq \varnothing$ 对所有 $1 \leq i \leq n$ 成立;

证明 可设 X 非空. 对于 (i), 所有具有无穷多个连通分支的非空闭子集 $E \subset X$ 对包含关系构成偏序集 $\mathcal{W}$. 今将使用反证法, 设 $\mathcal{W}$ 非空. 降链条件说明 $\mathcal{W}$ 有极小元 A. 注意到 A 并非不可约, 可表作 $A = Z_1 \cup Z_2$, 其中 $Z_1, Z_2 \subsetneq A$. 引理 A.4.5 (iii) 和 (v) 确保 Z_1 和 Z_2 都能写作有限多个不可约闭子集的并, 故 A 亦然. 删除冗余项再代入引理 A.4.6, 可知 A 仅有有限多个不可约分支, 矛盾. 于是 $\mathcal{W} = \varnothing$.

对于 (ii) 和 (iii), 设 $1 \leq i \leq n$, 显然 $Z_i^* \neq \varnothing$ 在 X 中为开, 又因为 Z_i 不可约, Z_i^* 在 Z_i 中稠密; 因此所有稠密开子集 $U \subset X$ 皆交 Z_i^*. 反之若开子集 $U \subset X$ 交每个 Z_i, 则 $U \cap Z_i$ 在 Z_i 中稠密, 故 $\overline{U} \supset \bigcup_{i=1}^n Z_i = X$, 从而 U 稠密.

作为特例, X^* 是 X 的稠密开子集. 由于每个 Z_i^* 皆开, 非空, 不可约 (引理 A.4.7), 而且两两无交, 它们既是 X^* 的连通分支也是不可约分支. □

命题 A.4.9 设 X 为拓扑空间, U 为其开子集, 则有互逆双射

$$\begin{aligned} \{Y \subset X : \text{不可约闭子集}, \ Y \cap U \neq \varnothing\} &\xleftrightarrow{1:1} \{Y_U \subset U : \text{不可约闭子集}\} \\ Y &\mapsto Y \cap U \\ \overline{Y_U} &\leftarrow\!\shortmid Y_U; \end{aligned}$$

若将两边按照包含关系赋序, 则双射保序.

证明 引理 A.4.7 说明 $Y \mapsto Y \cap U$ 良定义, 而且 $Y = \overline{Y \cap U}$. 另一方面, 引理 A.4.5 (ii) 说明 $Y_U \mapsto \overline{Y_U}$ 良定义, 性质 $Y_U = \overline{Y_U} \cap U$ 是 Y_U 闭的简单结论. 保序性质自明. □

特别地, U 的不可约分支恰是所有 $Z \cap U$, 其中 Z 遍历 X 中交 U 的不可约分支.

A.5 特化与泛化

定义 A.5.1 (特化与泛化) 设 X 为拓扑空间而 $x, x' \in X$. 如果 $x' \in \overline{\{x\}}$, 则称 x' 是 x 的特化, x 是 x' 的泛化, 记为 $x \rightsquigarrow x'$.

记忆法: 泛 $\rightsquigarrow$ 特.

如果 $E \subset X$ 满足 $x \in E,\ x \rightsquigarrow x' \implies x' \in E$, 则称 E 对特化封闭; 类似地定义对泛化封闭的子集. 以下性质是容易的.

命题 A.5.2 拓扑空间 X 的子集对特化封闭当且仅当其补集对泛化封闭. 闭子集 (或开子集) 总是对特化 (或泛化) 封闭.

证明 设子集 E 对特化 (或泛化) 封闭, 而 $x \in E$ 和 $y \in X \smallsetminus E$ 满足 $x \rightsquigarrow y$ (或 $y \rightsquigarrow x$). 若 $x \in E$ 则 $y \in E$, 矛盾, 故 $x \in X \smallsetminus E$, 因而 $X \smallsetminus E$ 对泛化 (或特化) 封闭. 第一部分得证. 对于第二部分, 处理显然的闭子集情形即可. □

易见 X 对二元关系 $\rightsquigarrow$ 成为预序集, 其极大元正是闭点. 使 $\rightsquigarrow$ 为偏序所需的条件表述如下.

定义 A.5.3 (Kolmogorov 空间) 设 X 为拓扑空间. 若对 X 的所有相异元素 $x \neq x'$ 皆有 $x' \notin \overline{\{x\}}$ 或 $x \notin \overline{\{x'\}}$, 则称 X 为 Kolmogorov 空间.

由于 $x' \in \overline{\{x\}}$ 且 $x \in \overline{\{x'\}}$ 等价于 $\overline{\{x\}} = \overline{\{x'\}}$, Kolmogorov 空间的定义可以等价地表述为 $x \neq x' \implies \overline{\{x\}} \neq \overline{\{x'\}}$.

定义 A.5.4 设 $f : X \to Y$ 为连续映射.

- ▷ **特化提升** 如果对所有满足 $y \rightsquigarrow y'$ 的 $y, y' \in Y$ 和 $x \in f^{-1}(y)$, 皆存在 $x' \in f^{-1}(y')$ 使得 $x \rightsquigarrow x'$, 则称特化沿 f 提升.
- ▷ **泛化提升** 如果对所有满足 $y \rightsquigarrow y'$ 的 $y, y' \in Y$ 和 $x' \in f^{-1}(y')$, 皆存在 $x \in f^{-1}(y)$ 使得 $x \rightsquigarrow x'$, 则称泛化沿 f 提升.

图解如下:

特化提升	泛化提升	图例
$\begin{tikzcd} & \exists x' \arrow[d] \\ x \arrow[ur, rightsquigarrow] \arrow[d] & y' \\ y \arrow[ur, rightsquigarrow] & \end{tikzcd}$	$\begin{tikzcd} & x' \arrow[d] \\ \exists x \arrow[ur, rightsquigarrow] \arrow[d] & y' \\ y \arrow[ur, rightsquigarrow] & \end{tikzcd}$	$\begin{tikzcd} \star \arrow[d] & \in & X \arrow[d, "f"] \\ f(\star) & \in & Y \end{tikzcd}$

当 $X \to Y$ 为子空间的嵌入时, 特化与泛化的提升分别等价于 Y 的子空间 X 对特化与泛化的封闭性.

引理 A.5.5 考虑连续映射 $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$. 若特化 (或泛化) 沿 f 和 g 提升, 则沿 gf 亦然.

证明 观图自见. □

A.6 泛点

不可约闭子集在不可约子集的相关讨论中特别常用. 观察到对于任意空间 X 和 $x \in X$, 引理 A.4.5 (ii) 蕴涵 $\overline{\{x\}}$ 总是不可约闭子集.

定义 A.6.1 (泛点和朴素空间) 设 Z 为拓扑空间 X 的不可约闭子集. 若存在 $\eta \in Z$ 使得 $Z = \overline{\{\eta\}}$, 则称 η 为 Z 的泛点.

若所有不可约闭子集都有唯一的泛点, 则称 X 为朴素的.

引理 A.6.2 拓扑空间 X 朴素当且仅当每个不可约闭子集都有泛点, 而且 X 是 Kolmogorov 空间 (定义 A.5.3). 此时有双射

$$\mathrm{cl} : X \xrightarrow{1:1} \{Z \subset X : \text{不可约闭子集}\}, \quad \mathrm{cl}(x) = \overline{\{x\}}.$$

证明 所示映射 cl 对所有拓扑空间 X 都有定义; X 朴素 (或 Kolmogorov) 等价于 cl 是双射 (或单射), 而每个不可约闭子集都有泛点等价于 cl 是满射. □

以下论证涉及一条简单的拓扑性质: 设 Y 为拓扑空间 X 的子集, 赋予诱导拓扑. 若 E 是 Y 的子集, 记它在 X 中的闭包为 $\overline{E}$, 则它在 Y 中的闭包是 $\overline{E} \cap Y$, 而 $\overline{E} = \overline{\overline{E} \cap Y}$.

引理 A.6.3 设 Y 为 X 的子集, 带诱导拓扑.

(i) 若 X 是 Kolmogorov 空间, 则 Y 亦然.

(ii) 设 Y 局部闭; 若 X 朴素, 则 Y 亦然.

证明 沿用之前关于闭包的符号和性质.

对于 (i), 取相异点 $y, y' \in Y$, 则有 $\overline{\overline{\{y\}} \cap Y} = \overline{\{y\}}$ 和 $\overline{\overline{\{y'\}} \cap Y} = \overline{\{y'\}}$. 但 $\overline{\{y\}} \neq \overline{\{y'\}}$, 故 $\overline{\{y\}} \cap Y \neq \overline{\{y'\}} \cap Y$. 由此知 Y 是 Kolmogorov 空间.

对于 (ii), 对 Y 开或闭这两种情形证 Y 的所有不可约闭子集 Z 皆有泛点即可. 具体而言, 我们寻求 $z \in Z$ 使得 $Z = \overline{\{z\}} \cap Y$.

设 Y 闭. 则 Z 作为 X 的不可约闭子集可写作 $\overline{\{z\}}$, 于是 $Z = \overline{\{z\}} \cap Y$.

设 Y 开. 此时 $\overline{Z}$ 是 X 的不可约闭子集, 写作 $\overline{\{z\}}$; 由于 $Z = Z \cap Y \subset \overline{\{z\}} \cap Y$ 非空, 从 Y 开可知 $z \in Y$. 如此一来 $\overline{\{z\}} \cap Y$ 作为 $\{z\}$ 在 Y 中的闭包是 Z 的子集, 综之有 $Z = Z \cap Y = \overline{\{z\}} \cap Y$. □

命题 A.6.4 设 $(X_i)_{i \in I}$ 是空间 X 的一族子集, $X = \bigcup_{i \in I} X_i$.

(i) 设每个 X_i 都是局部闭子集, 则 X 是 Kolmogorov 的当且仅当每个 X_i 亦然;

(ii) 设每个 X_i 都是开子集, 则 X 朴素当且仅当每个 X_i 亦然.

证明 两个 "仅当" 方向皆来自引理 A.6.3, 以下处理 "当" 的方向, 仍然涉及此前的拓扑常识.

对于 (i), 设每个 X_i 都是 Kolmogorov 的. 设有 $x, x' \in X$ 使得 $\overline{\{x\}} = \overline{\{x'\}}$. 取 $i \in I$ 使得 $x \in X_i$, 再取开子集 $U \subset X$ 使得 X_i 是 U 的闭子集. 因为 $x \in \overline{\{x\}} \cap X_i \subset \overline{\{x\}} \cap U = \overline{\{x'\}} \cap U$, 由 U 开可得 $x' \in U$. 因此有 $x' \in \overline{\{x\}} \cap U \subset X_i$, 继而 $\overline{\{x\}} \cap X_i = \overline{\{x'\}} \cap X_i$. 因为 X_i 是 Kolmogorov 空间, $x = x'$.

对于 (ii), 证 X 的所有不可约闭子集 Z 皆有泛点即可. 注意到 Z 交某个 X_i, 而 $X_i \cap Z$ 是 Z 的非空开子集, 因而是 Z 的不可约稠密子集 (引理 A.4.7). 于是 $X_i \cap Z$ 是 X_i 的不可约闭子集, 表作 $X_i \cap Z = \overline{\{x\}} \cap X_i \subset \overline{\{x\}}$, 其中 $x \in X_i \cap Z$. 既然 $X_i \cap Z$ 在 Z 中稠密, 故 $Z \subset \overline{\{x\}}$; 而 Z 闭和 $x \in Z$ 又导致 $\overline{\{x\}} \subset Z$. 综上知 $Z = \overline{\{x\}}$. □

引理 A.6.5 设 X 为 Noether 朴素空间, 则 X 的子集 U 为开集当且仅当以下条件成立:

(i) U 对泛化封闭,

(ii) 若 $x \in U$, 则 U 包含 $\overline{\{x\}}$ 的一个非空开子集.

证明 显然 U 开蕴涵 (i) 和 (ii). 反之设 (i) 和 (ii) 成立, 今将证明 $E := X \smallsetminus U$ 闭. 对 $\overline{E}$ 的每个不可约分支 C 取泛点 x, 兹断言 $x \notin U$: 这是因为若 $x \in U$, 则 (ii) 蕴涵 U 包含 C 的某个非空开子集 V; 运用命题 A.4.8 可缩小 V 以确保它在 $\overline{E}$ 中亦开, 故 $V \cap E \neq \varnothing$, 与 $V \subset U$ 矛盾.

因此 $x \in E$. 由于命题 A.5.2 连同 (i) 蕴涵 E 对特化封闭, 这表明 $C \subset E$. 因此 $E = \overline{E}$ 为 X 的闭子集. □

A.7 可构造子集

可构造子集常见于代数几何与相关的环论问题, 本节仅探讨其拓扑面向.

定义 A.7.1 (可构造子集和局部可构造子集) 设 E 为拓扑空间 X 的子集.

- 如果 E 可表为形如 $A \cap (X \smallsetminus B)$ 的子集的有限并, 其中要求 A 和 B 都是 X 的回紧开子集 (定义 A.1.7), 则称 E 为可构造子集.
- 如果存在开覆盖 $X = \bigcup_{i \in I} V_i$ 使得 $E \cap V_i$ 对每个 i 都是 V_i 的可构造子集, 则称 E 为局部可构造子集.

形如 $A \cap (X \smallsetminus B)$ 的子集 (其中 $A, B \subset X$ 为开) 恰是 X 的局部闭子集, 因此可构造子集是局部闭子集的有限并. 逆命题对于 Noether 空间 (定义 A.3.1) 成立.

留意到 X 和 $\varnothing$ 都是可构造子集.

引理 A.7.2 有限多个可构造子集的交和并仍是可构造的; 可构造子集的补集仍是可构造的.

证明 有限并的情形来自定义, 有限交的情形容易化到以下处理的补集情形. 设有 X 的可构造子集 $\bigcup_{i=1}^{n} A_i \cap (X \smallsetminus B_i)$, 其中每个 A_i 和 B_i 都是回紧开子集. 其补集是

$$\bigcap_{i=1}^{n} (X \smallsetminus A_i) \cup B_i = \bigcup_{\{1,\ldots,n\} = I \sqcup I'} \left(\bigcap_{i \in I} (X \smallsetminus A_i) \cap \bigcap_{i \in I'} B_i \right).$$

问题化为对所有 $I, I' \subset \{1, \ldots, n\}$ 说明

$$\bigcap_{i \in I} (X \smallsetminus A_i) \cap \bigcap_{i \in I'} B_i = \left(X \smallsetminus \bigcup_{i \in I} A_i \right) \cap \bigcap_{i \in I'} B_i$$

可构造, 继而化为证 $\bigcup_{i \in I} A_i$ 和 $\bigcap_{i \in I'} B_i$ 皆为回紧开子集. 运用引理 A.1.9 完成证明.□

Noether 空间上的可构造子集有直截了当的描述.

命题 A.7.3 如果 X 是 Noether 空间, 则 X 的可构造子集恰是局部闭子集的有限并.

证明 引理 A.3.4 说明定义 A.7.1 中的开子集 A 和 B 此时总是回紧的. □

引理 A.7.4 设 $f : X \to Y$ 为连续映射, 使得若 $E \subset Y$ 是回紧子集, 则 $f^{-1}(E) \subset X$ 亦然. 设 $E \subset Y$ 为可构造子集, 则 $f^{-1}(E) \subset X$ 亦然.

证明 我们有 $f^{-1}(A \cap (Y \smallsetminus B)) = f^{-1}(A) \cap (X \smallsetminus f^{-1}(B))$, 而且 f^{-1} 既保持开性又保持子集的并. □

对于可构造子集, 较常用的是以下性质.

命题 A.7.5 设 $E \subset X$ 是局部闭子集的有限并 (例如可构造子集), $Z \subset X$ 是不可约子集, 则以下陈述等价:

(i) $Z \cap E$ 包含 Z 的一个稠密开子集;

(ii) $Z \cap E$ 在 Z 中稠密.

进一步要求 Z 有泛点 η (定义 A.6.1), 则上述条件也等价于

(iii) $\eta \in E$.

证明 (i) $\implies$ (ii) 平凡. 至于 (ii) $\implies$ (i), 注意到 $Z \cap E$ 是 Z 中有限多个局部闭子集 $E_1, \ldots, E_n$ 的并; 考虑这些局部闭子集在 Z 中的闭包, 则因为 Z 不可约, 必有某个 E_i 的闭包为 Z (引理 A.4.2). 将 E_i 写成 $U_i \cap Z_i$, 其中 U_i 开 Z_i 闭, 则稠密性导致 $Z_i = Z$, 从而 $E_i = U_i$ 是 Z 的稠密开子集.

进一步要求 $Z = \overline{\{\eta\}}$, 则有 (i) $\implies$ (iii) $\implies$ (ii). □

推论 A.7.6 设 X 为 Noether 空间, $E \subset X$ 是局部闭子集的有限并 (例如可构造子集), 则 E 包含其闭包 $\overline{E}$ 中的一个稠密开子集.

证明 以命题 A.4.8 表 $\overline{E}$ 为相异不可约分支的并 $Z_1 \cup \cdots \cup Z_n$, 并对所有 $1 \leq i \leq n$ 推得 $Z_i^* \cap E$ 在 Z_i^* 中稠密, 从而 $Z_i \cap E$ 在 Z_i 中稠密. 命题 A.7.5 表明 $Z_i \cap E$ 包含 Z_i 的某个稠密开子集 U_i; 以 $Z_i^* \cap U_i$ 代 U_i, 可设 U_i 在 Z 中亦开.

取 $U := U_1 \cup \cdots \cup U_n \subset E$, 这是 Z 的开子集, 且交每个 Z_i; 代入命题 A.4.8 可见它在 Z 中稠密. □

以下结论是对命题 A.5.2 的补充.

推论 A.7.7 设 X 是 Noether 朴素空间, $E \subset X$ 是局部闭子集的有限并, 例如可构造子集, 则 E 闭 (或开) 当且仅当 E 对特化 (或泛化) 封闭.

证明 基于命题 A.5.2, 说明 E 对泛化封闭蕴涵 E 开即可. 应用引理 A.6.5, 问题化为对所有 $x \in E$ 证明 E 包含 $Z := \overline{\{x\}}$ 的一个非空开子集. 根据命题 A.7.5 (取 $\eta = x$), 可见 $Z \cap E$ 确实包含 Z 的一个非空开子集. □

定义 A.7.8 (可构造拓扑) 设 X 为拓扑空间, 其上的可构造拓扑是以 X 的所有可构造子集为一组基的拓扑. 为了区别, 今后将 X 连同其可构造拓扑给出的拓扑空间记为 X_{cons}.

由于全体可构造子集对有限交封闭, 而且 X 可构造, 这确实给出拓扑. 留意到 $X \mapsto X_{\text{cons}}$ 未必是函子, 这是因为连续映射 $f : X \to Y$ 未必给出连续映射 $f : X_{\text{cons}} \to Y_{\text{cons}}$, 但引理 A.7.4 给出了使 f 对可构造拓扑连续的一则充分条件.

M. Hochster [4] 提出的谱空间理论与可构造拓扑密切相关.

定义 A.7.9 (谱空间和谱映射) 满足以下性质的拓扑空间 X 称为谱空间:

- ◇ X 拟紧 (定义 A.1.4) 而且拟分离 (定义 A.1.5);
- ◇ 所有拟紧开子集构成 X 的一组基;
- ◇ X 朴素 (定义 A.6.1).

设 $f : X \to Y$ 为谱空间之间的连续映射. 若 f 给出连续映射 $X_{\mathrm{cons}} \to Y_{\mathrm{cons}}$, 则称 f 为谱映射.

谱空间连同其间的谱映射构成范畴 $\mathsf{SpecSpc}$. 可以证明谱空间之间的连续映射 $f : X \to Y$ 是谱映射当且仅当任何拟紧开子集 $V \subset Y$ 的原像 $f^{-1}(V)$ 皆拟紧, 见 [5, Tag 0G1J].

例 A.7.10 设 R 为环, 赋素谱 $\mathrm{Spec}(R)$ 以 Zariski 拓扑 (定义–命题 1.10.7), 则命题 2.5.1 和 2.5.9 说明 $\mathrm{Spec}(R)$ 是谱空间. 设 $\varphi : R \to S$ 为环同态, 考虑 $\mathrm{Spec}(\varphi) : \mathrm{Spec}(S) \to \mathrm{Spec}(R)$, 则根据引理 3.8.2 对素谱中可构造子集的描述以及命题 1.10.10, 立见 $\mathrm{Spec}(\varphi)$ 是谱映射.

因此 $R \mapsto \mathrm{Spec}(R)$ 给出函子 $\mathsf{CRing}^{\mathrm{op}} \to \mathsf{SpecSpc}$; Hochster [4] 证明了这是范畴等价, 本书不需此结论.

A.8 Jacobson 空间

约定 A.8.1 对所有拓扑空间 X, 记 X' 为 X 的闭点所成的子集.

定义 A.8.2 设 X 为拓扑空间. 如果

$$Z \subset X \text{ 为闭子集 } \implies Z = \overline{Z \cap X'},$$

则称 X 为 **Jacobson 空间**.

空集显然是 Jacobson 空间.

命题 A.8.3 设 X 为 Jacobson 空间, 而 X' 有限. 此时 X 是离散空间, 亦即 X 的每个点都既开又闭.

证明 Jacobson 性质蕴涵 $\overline{X'} = X$. 然而 X' 由有限多个闭点构成, 故 X' 闭, 故 $X = X'$ 有限且每个点都是闭点, 因而每个点也都构成开子集. □

引理 A.8.4 设 X 为 Jacobson 空间, 非空子集 E 是局部闭子集的并, 则 $E \cap X' \neq \varnothing$.

证明 处理 E 是局部闭子集的情形即可. 表 E 为开交闭 $U \cap Z$. Jacobson 空间的定义蕴涵存在 $z \in U \cap (Z \cap X') = E \cap X'$. □

引理 A.8.5 设 X 为 Jacobson 空间, 子集 E 是局部闭子集的并, 则 E 相对于子空间具有的诱导拓扑仍是 Jacobson 空间, 而且 $E' = E \cap X'$.

证明 在 X 之中, 能表作局部闭子集之并的所有子集构成一个集合 $\mathcal{B}$. 注意到若 $E \in \mathcal{B}$, 则 E 和任意局部闭子集的交仍属于 $\mathcal{B}$.

注意到 $E' \supset E \cap X'$ 对所有子集 $E \subset X$ 皆成立; 另一方面, 引理 A.8.4 说明所有非空局部闭子集 $E \subset X$ 皆有 $E \cap X' \neq \varnothing$, 因而此性质对非空之 $E \in \mathcal{B}$ 依然成立.

以下选定非空之 $E \in \mathcal{B}$. 对于 E 的所有闭子集 W (或开子集 V), 存在 X 的闭子集 Z (或开子集 U) 使得 $W = Z \cap E$ (或 $V = U \cap E$); 若 $V \cap W \neq \varnothing$, 则

$$V \cap (W \cap E') \supset \underbrace{U \cap Z \cap E}_{\in \mathcal{B} \smallsetminus \{\varnothing\}} \cap X' \neq \varnothing,$$

由此可知 E 是 Jacobson 空间.

最后说明 $E' = E \cap X'$; 证 $\subset$ 即可. 设 $z \in E'$, 因此存在 X 的闭子集 Z 使得 $Z \cap E = \{z\}$, 然而 $Z \cap E \in \mathcal{B}$, 故它交 X', 从而 $z \in E \cap X'$. 证毕. □

命题 A.8.6 若拓扑空间 X 有开覆盖 $X = \bigcup_{i \in I} U_i$, 则 X 是 Jacobson 空间当且仅当每个开子集 U_i 皆然, 而且此时 $X' = \bigcup_{i \in I} U_i'$.

证明 "仅当" 方向和 $X' = \bigcup_{i \in I} X' \cap U_i = \bigcup_{i \in I} U_i'$ 来自引理 A.8.5.

为了处理 "当" 的方向, 先说明 $U_i' = X' \cap U_i$ 对所有 i 成立. 说明包含关系 $\subset$ 即可. 设 $x \in U_i'$. 问题归结为对所有满足 $x \in U_j$ 的 $j \in I$ 论证 $x \in U_j'$. 留意到 $U_i \cap U_j$ 是 U_i 的开子集, 故 $x \in (U_i \cap U_j)'$, 再由 U_j 是 Jacobson 空间这一前提和引理 A.8.5 推得 $x \in U_j'$.

接着考虑 X 的闭子集 Z. 由于每个 U_i 都是 Jacobson 空间, 基于上一段, $(Z \cap X') \cap U_i = U_i' \cap Z$ 在 $U_i \cap Z$ 中稠密, 故 $Z \cap X'$ 在 Z 中稠密. 证毕. □

赋予 X' 来自 X 的诱导拓扑. 以下几则结论表明 X 的许多性质完全反映在闭点上, 包括: 拟紧性, 局部闭子集的有限并, 可构造子集, 以及这些子集的包含关系.

引理 A.8.7 设 X 为 Jacobson 空间, 则 X 拟紧当且仅当 X' 拟紧.

证明 通过和 X' 取交, X 的开覆盖总能给出 X' 的开覆盖. 反之给定开覆盖 $X' = \bigcup_{i \in I} V_i$, 则 X 有一族开子集 U_i 使得 $V_i = U_i \cap X' = U_i'$. 这般的 $\{U_i\}_{i \in I}$ 皆满足

$$\left(X \smallsetminus \bigcup_{i \in I} U_i \right) \cap X' = X' \smallsetminus \bigcup_{i \in I} V_i = \varnothing;$$

基于 Jacobson 空间的定义, 闭子集 $X \smallsetminus \bigcup_{i \in I} U_i$ 为空, 故 $X = \bigcup_{i \in I} U_i$.

由此易见 X 拟紧等价于 X' 拟紧. □

命题 A.8.8 设 X 为 Jacobson 空间, 则 $E \mapsto E \cap X'$ 给出保序双射

$$\begin{array}{ccc} \{X \text{ 的局部闭子集的有限并}\} & \xrightarrow{1:1} & \{X' \text{ 的局部闭子集的有限并}\}, \\ \cup & & \cup \\ \{X \text{ 的可构造子集}\} & \xrightarrow{1:1} & \{X' \text{ 的可构造子集}\}, \end{array}$$

此处的偏序取为子集的包含关系 $\subset$.

证明 易见图表第一行的映射良定义: $E \mapsto E \cap X'$ 保集合的交与并, 映局部闭子集为局部闭子集. 兹说明第一行的映射为单. 设 E_1 和 E_2 是局部闭子集的有限并, $E_1 \neq E_2$, 则不妨设 $E_1 \smallsetminus E_2 \neq \varnothing$. 易证 $E := E_1 \smallsetminus E_2$ 也是局部闭子集的有限并. 于是引理 A.8.4 给出

$$(E_1 \cap X') \smallsetminus (E_2 \cap X') = E \cap X' \neq \varnothing.$$

为说明第一行的映射满, 考虑 X' 的局部闭子集即可. 这种子集表作 $(U \cap X') \cap (Z \cap X') = (U \cap Z) \cap X'$, 其中 U 和 Z 分别是 X 的开子集和闭子集. 满性得证.

关于映射保序的断言是显然的.

可构造子集也是局部闭子集的有限并. 为了处理第二行的映射, 先来说明 $E \subset X$ 可构造蕴涵 $E \cap X' \subset X'$ 可构造, 因而此映射良定义, 然后再说明该映射满. 回顾定义 A.7.1 和之前的论证, 两者都归结为论证开子集 $U \subset X$ 回紧当且仅当开子集 $U' = U \cap X' \subset X'$ 回紧.

选定 X 的开子集 U. 基于引理 A.8.5 和 A.8.7 可见:

- X' 的拟紧开子集恰是形如 $K \cap X'$ 的子集, 其中 K 是 X 的拟紧开子集;
- 若 K 是 X 的拟紧开子集, 则 $U \cap K$ 拟紧当且仅当 $(U \cap X') \cap (K \cap X') = U \cap K \cap X' = (U \cap K)'$ 拟紧.

由此易得 $U \subset X$ 回紧等价于 $U' \subset X'$ 回紧. 证毕. □

A.9 Krull 维数

本节的 X 为选定的拓扑空间.

定义 A.9.1 (Krull 维数和余维数) 对于拓扑空间 X 中的子集链

$$Z_0 \subsetneq \cdots \subsetneq Z_n,$$

将之简记为 $\mathcal{Z}$, 并称 n 为 $\mathcal{Z}$ 的长度.

- 若 X 非空, 定义 X 的 Krull 维数为

$$\begin{aligned} \dim X := \sup\{n \in \mathbb{Z}_{\geq 0} : X \text{ 有长度 } n \text{ 的不可约闭子集链 } \mathcal{Z}\} \\ \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \sqcup \{\infty\}; \end{aligned}$$

另外规定 $\dim\varnothing := -\infty$.

◇ 若 $Y \subset X$ 是不可约闭子集, 定义其 Krull 余维数为

$$\begin{aligned}\operatorname{codim}(Y, X) := \sup\{m \in \mathbb{Z}_{\geq 0} : X \text{ 有长度 } m \text{ 的不可约闭子集链 } \mathcal{Z}, Z_0 = Y\} \\ \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \sqcup \{\infty\}.\end{aligned}$$

◇ 推而广之, 定义非空闭子集 Z 的 Krull 余维数为

$$\operatorname{codim}(Z, X) := \inf\{\operatorname{codim}(Y, X) : Y \subset Z \text{ 为不可约闭子集}\}.$$

不致混淆时, 这些概念简称维数和余维数.

因此当 X 非空时

$$\dim X = \sup_{Y:\text{不可约闭子集}} \operatorname{codim}(Y, X). \tag{A.9.1}$$

引理 A.9.2 设 Z 为 X 的闭子集, 则 $\dim Z \leq \dim X$.

设 U 为 X 的开子集, 则 $\dim U \leq \dim X$; 若不可约闭子集 Y 与 U 有交, 则 $\operatorname{codim}(Y, X) = \operatorname{codim}(Y \cap U, U)$.

证明 由定义 A.9.1 立得闭子集情形.

对于开子集情形. 考虑 $\operatorname{codim}(Y, X)$ 和 $\operatorname{codim}(Y \cap U, U)$ 定义中涉及的所有闭子集链; 命题 A.4.9 给出其间的保长双射. □

命题 A.9.3 若有 X 的闭子集 $W_1, \ldots, W_m$ 使得 $X = \bigcup_{i=1}^m W_i$, 其中 $m \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$, 则 $\dim X = \sup_{1 \leq i \leq m} \dim W_i$.

证明 不妨设 $m = 2$. 鉴于引理 A.9.2, 证 $\dim X \leq \sup\{\dim W_1, \dim W_2\}$ 即可. 设有 X 的不可约闭子集链 $\mathcal{Z}$, 长度为 n, 则引理 A.4.2 蕴涵有 $i \in \{0, 1\}$ 使得 $Z_n \subset W_i$; 由此可得 $n \leq \dim W_i$. □

命题 A.9.4 若有开覆盖 $X = \bigcup_{i \in I} U_i$, 则 $\dim X = \sup_{i \in I} \dim U_i$.

证明 结合命题 A.4.9 和引理 A.9.2 可得

$$\begin{aligned}\dim X = \sup_{\substack{Y \subset X \\ \text{不可约闭}}} \operatorname{codim}(Y, X) &= \sup_{\substack{Y \subset X \\ \text{不可约闭}}} \sup_{\substack{i \in I \\ Y \cap U_i \neq \varnothing}} \operatorname{codim}(Y \cap U_i, U_i) \\ &= \sup_{i \in I} \sup_{\substack{Y_i \subset U_i \\ \text{不可约闭}}} \operatorname{codim}(Y_i, U_i) = \sup_{i \in I} \dim U_i.\end{aligned}$$

证毕. □

定义–命题 A.9.5 (局部 Krull 维数) 对所有 $x \in X$, 定义 $\dim_x X := \inf_{U \ni x} \dim U$, 其中 U 遍历 x 的开邻域, 则有 $\dim X = \sup_{x \in X} \dim_x X$.

证明 引理 A.9.2 蕴涵 $\sup_x \dim_x X \leq \dim X$. 反之设 $\dim X \geq n$, 则存在不可约闭子集 Y 使得 $\operatorname{codim}(Y, X) \geq n$; 取 $y \in Y$, 引理 A.9.2 蕴涵任意开邻域 $U \ni y$ 皆满足

$$\dim U \geq \operatorname{codim}(Y \cap U, U) = \operatorname{codim}(Y, X) \geq n,$$

故 $\dim_y X \geq n$. 因此 $\sup_x \dim_x X \geq \dim X$. □

命题 A.9.6 *设 $x \in X$ 有开邻域 U_0 使得 U_0 是其闭子集 $X_1, \ldots, X_n$ 的并, 而且 $x \in X_1 \cap \cdots \cap X_n$. 此时*

$$\dim_x X = \sup_{1 \leq i \leq n} \dim_x X_i.$$

证明 不妨设 $U_0 = X$. 按命题 A.9.3 和定义, $\dim_x X = \inf_{U \ni x} \sup_{1 \leq i \leq n} \dim U \cap X_i$ 而 $\dim_x X_i = \inf_{U \ni x} \dim U \cap X_i$. 若存在 i 使得 $\dim_x X_i = \infty$, 则断言显然成立. 设若不然, 存在 x 的开邻域 V 使得当 $x \in U \subset V$ 时 $\dim_x X_i = \dim U \cap X_i$ 对所有 i 成立, 此时断言仍成立. □

命题 A.9.7 *若 X 非空则 $\dim X = \sup_C \dim C$, 其中 C 遍历 X 的不可约分支 (定义 A.4.4).*

证明 根据引理 A.4.5, 不可约分支皆闭, 而且任何不可约闭子集链 $\mathcal{Z}$ 的末项 Z_n 总是包含于 X 的某个不可约分支 C. □

定义 A.9.8 (等维空间) *若 X 的所有不可约分支都有相同的维数, 其值有限, 则称 X 等维.*

定义 A.9.9 (悬链空间) *如果对于 X 的所有不可约闭子集 $Z \subset Z'$, 皆有*

- ◇ $\operatorname{codim}(Z, Z') < \infty$,
- ◇ *所有极长 (亦即无法再插项) 的不可约闭子集链*

$$Z = Z_0 \subsetneq \cdots \subsetneq Z_m = Z'$$

都有相同长度 m,

则称 X 为悬链的, 此时条件中的 m 即 $\operatorname{codim}(Z, Z')$.

引理 A.9.10 *设 X 为拓扑空间.*

(i) *若 X 是悬链空间, 则 X 的局部闭子集亦然.*

(ii) *若存在开覆盖 $X = \bigcup_{i \in I} U_i$, 每个 U_i 都是悬链的, 则 X 是悬链的.*

证明 结合命题 A.4.9, 引理 A.9.2 和悬链空间的定义可得 (i) 的开子集情形和 (ii).

若 Y 是悬链空间 X 的闭子集, 则将定义 A.9.9 的条件限制到 $Z' \subset Y$ 的特例便知 Y 也是悬链的, 故 (i) 对闭子集成立. 由此推得局部闭的情形. □

悬链空间中的余维数能分段计算, 体现为以下等价描述.

命题 A.9.11 拓扑空间 X 是悬链的当且仅当以下性质成立:

- 对任何不可约闭子集 $Z \subset Z'$ 皆有 $\operatorname{codim}(Z, Z') < \infty$;
- 对任何不可约闭子集 $Z \subset Z' \subset Z''$ 皆有

$$\operatorname{codim}(Z, Z'') = \operatorname{codim}(Z, Z') + \operatorname{codim}(Z', Z'').$$

证明 设 X 为悬链空间, 则当然有第一则性质. 对于第二则性质, 分别取以 Z, Z' 为首项, Z', Z'' 为末项的极长不可约闭子集链, 头尾接合即是以 Z 为首项而 Z'' 为末项的极长不可约闭子集链; 根据悬链性质, 这表明 $\operatorname{codim}(Z, Z'') = \operatorname{codim}(Z, Z') + \operatorname{codim}(Z', Z'')$.

反之设断言中的两则性质成立. 给定不可约闭子集 $Z \subset Z'$, 第一则性质确保 $\operatorname{codim}(Z, Z') < \infty$. 对于极长不可约闭子集链

$$Z = Z_0 \subsetneq \cdots \subsetneq Z_m = Z',$$

极长条件蕴涵 $\operatorname{codim}(Z_i, Z_{i+1}) = 1$ 对所有 $0 \leq i < m$ 成立; 反复应用第二则性质可得

$$\operatorname{codim}(Z, Z') = \operatorname{codim}(Z_0, Z_1) + \cdots + \operatorname{codim}(Z_{m-1}, Z_m) = m.$$

因此长度 m 只和 $Z \subset Z'$ 相关. □

附录 B　分次交换环论

B.1　加法幺半群基本性质

本节的 Γ 默认为交换幺半群, 二元运算写作 $+$, 幺元记为 0; 这种结构也简称为加法幺半群.

定义 B.1.1 设 Γ 为加法幺半群.

- 若存在 $\gamma_1, \ldots, \gamma_n \in \Gamma$ 使得 Γ 的所有元素均能表成 $m_1\gamma_1 + \cdots + m_n\gamma_n$, 其中 $m_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, 则称 Γ **有限生成**.
- 若 $m\gamma = m\eta \implies \gamma = \eta$ 对所有 $\gamma, \eta \in \Gamma$ 和 $m \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ 成立, 则称 Γ **无挠**.
- 若 $\gamma + \eta = \gamma + \delta \implies \eta = \delta$ 对所有 $\gamma, \eta, \delta \in \Gamma$ 成立, 则称 Γ 具**消去律**.
- 记 Γ 中的可逆元群为 $\Gamma^\times$. 若 $\Gamma^\times = \{0\}$, 则称 Γ 为**正**的.

加法幺半群的典型例子是 $\mathbb{Z}^n$ 对加法构成的幺半群; 它有限生成, 无挠而且具有消去律. 其子幺半群 $\mathbb{Z}^n_{\geq 0}$ 除了有上述性质, 还是正的. 注意到无挠性, 消去律和正性都能由子幺半群继承, 但有限生成性质则未必.

从交换群到交换幺半群的忘却函子有左伴随, 称为**群化**函子 $\Gamma \mapsto \Gamma^{\mathrm{grp}}$. 群化 Γ^{grp} 的元素能表作 $\Gamma \times \Gamma$ 相对于等价关系

$$(\gamma, \eta) \sim (\gamma', \eta') \iff \exists \xi \in \Gamma,\ \gamma + \eta' + \xi = \gamma' + \eta + \xi$$

的等价类 $[\![\gamma, \eta]\!]$, 或设想为 Γ 的元素 $\gamma, \eta \in \Gamma$ 的 “形式差” $\gamma - \eta$, 加法是逐分量相加, 而典范同态 $\Gamma \to \Gamma^{\mathrm{grp}}$ (伴随对的单位态射) 表作 $\gamma \mapsto [\![\gamma, 0]\!]$. 详见 [9, 例 B.5.12].

举例明之, $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ 的群化是 $\mathbb{Z}$, 这正是整数环的构造方式. 推而广之, $\mathbb{Z}^n_{\geq 0}$ 的群化是 $\mathbb{Z}^n$. 如果 Γ 已是群, 则 $\Gamma \xrightarrow{\sim} \Gamma^{\mathrm{grp}}$.

引理 B.1.2 加法幺半群 Γ 具消去律当且仅当 $\Gamma \to \Gamma^{\mathrm{grp}}$ 是单射.

证明 我们有 $[\![\gamma_1, 0]\!] = [\![\gamma_2, 0]\!]$ 当且仅当存在 $\xi \in \Gamma$ 使得 $\gamma_1 + \xi = \gamma_2 + \xi$. □

以下涉及序结构的一些术语, 详见 [7, §1.2].

定义 B.1.3 设 Γ 为加法幺半群, 而 $\leq$ 是 Γ 上的偏序 (或全序), 满足以下性质:

$$\gamma < \gamma' \implies \forall \eta \in \Gamma,\ \gamma + \eta < \gamma' + \eta.$$

此时称 $(\Gamma, \leq)$ 为偏序 (或全序) 加法幺半群.

可以证明 [7, 定义 10.2.3] 的全序交换群是上述定义的特例.

例 B.1.4 全序加法幺半群的直接例子是带有标准序结构的 $\mathbb{Z}$. 推而广之, $\mathbb{Z}^n$ 对字典序也成为全序加法幺半群.

若 Γ 对 $\leq$ 成为偏序 (或全序) 加法幺半群, 则它对由 $\gamma_1 \leq^{\mathrm{op}} \gamma_2 \iff \gamma_1 \geq \gamma_2$ 确定的相反序 $\leq^{\mathrm{op}}$ 亦然.

引理 B.1.5 设 $(\Gamma, \leq)$ 为全序加法幺半群.

(i) 若 Γ 非平凡, 则 Γ 无极大元和极小元.

(ii) Γ 无挠且具消去律.

证明 对于 (i), 首先说明 0 不能是极大元, 否则对所有 $\gamma \neq 0$ 皆有 $0 = \gamma + (-\gamma) < 0 + 0 = 0$, 矛盾. 设 $\eta \in \Gamma$ 极大, 则 $\eta > 0$; 然而 $2\eta = \eta + \eta > \eta + 0 = \eta$, 矛盾. 极小元的情况类似.

对于 (ii), 设有 $m\gamma = 0$, 其中 $m \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$. 若 $\gamma > 0$ 则 $m\gamma = \underbrace{\gamma + \cdots + \gamma}_{m\text{ 项}} > 0$; 若 $\gamma < 0$ 则同理有 $m\gamma < 0$. 唯一可能是 $\gamma = 0$, 故 Γ 无挠.

设有 $\gamma, \eta, \delta \in \Gamma$. 若 $\eta > \delta$ (或 $\eta < \delta$) 则 $\gamma + \eta > \gamma + \delta$ (或 $\gamma + \eta < \gamma + \delta$), 故 Γ 具消去律. □

B.2 加法幺半群的嵌入及其应用

本节先说明如何在适当条件下将加法幺半群 Γ 嵌入更为具体的 $\mathbb{Z}^n$ 或 $\mathbb{Z}^n_{\geq 0}$, 然后定义形式幺半群代数及其局部化.

命题 B.2.1 对于有限生成加法幺半群 Γ, 以下陈述等价:

(i) 存在 $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ 和幺半群的嵌入 $\Gamma \hookrightarrow \mathbb{Z}^n$;

(ii) Γ 无挠而且具有消去律.

以上任一条件成立时, 陈述 (i) 中的嵌入可以取为 $\Gamma \to \Gamma^{\mathrm{grp}}$ 和某个同构 $\Gamma^{\mathrm{grp}} \simeq \mathbb{Z}^n$ 之合成.

证明 (i) $\implies$ (ii): 显然.

(ii) $\implies$ (i): 由于加法幺半群 Γ 有限生成, 观构造可知加法群 Γ^{grp} 亦然. 消去律确保典范同态 $\Gamma \to \Gamma^{\mathrm{grp}}$ 为单. 此外, Γ 无挠确保加法群 Γ^{grp} 也无挠. 然而有限生成无挠加法群总同构于某个 $\mathbb{Z}^n$, 于是 $\Gamma \hookrightarrow \Gamma^{\mathrm{grp}} \simeq \mathbb{Z}^n$. □

以下结论的证明涉及凸多面锥的理论, 见 [9, §14.9].

命题 B.2.2 对于有限生成加法幺半群 Γ, 以下陈述等价:

(i) 存在幺半群的嵌入 $\iota : \Gamma \hookrightarrow \mathbb{Z}^n$ 以及 $\lambda \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}^n, \mathbb{Z})$, 使得

- ◇ $\mathrm{im}(\iota) \subset \{v \in \mathbb{Z}^n : \lambda(v) \geq 0\}$,
- ◇ $\lambda(v) = 0 \iff v = 0$ 对所有 $v \in \mathrm{im}(\iota)$ 成立,
- ◇ 对所有 $N \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, 集合 $\{v \in \mathrm{im}(\iota) : \lambda(v) \leq N\}$ 有限;

(ii) Γ 无挠, 具消去律, 且为正.

证明 (i) $\implies$ (ii): 无挠性质和消去律继承自 $\mathbb{Z}^n$, 至于正性, 设有 $\gamma, \gamma' \in \Gamma$ 满足 $\gamma + \gamma' = 0$, 则 $\lambda\iota(\gamma) + \lambda\iota(\gamma') = 0$ 蕴涵 $\lambda\iota(\gamma) = 0 = \lambda\iota(\gamma')$, 继而蕴涵 $\gamma = 0$.

(ii) $\implies$ (i): 鉴于命题 B.2.1, 不妨设 Γ 是 $\mathbb{Z}^n$ 的有限生成子幺半群. 取 Γ 的生成元 $f_1, \ldots, f_m$, 则 Γ 在 $\mathbb{R}^n$ 中张成凸多面锥 $C = \sum_{i=1}^m \mathbb{R}_{\geq 0} f_i$. 兹说明 $C \cap (-C) = \{0\}$. 根据 [9, 定理 14.9.4], 存在 $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ 使得 C 是不等式组 $\lambda_1 \geq 0, \ldots, \lambda_k \geq 0$ 的解集, 故 $C \cap (-C)$ 是 $\lambda_1 = \cdots = \lambda_k = 0$ 的解集.

由于 $f_i \in \mathbb{Z}^n$, 细观该处证明可见 λ_i 可取为 $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}^n, \mathbb{Q})$ 的元素. 若 $C \cap (-C)$ 非零, 则相应的方程组在 $\mathbb{Q}^n$ 中有非零解 v. 兹考察关于 $a_1, \ldots, a_m$ 的 $\mathbb{Q}$-系数方程组 $\sum_{i=1}^m a_i f_i = v$. 既然 $v \in C$, 它在 $\mathbb{R}^m_{\geq 0}$ 中有解, 由此不难推得它在 $\mathbb{Q}^k_{\geq 0}$ 中有解. 将 v 和解 $a_1, \ldots, a_k$ 同乘以适当的正整数, 遂可假设 $v \in \Gamma \smallsetminus \{0\}$. 同理可要求 $-v \in \Gamma \smallsetminus \{0\}$, 与 Γ 的正性矛盾.

从 $C \cap (-C) = \{0\}$ 和严格凸多面锥的刻画 [9, 定义–命题 14.9.8] 立得 λ 使得 $\lambda|_C \geq 0$, 而且 $\lambda(v) = 0 \iff v = 0$ 对所有 $v \in C$ 成立. 此条件相当于要求 λ 在 C 的每条端射线 [9, 定义 14.6.7, 定理 14.9.11] 上均为正. 这是关于 λ 的开条件, 微扰后可设 λ 定义在 $\mathbb{Q}$ 上; 伸缩后可设 $\lambda(\mathbb{Z}^n) \subset \mathbb{Z}$.

此外易见 $C \cap \{v : \lambda(v) \leq N\}$ 对所有 N 都是 $\mathbb{R}^m$ 的紧子集 (可用 [9, 引理 10.4.1]), 故其中格点数量有限. 综上即得 (i). □

以下构造用于 §4.4.

定义 B.2.3 设 Γ 有限生成, 无挠, 具消去律, 且为正. 选定交换环 $\Bbbk$.

- ◇ 对每个 $\gamma \in \Gamma$ 引入符号 $\mathbf{X}^\gamma$, 然后定义 $\Bbbk$-代数

$$\Bbbk[\![\Gamma]\!] := \left\{ \text{形式和} \sum_{\gamma \in \Gamma} c_\gamma \mathbf{X}^\gamma : \forall \gamma,\ c_\gamma \in \Bbbk \right\},$$

  其加法是逐项的, 乘法则由 $\Bbbk$-双线性和 $\mathbf{X}^{\gamma+\eta} = \mathbf{X}^\gamma \mathbf{X}^\eta$ 确定.

- ◇ 命 $\Bbbk(\!(\Gamma)\!)$ 为 $\Bbbk[\![\Gamma]\!]$ 对乘性子集 $\{\mathbf{X}^\gamma : \gamma \in \Gamma\}$ 的局部化; 由于此乘性子集不含零因子, 故 $\Bbbk[\![\Gamma]\!] \hookrightarrow \Bbbk(\!(\Gamma)\!)$, 而 $\Bbbk(\!(\Gamma)\!)$ 的元素等同于满足以下条件的形式和 $\sum_{\gamma \in \Gamma^{\mathrm{grp}}} c_\gamma \mathbf{X}^\gamma$:

$$\exists \gamma_0 \in \Gamma, \quad \{\gamma \in \Gamma^{\mathrm{grp}} : c_\gamma \neq 0\} \subset \Gamma - \gamma_0.$$

称 $\Bbbk[\![\Gamma]\!]$ 为 Γ 在 $\Bbbk$ 上给出的**形式幺半群代数**, 称 $\Bbbk(\!(\Gamma)\!)$ 为**形式 Laurent 级数代数**.

尽管 $\Bbbk[\![\Gamma]\!]$ 的元素容许为无穷和, 乘法仍能按

$$\sum_\gamma c_\gamma \mathbf{X}^\gamma \cdot \sum_\gamma d_\gamma \mathbf{X}^\gamma = \sum_{\gamma \in \Gamma} \left(\sum_{\substack{\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma \\ \gamma_1 + \gamma_2 = \gamma}} c_{\gamma_1} d_{\gamma_2} \right) \mathbf{X}^\gamma$$

来描述, 这是因为 $\gamma_1 + \gamma_2 = \gamma$ 蕴涵 $0 \leq \lambda(\gamma_1) + \lambda(\gamma_2) \leq \lambda(\gamma)$, 其中 $\lambda : \Gamma \to \mathbb{Z}_{\geq 0}$ 取如命题 B.2.2 (i), 因而 $\sum_{\gamma_1+\gamma_2=\gamma}$ 对每个 γ 都是有限和.

例 B.2.4 取 $\Gamma = \mathbb{Z}^n_{\geq 0}$, 则 $\Gamma^{\mathrm{grp}} = \mathbb{Z}^n$ 而

$$\Bbbk[\Gamma] = \Bbbk[X_1, \ldots, X_n], \quad \Bbbk[\Gamma^{\mathrm{grp}}] = \Bbbk[X_1^{\pm 1}, \ldots, X_n^{\pm 1}],$$

使得在 $\gamma = (a_1, \ldots, a_n)$ 时 $\mathbf{X}^\gamma$ 对应 $X_1^{a_1} \cdots X_n^{a_n}$. 相应地, $\Bbbk[\![\Gamma]\!]$ 等同于形式幂级数 $\Bbbk$-代数 $\Bbbk[\![X_1, \ldots, X_n]\!]$, 而 $\Bbbk(\!(\Gamma)\!)$ 等同于形式 Laurent 级数 $\Bbbk$-代数 $\Bbbk(\!(X_1, \ldots, X_n)\!)$.

引理 B.2.5 设 Γ 如定义 B.2.3, 而 I 是 $\Bbbk$ 的有限生成理想, 则有 $\Bbbk$-代数的典范同构 $\Bbbk[\![\Gamma]\!] / I\Bbbk[\![\Gamma]\!] \simeq (\Bbbk/I)[\![\Gamma]\!]$.

证明 由 $\Bbbk[\![\Gamma]\!] \to (\Bbbk/I)[\![\Gamma]\!]$ 诱导满同态 $\Bbbk[\![\Gamma]\!]/I\Bbbk[\![\Gamma]\!] \to (\Bbbk/I)[\![\Gamma]\!]$. 选定 I 的生成元 $t_1, \ldots, t_k$, 则 $c = \sum_\gamma c_\gamma \mathbf{X}^\gamma$ 在 $(\Bbbk/I)[\![\Gamma]\!]$ 中的像为零当且仅当对每个 $\gamma \in \Gamma$ 皆存在 $d_{\gamma,1}, \ldots, d_{\gamma,k} \in \Bbbk$ 使得 $c_\gamma = \sum_{i=1}^k t_i d_{\gamma,i}$, 当且仅当存在 $d_i = \sum_\gamma d_{\gamma,i}\mathbf{X}^\gamma \in \Bbbk[\![\Gamma]\!]$, 其中 $i = 1, \ldots, k$, 使得 $c = \sum_{i=1}^k t_i d_i$. □

引理 B.2.6 设 Γ 如定义 B.2.3, 则群代数 $\Bbbk[\Gamma^{\mathrm{grp}}]$ 按照 $\mathbf{X}^\gamma \mapsto \mathbf{X}^\gamma$ 嵌入 $\Bbbk[\![\Gamma]\!]$.

证明 要点是证对于 Γ^{grp} 中的任意有限多个元素 $\gamma_1, \ldots, \gamma_m$, 存在 $\gamma_0 \in \Gamma$ 使得 $\gamma_i \in \Gamma - \gamma_0 \subset \Gamma^{\mathrm{grp}}$ 对所有 i 成立. 将 γ_i 表作 $\delta_i - \eta_i$, 其中 $\delta_i, \eta_i \in \Gamma$, 再取 $\gamma_0 = \eta_1 + \cdots + \eta_m$ 即可. □

引理 B.2.7 设 Γ 有限生成, 无挠, 具消去律, 且为正. 若 $f = \sum_\gamma c_\gamma \mathbf{X}^\gamma \in \Bbbk[\![\Gamma]\!]$ 满足 $c_0 = 1$, 则 f 可逆. 作为推论, 若 $\Bbbk$ 为域, 命

$$\mathfrak{m} := \left\{ \sum_\gamma c_\gamma \mathbf{X}^\gamma \in \Bbbk[\![\Gamma]\!] : c_0 = 0 \right\},$$

则 $(\Bbbk[\![\Gamma]\!], \mathfrak{m})$ 此时是局部环 (定义 1.11.1).

证明 为了说明 $(\Bbbk[\![\Gamma]\!], \mathfrak{m})$ 是局部环, 证明满足 $c_0 = 1$ 的元素在 $\Bbbk[\![\Gamma]\!]$ 中可逆即可. 论证基于形式的等式

$$(1-a)^{-1} = 1 + a + a^2 + \cdots;$$

相较于与形式幂级数环的特例, 此处的要点在于善用之前取的 $\lambda : \Gamma \to \mathbb{Z}_{\geq 0}$. □

B.3 素理想和局部化

本节将关于环和模的若干基本事实推及 Γ-分次场景, 其中 Γ 是加法幺半群; 最常用的是 $\Gamma = \mathbb{Z}_{\geq 0}$ 的情形, 但也可以在更广泛的框架下操作.

定义 B.3.1 (分次素理想) 设 R 为 Γ-分次环. 如果 R 的素理想 $\mathfrak{p}$ 同是也是分次理想 (定义 4.1.1), 则称 $\mathfrak{p}$ 为分次素理想.

为了得到更丰富的理论, 需要进一步对 Γ 施加 §B.1 中涉及的消去律条件; 根据引理 B.1.2, 这蕴涵 Γ 典范地嵌入其群化 Γ^{grp}, 后者是加法群.

定义–命题 B.3.2 设加法幺半群 Γ 具消去律, R 是 Γ-分次环, $U \subset R$ 是所有元素皆齐次的乘性子集.

(i) 局部化 $R[U^{-1}]$ 具有以下 Γ^{grp}-分次结构:

$$R[U^{-1}]_\gamma = \left\{ \frac{r}{u} \;\middle|\; \begin{array}{l} r \neq 0 \text{ 齐次}, \gamma + \deg u = \deg r, \\ \text{或者 } r = 0. \end{array} \right\}, \quad \gamma \in \Gamma^{\mathrm{grp}}.$$

(ii) 若 M 是 Γ-分次 R-模, 则 $M[U^{-1}]$ 具有以下 Γ^{grp}-分次 $R[U^{-1}]$-模结构:

$$M[U^{-1}]_\gamma = \left\{ \frac{x}{u} \;\middle|\; \begin{array}{l} x \neq 0 \text{ 齐次}, \ \gamma + \deg u = \deg x, \\ \text{或者 } x = 0. \end{array} \right\}, \quad \gamma \in \Gamma^{\mathrm{grp}}.$$

我们称子环 $R[U^{-1}]_0$ (或 $R[U^{-1}]_0$-子模 $M[U^{-1}]_0$) 为 R (或 M) 对 U 的**齐次局部化**.

证明 以 $R[U^{-1}]$ 的版本为例, 要点仅在于说明当 γ 给定, 条件 $\gamma + \deg u = \deg r$ 仅和 $\frac{r}{u} \in R[U^{-1}]$ 相关, 不依赖 r 和 u 的选法. 诚然, 若 $\frac{r}{u} = \frac{r'}{u'}$ 则存在 $v \in U$ 使得 $vu'r = vur'$. 两边都是齐次元的乘积, 故

$$\deg v + \deg u' + \deg r = \deg v + \deg u + \deg r'.$$

应用消去律得到 $\deg u' + \deg r = \deg u + \deg r'$, 从而

$$\begin{aligned} \gamma + \deg u = \deg r &\implies \gamma + \deg u + \deg u' = \deg r + \deg u' \\ &\iff \gamma + \deg u + \deg u' = \deg u + \deg r' \\ &\xRightarrow{\text{消去律}} \gamma + \deg u' = \deg r'. \end{aligned}$$

其余验证是例行公事. □

定义 B.3.3 设 Γ 具消去律. 给定 Γ-分次环 R 的分次素理想 $\mathfrak{p}$ 和 Γ-分次 R-模 M, 将对 $U := \{u \in R \smallsetminus \mathfrak{p} : \text{齐次元}\}$ 的齐次局部化记为

$$R_{(\mathfrak{p})} := R[U^{-1}]_0, \quad M_{(\mathfrak{p})} := M[U^{-1}]_0.$$

注记 B.3.4 在定义–命题 B.3.2 的场景中, 有保序互逆双射

$$\begin{aligned} \{\mathfrak{p} : R \text{ 的分次素理想}, \ \mathfrak{p} \cap U = \varnothing\} &\rightleftarrows \{\mathfrak{q} : R[U^{-1}] \text{ 的分次素理想}\} \\ \mathfrak{p} &\longmapsto \mathfrak{p}R[U^{-1}] = \mathfrak{p}[U^{-1}] \\ \mathfrak{q} \cap R &\longleftarrow\!\shortmid \mathfrak{q}, \end{aligned}$$

这是因为命题 1.7.6 的保序互逆双射保持分次素理想.

特别地, 若 $\mathfrak{p}$ 是分次素理想, $U := \{u \in R \smallsetminus \mathfrak{p} : \text{齐次元}\}$, 则对于 R 的任意分次素理想 $\mathfrak{p}'$ 皆有

$$\mathfrak{p}' \cap U = \varnothing \iff \forall \gamma \in \Gamma, \ \mathfrak{p}'_\gamma \subset \mathfrak{p}_\gamma \iff \mathfrak{p}' \subset \mathfrak{p},$$

故此时 $\mathfrak{p}R[U^{-1}]$ 是 $R[U^{-1}]$ 的唯一极大分次素理想.

引理 B.3.5 设 Γ 无挠而且具有消去律 (定义 B.1.1). 对于 Γ-分次环 R 的分次真理想 $\mathfrak{p} \subsetneq R$, 以下陈述等价:

(i) $\mathfrak{p}$ 是素理想;

(ii) 对所有齐次元 $x, y \in R$, 若 $xy \in \mathfrak{p}$ 则 $x \in \mathfrak{p}$ 或 $y \in \mathfrak{p}$.

证明 (i) $\implies$ (ii) 来自素理想的定义.

至于 (ii) $\implies$ (i), 对给定的 $x, y \in R$ 取至多有限项非零的展开 $x = \sum_\gamma x_\gamma$ 和 $y = \sum_\gamma y_\gamma$, 则条件 $xy \in \mathfrak{p}$ 相当于说

$$\forall \gamma, \quad \sum_{\eta+\delta=\gamma} x_\eta y_\delta \in \mathfrak{p}.$$

我们的目标是证明此时 $x \in \mathfrak{p}$ 或 $y \in \mathfrak{p}$ 必有一者成立.

考虑有限子集 $\Gamma_1 := \{\gamma : x_\gamma \neq 0\}$ 和 $\Gamma_2 := \{\gamma : y_\gamma \neq 0\}$. 命题 B.2.1 说明由 $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ 生成的子幺半群 Γ' 可嵌入某个 $\mathbb{Z}^n$. 将 $\mathbb{Z}^n$ 上的字典序拉回 Γ', 仍记为 $\leq$, 则 $(\Gamma', \leq)$ 成为全序加法幺半群 (定义 B.1.3).

采用反证法: 设若 $x, y \notin \mathfrak{p}$, 则可取

$$\alpha := \max\left\{\gamma \in \Gamma_1 : x_\gamma \notin \mathfrak{p}\right\}, \quad \beta := \max\left\{\gamma \in \Gamma_2 : y_\gamma \notin \mathfrak{p}\right\}.$$

在 x 和 y 的展开式中分别删去 $> \alpha$ 和 $> \beta$ 的项, 原条件仍成立, 故以下不妨设 α 和 β 分别是 x 和 y 的展开式中的最高项. 但此时 $(xy)_{\alpha+\beta} = x_\alpha y_\beta \notin \mathfrak{p}$. 矛盾. □

B.4 基本工具

承继 §B.3 的讨论, 继续选定加法幺半群 Γ.

定义–命题 B.4.1 设 Γ 无挠而且具有消去律. 考虑 Γ-分次环 R 的素理想 $\mathfrak{p}$.

(i) 记 $\mathfrak{p}^*$ 为由 $\mathfrak{p}$ 的所有齐次元生成的理想, 则 $\mathfrak{p}^* \subset \mathfrak{p}$ 而 $\mathfrak{p}^*$ 是分次素理想.

(ii) 考虑 Γ-分次 R-模 M.

- ◇ 若 $\mathfrak{p} \in \operatorname{Supp}(M)$ (定义 2.4.2), 则 $\mathfrak{p}^* \in \operatorname{Supp}(M)$.
- ◇ 若 $\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass}(M)$ (定义 3.4.1), 则存在 M 的齐次元 x^* 使得 $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}^* = \operatorname{ann}(x^*)$.

特别地, $\operatorname{Ass}(M)$ 的元素都是分次素理想.

证明 对于 (i), 首先由引理 4.1.3 可知 $\mathfrak{p}^*$ 为分次理想. 显然 $\mathfrak{p}^* \subset \mathfrak{p}$. 给定满足 $ab \in \mathfrak{p}^*$ 的齐次元 $a, b \in R$, 必有 $a \in \mathfrak{p}$ 或 $b \in \mathfrak{p}$, 从而必有 $a \in \mathfrak{p}^*$ 或 $b \in \mathfrak{p}^*$; 根据引理 B.3.5, 这确保 $\mathfrak{p}^*$ 是素理想.

兹对 (ii) 的第一条证其逆否命题. 设 $\mathfrak{p}^* \notin \operatorname{Supp}(M)$, 亦即 $M_{\mathfrak{p}^*} = 0$. 设 $x \in M$ 是齐次元, 则存在 $a \in R \smallsetminus \mathfrak{p}^*$ 使得 $ax = 0$. 作展开 $a = \sum_\gamma a_\gamma$, 则从 Γ 的消去律与 x 齐

次可见 $a_\gamma x = 0$ 对所有 γ 成立. 从 $a \notin \mathfrak{p}^*$ 可知存在 γ 使得 $a_\gamma \notin \mathfrak{p}$, 故 x 在 $M_\mathfrak{p}$ 中的像为零. 既然 M 由齐次元生成, 故 $M_\mathfrak{p} = 0$ 而 $\mathfrak{p} \notin \mathrm{Supp}(M)$.

对于 (ii) 的第二条, 取 $x = \sum_\gamma x_\gamma \in M$ 使得 $\mathfrak{p} = \mathrm{ann}(x)$. 先证 $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}^*$. 设 $a = \sum_\gamma a_\gamma \in \mathfrak{p}$. 沿用引理 B.3.5 的论证, 考虑 Γ 的有限子集 $\Gamma_1 := \{\gamma : a_\gamma \neq 0\}$ 和 $\Gamma_2 := \{\gamma : x_\gamma \neq 0\}$ 生成的子幺半群 Γ', 然后赋予 Γ' 全序 $\leq$. 以下采用反证法, 设 $a \notin \mathfrak{p}^*$. 命

$$\alpha := \max\{\gamma \in \Gamma_1 : a_\gamma \notin \mathfrak{p}\}.$$

在 a 的展开式中删去 $> \alpha$ 的项仍有 $ax = 0$, 故不妨设 α 是展开式中的最高项. 兹断言

$$\exists k \in \mathbb{Z}_{\geq 1},\ a_\alpha^k x = 0.$$

可设 $x \neq 0$. 取 β 为 x 的展开式中的最高项. 由此立得 $a_\alpha x_\beta = 0$. 若 $a_\alpha x = 0$ 则构造停止. 设若不然, 则 $a_\alpha x$ 的展开式只涉及 Γ' 中的项, 且非零项个数 $< |\Gamma_2|$; 由于 $a a_\alpha x = a_\alpha a x = 0$, 可对 $a_\alpha x, a_\alpha^2 x, \ldots$ 重复此操作, 它们的齐次项下标均在 Γ' 中, 项数递减, 最终可获得 $k \geq 1$ 使得 $a_\alpha^k x = 0$.

因此断言得证. 然而 $\mathfrak{p} = \mathrm{ann}(x)$ 是素理想, 断言蕴涵 $a_\alpha \in \mathfrak{p}$, 与 α 取法矛盾.

综上可见 $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}^*$. 基于此, $\mathfrak{p}$ 零化每个 x_γ, 亦即 $\mathfrak{p} \subset I_\gamma := \mathrm{ann}(x_\gamma)$. 另一方面,

$$\prod_{\gamma \in \Gamma_2} I_\gamma \subset \bigcap_{\gamma \in \Gamma_2} I_\gamma \subset \mathfrak{p},$$

引理 1.1.1 蕴涵存在 $\gamma \in \Gamma_2$ 使得 $\mathfrak{p} \supset I_\gamma$, 故 $\mathfrak{p} = I_\gamma$. 取 $x^* = x_\gamma$ 即得 (ii). □

推论 B.4.2 设 Γ 无挠而且具有消去律, R 为 Γ-分次环, 则:

(i) $\mathrm{nil}(R)$ (定义 2.1.1) 是分次理想, 等于 R 的所有分次素理想之交;

(ii) 若 I 是 R 的分次理想, 则 $\sqrt{I}$ 也是分次理想, 等于所有包含 I 的分次素理想之交.

证明 两者都是命题 2.1.5 和定义–命题 B.4.1 (i) 的结合. □

推论 B.4.3 设 Γ 无挠而且具有消去律, R 为 Γ-分次环, I 为 R 的分次理想, 则 $(V(I), \subset)$ 中的极小元都是分次素理想.

证明 以 Γ-分次环 R/I 代 R, 问题化到 $I = 0$ 的特例. 若 $\mathfrak{p}$ 是 R 的极小素理想, 则定义–命题 B.4.1 中的分次素理想 $\mathfrak{p}^*$ 必等于 $\mathfrak{p}$. □

以下是命题 3.4.8 的 Γ-分次版本.

命题 B.4.4 设 Γ 无挠而且具有消去律, R 为 Γ-分次 Noether 环, M 为有限生成 Γ-分次 R-模, 则存在分次子模的升链 $0 = M_0 \subset \cdots \subset M_n = M$ 使得

(i) 每个 $1 \leq i \leq n$ 都存在分次素理想 $\mathfrak{p}_i$ 使得 $M_i/M_{i-1} \simeq R/\mathfrak{p}_i$;

(ii) $\mathrm{Ass}(M) \subset \{\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_n\}$.

证明 类似命题 3.4.8 的证明. 当 $M \neq 0$ 时, 要旨在于对所有 $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(M)$ (必为分次素理想) 运用定义–命题 B.4.1 (ii) 取 M 的齐次元 x^*, 使得 $\mathfrak{p} = \mathrm{ann}(x^*)$, 从而得到分次子模 $M_1 \subset M$ 使得 $M_1 \simeq R/\mathfrak{p}$, 然后对 M/M_1 递归地操作. □

在定义–命题 B.4.1 和 B.4.4 的基础上, 准素分解的定义 3.5.5 及关于存在性的 Lasker–Noether 定理 3.5.9 (要求 R 是 Noether 环) 都有 Γ-分次版本.

最后介绍中山引理 (定理 2.3.4) 的两种分次版本.

命题 B.4.5 以下要求 Γ 具有消去律, R 为 Γ-分次环, M 为 Γ-分次 R-模.

(i) 设 R 有唯一极大分次理想 $\mathfrak{m}$; 换言之 $\mathfrak{m} \neq R$, 而且所有分次真理想皆包含于 $\mathfrak{m}$. 若 M 有限生成, 并且 $M = \mathfrak{m}M$, 则 $M = 0$.

(ii) 设 R_0 的理想 I_0 满足 $I_0 \subset \mathrm{rad}(R_0)$. 若 M_γ 对所有 $\gamma \in \Gamma$ 都是有限生成 R_0-模, 并且 $M = I_0 M$, 则 $M = 0$.

证明 对于 (i), 证以下断言即可: 存在 $a \in \mathfrak{m}_0$ 使得 $(1+a)M = 0$. 如此则齐次元 $1+a$ 生成不包含于 $\mathfrak{m}$ 的分次理想, 故 $1+a$ 可逆而 $M = 0$.

为此, 取 M 的非零齐次生成元 $x_1, \ldots, x_n$, 取 $a_{ij} \in \mathfrak{m}$ 使得 $x_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j$ 对所有 $1 \leq i \leq n$ 成立. 记矩阵 $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ 的特征多项式为 $X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_0 \in R[X]$, 照搬引理 2.3.3 (代入 $\varphi = \mathrm{id}_M$) 的证法可见

$$(1 + a_{n-1} + \cdots + a_0)M = 0.$$

取 $a = a_{n-1} + \cdots + a_0$. 断言归结为证 $a_i \in \mathfrak{m}_0$ 对所有 $0 \leq i < n$ 成立.

然而 $\pm a_{n-k}$ 是所有 $\det A\binom{I}{I}$ 之和, 其中 I 遍历 $\{1, \ldots, n\}$ 的 k 元子集, 而 $A\binom{I}{I}$ 代表属于 I 的行和列给出的 $k \times k$ 子矩阵, 见 [9, 引理 5.11.3]. 问题又归结为对所有 I 和其上的置换 σ 说明 $\prod_{i \in I} a_{i,\sigma(i)} \in \mathfrak{m}_0$: 诚然, 记 $\gamma_i := \deg x_i$, 则因为 $a_{ij} \in \mathfrak{m}_{\gamma_j - \gamma_i}$ 而 $\sum_i (\gamma_i - \gamma_{\sigma(i)}) = 0$ (减法取在群化 Γ^{grp} 中), 确有 $\prod_i a_{i,\sigma(i)} \in \mathfrak{m}_0$.

对于 (ii), $M = I_0 M$ 蕴涵对所有 $\gamma \in \Gamma$ 皆有 $M_\gamma = I_0 M_\gamma$. 施定理 2.3.4 于环 R_0 即有 $M_\gamma = 0$. □

在此基础上, 中山引理的推论 2.3.5 也相应地推及分次情形: 仅须对该处的模和同态施加分次条件, 对该处的元素施加齐次条件, 然后将理想 I 换成命题 B.4.5 (i) 或 (ii) 中的版本即可.

B.5 同调性质

选定加法群 Γ 和 Γ-分次环 R. 命题 4.1.4 业已说明 $R\text{-}\mathsf{Mod}_\Gamma$ 是 Abel 范畴, 本节给出其细化.

引理 B.5.1 对任何分次 R-模 M, 存在 Γ 的一族元素 $(\eta_i)_{i\in I}$ 和分次模之间的满同态 $\bigoplus_{i\in I} R(\eta_i) \twoheadrightarrow M$, 此处符号如定义 4.4.2; 若 M 有限生成, 则 I 可取为有限集.

证明 取 M 的一族齐次生成元 $\{x_i\}_{i\in I}$, 满足 $x_i \in M_{\eta_i}$, 再取 $\bigoplus_{i\in I} R(\eta_i) \twoheadrightarrow M$ 使之映标准基的第 i 个元素为 x_i. □

引理 B.5.2 给定 Γ-分次 R-模 L, M, N 和 R-Mod 中的交换图表

$$\begin{tikzcd} L \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, "f"'] & & M. \arrow[dl, "g"] \\ & N & \end{tikzcd}$$

若 f 和 g (或 f 和 h) 是分次同态, 则可调整 h 为分次同态 h' (或调整 g 为分次同态 g') 使得图表仍交换.

证明 对于 f 和 g 分次的情形, 定义 h' 使它在每个 L_γ 上等于 h 与投影 $M \to M_\gamma$ 的合成即可. 同理可证 f 和 h 分次的情形. □

命题 B.5.3 设 M 为 Γ-分次 R-模:

(i) M 是投射 R-模当且仅当 M 是 $R\text{-}\mathsf{Mod}_\Gamma$ 的投射对象;

(ii) 若 M 是内射 R-模, 则 M 是 $R\text{-}\mathsf{Mod}_\Gamma$ 的内射对象.

证明 对于 (i) 的 "仅当" 方向和 (ii), 运用引理 B.5.2 将 M 在 R-Mod 中满足的投射 (或内射) 条件改进到 $R\text{-}\mathsf{Mod}_\Gamma$ 层次即可.

对于 (i) 的 "当" 方向, 取 $\bigoplus_{i\in I} R(\eta_i) \twoheadrightarrow M$ 如引理 B.5.1, 则 $R\text{-}\mathsf{Mod}_\Gamma$ 中的投射条件蕴涵 M 是 $\bigoplus_{i\in I} R(\eta_i)$ 的直和项, 但后者作为 R-模自由. □

命题 B.5.4 范畴 $R\text{-}\mathsf{Mod}_\Gamma$ 是 Grothendieck 范畴 [8, 定义 2.10.1], 它有足够的内射对象和投射对象 [8, 定义 2.8.16].

证明 命题 4.1.4 表明 $R\text{-}\mathsf{Mod}_\Gamma$ 具备小 $\varinjlim$ 和小 $\varprojlim$, 而且用忘却函子化到 R-Mod 可见滤过 $\varinjlim$ 皆正合. 为了证明 $R\text{-}\mathsf{Mod}_\Gamma$ 是 Grothendieck 范畴, 因而有足够的内射对象 [8, 定理 2.10.14], 说明它有生成元即可.

从引理 B.5.1 易见 $\{R(\eta)\}_{\eta\in\Gamma}$ 是 $R\text{-}\mathsf{Mod}_\Gamma$ 的生成系 [8, 定义 1.11.8], 故 $\bigoplus_{\eta\in\Gamma} R(\eta)$ 是生成元. 另一方面, 引理 B.5.3 (i) 表明 $R(\eta)$ 是投射对象, 故 $R\text{-}\mathsf{Mod}_\Gamma$ 有足够的投射对象. □

定义 B.5.5 对所有 Γ-分次 R-模 M 和 M', 定义

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_R(M,M')_\gamma &:= \left\{f\in\mathrm{Hom}_R(M,M') : \forall\eta\in\Gamma,\ f(M_\eta)\subset M'_{\eta+\gamma}\right\},\\ {}^*\mathrm{Hom}_R(M,M') &:= \bigoplus_{\gamma\in\Gamma}\mathrm{Hom}_R(M,M')_\gamma;\end{aligned}$$

$\mathrm{Hom}_R(M,M')_\gamma$ 对所有 γ 都是 R-模, 而 ${}^*\mathrm{Hom}_R(M,M')$ 是 Γ-分次 R-模. 此构造对 M 和 M' 有函子性.

注意到 ${}^*\mathrm{Hom}_R(M,M')$ 是 $\mathrm{Hom}_R(M,M')$ 的 R-子模.

容易看出 ${}^*\mathrm{Hom}_R$ 具有和非分次情形的 Hom 函子相同的正合条件. 基于命题 B.5.4, 以下定义是合理的.

定义 B.5.6 将 ${}^*\mathrm{Hom}_R$ 的导出双函子记为 ${}^*\mathrm{Ext}^\bullet_R$, 它取值在 R-Mod$_\Gamma$, 可通过对第一个 (或第二个) 变元在 R-Mod$_\Gamma$ 中作投射 (或内射) 解消来计算.

关于 $\mathrm{Ext}^\bullet_R$ 的长正合列等性质对 ${}^*\mathrm{Ext}^\bullet_R$ 仍成立.

引理 B.5.7 设 M 和 M' 为 Γ-分次 R-模. 若 M 有限生成, 则有 R-模的等式

$$ {}^*\mathrm{Hom}_R(M,M') = \mathrm{Hom}_R(M,M'). $$

证明 取满同态 $F := \bigoplus_{i=1}^n R(\eta_i) \to M$, 记其核为 K, 则有 R-Mod 中的行正合交换图表

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & {}^*\mathrm{Hom}_R(M,M') \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"] & {}^*\mathrm{Hom}_R(F,M') \arrow[r] \arrow[d, "\beta"] & {}^*\mathrm{Hom}_R(K,M') \arrow[d, "\gamma"] \\ 0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}_R(M,M') \arrow[r] & \mathrm{Hom}_R(F,M') \arrow[r] & \mathrm{Hom}_R(K,M'), \end{tikzcd}$$

竖直同态皆单, 而且第一行实则是 R-Mod$_\Gamma$ 中的正合列. 命 $e_1,\ldots,e_n$ 为 F 作为自由 R-模的标准基, 则指定 $g\in\mathrm{Hom}_R(F,M')$ 相当于指定 $y_1,\ldots,y_n\in M'$, 其中 $y_i := g(f_i)$; 将每个 y_i 分解为齐次元之和, 即知 $\varphi\in{}^*\mathrm{Hom}_R(F,M')$. 因此 β 是同构.

现在给定 $f\in\mathrm{Hom}_R(M,M')$, 记它在 $\mathrm{Hom}_R(F,M')\simeq{}^*\mathrm{Hom}_R(F,M')$ 中的像为 g. 因 ${}^*\mathrm{Hom}_R(F,M')\to{}^*\mathrm{Hom}_R(K,M')$ 的核是分次模, $g|_K=0$ 蕴涵 g 的每个齐次部分在 K 上为零, 故都通过 M 分解; 这蕴涵 $f\in{}^*\mathrm{Hom}_R(M,M')$. □

命题 B.5.8 设 R 为 Γ-分次 Noether 环, M 为有限生成分次 R-模, 则有典范同态 ${}^*\mathrm{Ext}^\bullet_R(M,\cdot)\simeq\mathrm{Ext}^\bullet_R(M,\cdot)$.

证明 取 M 在 R-Mod$_\Gamma$ 中的投射解消 $P_\bullet\to M\to 0$, 引理 B.5.3 (i) 表明这也是 R-Mod 中的投射解消. 以此计算 ${}^*\mathrm{Ext}^\bullet_R(M,\cdot)$ 和 $\mathrm{Ext}^\bullet_R(M,\cdot)$ 并应用引理 B.5.7. □

B.6 齐次素谱

齐次素谱是代数几何学中研究射影代数簇的基本工具. 本节仅论 $\Gamma = \mathbb{Z}_{\geq 0}$ 的常用情形.

约定 B.6.1 本节的分次环默认为 $\mathbb{Z}_{\geq 0}$-分次的, 相应的分次模则默认为 $\mathbb{Z}$-分次的.

回忆定义 B.3.1 所谓的分次素理想.

定义 B.6.2 (齐次素谱) 对于分次环 R, 定义其分次理想 $R_+ := \bigoplus_{k\geq 1} R_k$ 以及

$$\begin{aligned}\mathrm{Proj}^+(R) &:= \{\mathfrak{p} \subset R : \text{分次素理想}\},\\ \mathrm{Proj}(R) &:= \left\{\mathfrak{p} \in \mathrm{Proj}^+(R) : \mathfrak{p} \not\supset R_+\right\};\end{aligned}$$

以上两者都是 $\mathrm{Spec}(R)$ 的子集, 按此赋予由 Zariski 拓扑所确定的子空间拓扑. 称 $\mathrm{Proj}(R)$ 为 R 的齐次素谱.

如果 $R = R_0$ 则 $\mathrm{Proj}(R) = \mathrm{Proj}^+(R) = \mathrm{Spec}(R)$. 我们主要关心 $\mathrm{Proj}(R)$, 以下先来探讨 $\mathrm{Proj}(R)$ 的拓扑.

设 I 是 R 的分次理想, $f \in R$ 是齐次元. 仿照 (1.10.1) 来定义

$$\begin{aligned}V_+(I) &:= \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Proj}(S) : \mathfrak{p} \supset I\},\\ D_+(f) &:= \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Proj}(S) : f \notin \mathfrak{p}\}.\end{aligned} \tag{B.6.1}$$

对任一族齐次元 $f_1, \ldots, f_k$ 记 $V_+(f_1, \ldots, f_k) := V_+((f_1, \ldots, f_k))$. 观察到

$$V_+(I) = V(I) \cap \mathrm{Proj}(R), \quad D_+(f) = D(f) \cap \mathrm{Proj}(R).$$

引理 B.6.3 以上赋予 $\mathrm{Proj}(R)$ 的拓扑满足以下性质.

(i) 闭子集恰是形如 $V_+(I)$ 的子集.

(ii) 设 $f = f_0 + \cdots + f_m \in R$, 其中 $f_i \in R_i$, 则

$$D(f) \cap \mathrm{Proj}(R) = D_+(f_0) \cup \cdots \cup D_+(f_m).$$

(iii) 形如 $D_+(f)$ 的子集构成拓扑空间 $\mathrm{Proj}(R)$ 的一组基.

证明 先料理 (i). 对于所有齐次理想 I, 从 $V_+(I) = \mathrm{Proj}(R) \cap V(I)$ 可见 $V_+(I)$ 闭. 反之设 $E \subset \mathrm{Proj}(E)$ 为闭子集, 表作 $E = V(J) \cap \mathrm{Proj}(R)$, 其中 J 是 R 的理想. 将任意 $g \in J$ 分解为 $g_0 + \cdots + g_m$ 使得 $g_i \in R_i$, 则对所有 $\mathfrak{p} \in E$ 皆有 $g_0, \ldots, g_m \in \mathfrak{p}$, 因此若定义 I 为由所有 $g_0, \ldots, g_m$ 生成的分次理想, 其中 g 遍历 J, 便有 $I \supset J$ 和 $E = V_+(I)$.

对于 (ii), 设 $\mathfrak{p}$ 是 R 的任意分次理想, 则 $f \notin \mathfrak{p}$ 当且仅当存在 $0 \leq i \leq m$ 使得 $f_i \notin \mathfrak{p}$.

断言 (iii) 是 (ii) 的直接结论. □

作为推论, 如果齐次元构成的子集 $\Sigma \subset R_+$ 生成 R_+, 则有开覆盖

$$\operatorname{Proj}(R) = \bigcup_{f \in \Sigma} D_+(f);$$

这是因为分次素理想 $\mathfrak{p}$ 包含 R^+ 当且仅当它包含每个 $f \in \Sigma$.

例 B.6.4 不同于 Spec 的情形 (命题 2.5.1), 分次环的 Proj 未必是拟紧的. 取无穷元多项式环 $R := \mathbb{Z}[X_1, X_2, \ldots]$ 为例, 赋予标准分次结构, 使得 $\deg X_i = 1$ 对所有 i 成立. 相应的开覆盖 $\operatorname{Proj}(R) = \bigcup_{i=1}^{\infty} D_+(X_i)$ 不含有限子覆盖, 这是由于对任意 $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$, 分次素理想 $(X_1, \ldots, X_n)$ 属于 $\operatorname{Proj}(R)$ 但不属于 $D_+(X_1) \cup \cdots \cup D_+(X_n)$.

引理 B.6.5 以上定义的 $V_+(I)$ 满足以下性质:

(i) $V_+(0) = \operatorname{Proj}(R)$ 而 $V(R_+) = \varnothing$;

(ii) 若 $I \subset J$ 则 $V_+(I) \supset V_+(J)$;

(iii) 设 $(I_\alpha)_\alpha$ 为一族分次理想, 则 $V_+(\sum_\alpha I_\alpha) = \bigcap_\alpha V_+(I_\alpha)$;

(iv) 设 I, J 为分次理想, 则 $V_+(I) \cup V_+(J) = V_+(I \cap J) = V_+(IJ)$;

(v) 对于 $\operatorname{Proj}(R)$ 的任意子集 $\mathcal{S}$, 其闭包 $\overline{\mathcal{S}}$ 等于 $V_+\left(\bigcap_{\mathfrak{p} \in \mathcal{S}} \mathfrak{p}\right)$.

证明 与引理 1.10.2 与引理 1.10.8 全同, 以 V_+ 代 V 便是; 注意到 (v) 的论证需要引理 B.6.3 (i) 的性质. □

引理 B.6.6 以上定义的 $D_+(f)$ 满足下述性质:

(i) $D_+(0) = \varnothing$;

(ii) $D_+(fg) = D_+(f) \cap D_+(g)$;

(iii) 若 I 是 R 的理想, 由齐次元所构成的子集 Σ 生成, 则 $\operatorname{Proj}(R) \smallsetminus V_+(I) = \bigcup_{f \in \Sigma} D_+(f)$;

(iv) $\operatorname{Proj}(R) \smallsetminus D_+(f) = V_+(f)$;

证明 与引理 1.10.3 全同. □

引理 B.6.3–B.6.6 的证明未用 $\mathfrak{p} \not\supset R_+$ 的条件, 故同样适用于 Proj^+. 此外, Proj^+ 的构造具有较好的函子性. 精确地说, 设 $\varphi : R \to R'$ 为分次环的同态; 观察到分次素理想 $\mathfrak{p}' \subset R'$ 的原像 $\varphi^{-1}(\mathfrak{p}')$ 仍是分次的, 故命题 1.10.10 中的连续映射 $\operatorname{Spec}(\varphi) : \operatorname{Spec}(R') \to \operatorname{Spec}(R)$ 限制为 $\operatorname{Proj}^+(\varphi) : \operatorname{Proj}^+(R') \to \operatorname{Proj}^+(R)$.

作为特例, $R_0 \to R$ 诱导 $\operatorname{Proj}^+(R) \to \operatorname{Proj}^+(R_0) = \operatorname{Spec}(R_0)$, 映 $\mathfrak{p}$ 为 $\mathfrak{p} \cap R_0$.

引理 B.6.7 设 S 是分次环. 若存在可逆齐次元 $f \in S_+$, 则上述映射对 S 给出同胚 $\mathrm{Proj}^+(S) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Spec}(S_0)$.

证明 选定 f 并且记 $d := \deg f \geq 1$. 以下说明 $\mathrm{Proj}^+(S) \to \mathrm{Spec}(S_0)$ 的逆可以取为 $\mathfrak{p}_0 \mapsto \sqrt{\mathfrak{p}_0 S}$, 其中 $\mathfrak{p}_0$ 表 S_0 的素理想.

首先由次数考量可见 $\sqrt{\mathfrak{p}_0 S} \cap S_0 = \sqrt{\mathfrak{p}_0} = \mathfrak{p}_0$; 特别地, $\mathfrak{p}_0 S$ 是 S 的真理想. 由推论 B.4.2 知 $\mathfrak{p}_0 S$ 为分次真理想.

其次设非零齐次元 $a, b \in S$ 满足 $ab \in \sqrt{\mathfrak{p}_0 S}$, 则

$$\frac{a^d b^d}{f^{\deg a} f^{\deg b}} \in \sqrt{\mathfrak{p}_0 S} \cap S_0 = \mathfrak{p}_0.$$

因此必有 $\frac{a^d}{f^{\deg a}} \in \mathfrak{p}_0$ 或 $\frac{b^d}{f^{\deg b}} \in \mathfrak{p}_0$, 从而 $a \in \sqrt{\mathfrak{p}_0 S}$ 或 $b \in \sqrt{\mathfrak{p}_0 S}$. 代入引理 B.3.5 可推得 $\sqrt{\mathfrak{p}_0 S}$ 为素理想.

综上得到映射 $\mathrm{Spec}(S_0) \to \mathrm{Proj}^+(S)$, 而且 $\mathrm{Spec}(S_0) \to \mathrm{Proj}^+(S) \to \mathrm{Spec}(S_0)$ 合成为恒等.

兹考虑另一方向的合成. 给定 $\mathfrak{p} \in \mathrm{Proj}^+(S)$, 由 $(\mathfrak{p} \cap S_0)S \subset \mathfrak{p}$ 知 $\sqrt{(\mathfrak{p} \cap S_0)S} \subset \mathfrak{p}$. 另一方面所有非零齐次元 $a \in \mathfrak{p}$ 都满足

$$\frac{a^d}{f^{\deg a}} \in \mathfrak{p} \cap S_0,$$

从而 $a^d \in (\mathfrak{p} \cap S_0)S$, 继而 $a \in \sqrt{(\mathfrak{p} \cap S_0)S}$. 这给出反向包含, 故 $\sqrt{(\mathfrak{p} \cap S_0)S} = \mathfrak{p}$.

综上, $\mathrm{Proj}^+(S) \to \mathrm{Spec}(S_0)$ 是连续双射, 现证其为开. 设 $g = g_0 + \cdots + g_m \in S$. 以下证明 $D(g) \cap \mathrm{Proj}^+(S)$ 的像等于 $\bigcup_{i=0}^m D(g_i^d / f^i)$.

- ◇ 设 $\mathfrak{p} \in \mathrm{Proj}^+(S)$ 的像是 $\mathfrak{p}_0$, 而 $g \notin \mathfrak{p}$, 则存在 $0 \leq i \leq m$ 使得 $g_i \notin \mathfrak{p}$, 从而 $g_i^d / f^i \in S_0 \smallsetminus \mathfrak{p}_0$. 故 $D(g) \cap \mathrm{Proj}^+(S)$ 的像包含于 $\bigcup_{i=0}^m D(g_i^d / f^i)$.
- ◇ 为了证明反向包含, 给定 $0 \leq i \leq m$. 对所有 $\mathfrak{p}_0 \in \mathrm{Spec}(S_0)$ 皆有

  $$g_i \in \sqrt{\mathfrak{p}_0 S} \implies g_i^d / f^i \in \sqrt{\mathfrak{p}_0 S} \cap S_0 = \mathfrak{p}_0;$$

  取逆否命题即知 $\mathfrak{p}_0 \in D(g_i^d / f^i) \implies \sqrt{\mathfrak{p}_0 S} \in D(g_i)$; 然而引理 B.6.3 (ii) 的 Proj^+ 版本蕴涵 $D(g_i) \cap \mathrm{Proj}^+(S) \subset D(g) \cap \mathrm{Proj}^+(S)$.

由于 g 是任意的, 开性得证. □

对分次环 R 的所有齐次元 f 和分次 R-模 M, 按照 (1.7.2) 与定义–命题 B.3.2 的符号, 考虑齐次局部化

$$\begin{aligned} R_{(f)} &:= R[f^{-1}]_0, \\ M_{(f)} &:= M[f^{-1}]_0; \end{aligned} \tag{B.6.2}$$

注意到 $M_{(f)}$ 是 $R_{(f)}$-模, 两者都不带分次. 在 $f \in R_+ \smallsetminus \{0\}$ 的前提下, 引理 B.6.7 给出 $\mathrm{Proj}^+(R[f^{-1}]) \simeq \mathrm{Spec}\, R_{(f)}$. 以下将比较 R (或 M) 和 $R_{(f)}$ (或 $M_{(f)}$) 的性质.

命题 B.6.8 设 $\Bbbk$ 为交换环, 赋予平凡分次结构, 而 R 是分次 $\Bbbk$-代数, 且作为 $\Bbbk$-代数有限生成. 考虑非零齐次元 $f \in R_+$ 和分次 R-模 M.

(i) 齐次局部化 $R_{(f)}$ 是有限生成 $\Bbbk$-代数.

(ii) 若 M 是有限生成分次 R-模, 则 $M_{(f)}$ 是有限生成 $R_{(f)}$-模.

证明 取定 R 作为 $\Bbbk$-代数的非零齐次生成元 $a_1, \ldots, a_n$. 于是 $R_{(f)}$ 的元素总是形如

$$\frac{a_1^{d_1} \cdots a_n^{d_n}}{f^d}, \quad d_1, \ldots, d_n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, \quad \sum_i d_i \deg a_i = d \deg f$$

之乘积的 $\Bbbk$-线性组合. 若有 $1 \leq i \leq n$ 使得 $d_i > \deg f$, 则 $d > \deg a_i$, 而上式也等于 $R_{(f)}$ 中的乘积

$$\frac{a_i^{\deg f}}{f^{\deg a_i}} \cdot \frac{a_i^{d_i - \deg f} \prod_{j \neq i} a_j^{d_j}}{f^{d - \deg a_i}};$$

如是反复, 可见 $\Bbbk$-代数 $R_{(f)}$ 由所有 $\frac{a_i^{\deg f}}{f^{\deg a_i}}$ 连同满足 $0 \leq d_i \leq \deg f$ 的乘积 $\frac{a_1^{d_1} \cdots a_n^{d_n}}{f^d}$ 生成, 其中 $\sum_i d_i \deg a_i = d \deg f$, 由此得到 (i).

对于 (ii), 取定 M 的非零齐次生成元 $x_1, \ldots, x_m$. 类似论证表明 $M_{(f)}$ 可由形如 $\frac{a_1^{d_1} \cdots a_n^{d_n} x_j}{f^d}$ 的元素生成, 其中 $0 \leq d_i \leq \deg f$ 而 $\sum_{i=1}^{n} d_i \deg a_i + \deg x_j = d \deg f$. □

推论 B.6.9 若 I 是 R 的分次理想, 则商同态 $R \to R/I$ 诱导以 $V_+(I)$ 为像的闭嵌入

$$i_I : \mathrm{Proj}(R/I) \to \mathrm{Proj}(R);$$

事实上, $i_I\left(V_+(\bar{J})\right) = V_+(J)$, 其中 $\bar{J}$ 是 R/I 的任意分次理想, $J \subset R$ 为其原像.

若 $f \in R_+ \smallsetminus \{0\}$ 是齐次元, 则典范同态 $R \to R[f^{-1}]$ 诱导以 $D_+(f)$ 为像的开嵌入

$$j_f : \mathrm{Proj}^+(R[f^{-1}]) \to \mathrm{Proj}(R),$$

而按照 (B.6.2) 的符号, $R_{(f)} \hookrightarrow R[f^{-1}]$ 诱导同胚

$$\mathrm{Spec}\left(R_{(f)}\right) \xleftarrow{\sim} \mathrm{Proj}^+(R[f^{-1}]).$$

证明 分次环同态一般仅诱导 $\mathrm{Proj}^+(\cdots)$ 之间的连续映射. 对于第一部分, 对所有 $\bar{\mathfrak{p}} \in \mathrm{Proj}^+(R/I)$ 记其原像为 $\mathfrak{p} \in \mathrm{Proj}^+(R) \cap V(I)$, 则由于 $R_+ \twoheadrightarrow (R/I)_+$, 我们有

$$\mathfrak{p} \supset R_+ \iff \bar{\mathfrak{p}} \supset (R/I)_+,$$

故商同态确实诱导 $\mathrm{Proj}(R/I) \to \mathrm{Proj}(R)$.

对于第二部分, 将任意 $\mathfrak{q} \in \mathrm{Proj}^+(R[f^{-1}])$ 表作 $\mathfrak{p}[f^{-1}] \in$, 其中 $\mathfrak{p} \in \mathrm{Proj}^+(R)$ 满足 $f \notin \mathfrak{p}$ (见注记 B.3.4), 则 $\mathfrak{p}$ 正是 $\mathfrak{q}$ 的像. 由 $f \in R_+$ 可知 $\mathfrak{p} \not\supset R_+$, 故 $R \to R[f^{-1}]$ 确

实诱导 $\mathrm{Proj}^+(R[f^{-1}]) \to \mathrm{Proj}(R)$. 另一方面, 引理 B.6.7 给出同胚 $\mathrm{Proj}^+(R[f^{-1}]) \simeq \mathrm{Spec}\left(R_{(f)}\right)$.

鉴于引理 B.6.3 对拓扑的描述, 其余断言都是将推论 1.10.11 从 Spec 限制到 Proj 或 Proj^+ 的产物. □

继续沿用定义–命题 B.3.2 与 (B.6.2) 的符号, 局部化满足以下传递性.

命题 B.6.10 设 $\mathfrak{p} \in \mathrm{Proj}(R)$ 而齐次元 $f \in R_+ \smallsetminus \{0\}$ 满足 $\mathfrak{p} \in D_+(f)$. 按照注记 B.3.4 (代入 $U := \{1, f, f^2, \ldots\}$) 和推论 B.6.9 的方式, 取

$$\mathfrak{p}' := \mathfrak{p}[f^{-1}] \cap R_{(f)} \in \mathrm{Spec}\, R_{(f)},$$

则有典范同构

$$R_{(\mathfrak{p})} \simeq \left(R_{(f)}\right)_{\mathfrak{p}'}, \quad M_{(\mathfrak{p})} \simeq \left(M_{(f)}\right)_{\mathfrak{p}'}.$$

证明 取乘性子集 $V := \{v \in R \smallsetminus \mathfrak{p} : \text{齐次元}\} \supset U$, 命 $\underline{V}$ 为 V 在 $R[f^{-1}]$ 中的像. 命题 1.6.5 给出

$$R[f^{-1}][\underline{V}^{-1}] \simeq R[V^{-1}].$$

回忆到 $R[f^{-1}]$ 是 $\mathbb{Z}$-分次环. 照搬命题 1.7.6 (iii) 的论证, 可见 $\underline{V}$ 精确到可逆元也等于

$$\underline{W} := \left\{w \in R[f^{-1}] \smallsetminus \mathfrak{p}[U^{-1}] : \text{齐次元}\right\}.$$

由此知 $R[f^{-1}][\underline{W}^{-1}] \simeq R[V^{-1}]$, 其具体映法是 $\dfrac{r/f^n}{w/f^m} = \dfrac{rf^m/f^n}{w/1} \mapsto \frac{rf^m}{wf^n}$; 这是 $\mathbb{Z}$-分次环同构. 两边同取 0 次部分即得第一个同构. 第二个同构类此. □

B.7 分次 Noether 正规化

选定域 $\Bbbk$. 本节旨在说明如何将正规化定理 7.7.3 推及有限生成分次 $\Bbbk$-代数. 本节所谓的分次结构均为 $\mathbb{Z}_{\geq 0}$-分次的; 对于分次 $\Bbbk$-代数, 我们要求 $\Bbbk$ 映入其零次部分.

推论 B.4.3 说明分次环的极小素理想总是分次素理想.

引理 B.7.1 在引理 7.7.1 的表述中, 设 $\Bbbk[X_1, \ldots, X_e]$ 有分次结构, 使得每个 X_i 都是次数非零的齐次元; 如果 t 是齐次的, 则 $t_1, \ldots, t_{e-1}$ 也可以取为齐次的, 并且不属于 $\Bbbk$.

证明 注意到 $(X_1, \ldots, X_e)$ 是 $\Bbbk[X_1, \ldots, X_e]$ 的极大分次理想: 它包含所有分次真理想. 此外 $t \in (X_1, \ldots, X_e) \smallsetminus \{0\}$. 定理 7.3.1 蕴涵 $\mathrm{ht}((t)) = 1$. 递归地设 $i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ 且有齐次元 $t_1, \ldots, t_i \notin \Bbbk$ 使得 $\mathrm{ht}((t_1, \ldots, t_i, t)) = i + 1$; 在素避性质 (命题 1.1.3) 中代入 $I = (X_1, \ldots, X_e)$ 以及 $V((t_1, \ldots, t_i, t))$ 的所有极小元 $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_r$ (有限多个, 皆为分次素理想), 可知若 $(X_1, \ldots, X_e)$ 不是 $V((t_1, \ldots, t_i, t))$ 的极小元, 则存在

$$t_{i+1} \in (X_1, \ldots, X_e) \smallsetminus \bigcup_{j=1}^{r} \mathfrak{p}_j,$$

而且易见 t_{i+1} 可取为齐次的. 这使 $\mathrm{ht}((t_1,\ldots,t_{i+1},t)) = i+2$.

另一方面, 若 $(X_1,\ldots,X_e)$ 是 $V((t_1,\ldots,t_i,t))$ 的极小元, 则它是唯一极小元, 这是因为极小元必为分次素理想; 此时 $i+1 = \mathrm{ht}((X_1,\ldots,X_e)) = e$. 综上, 构造止步于 $i = e-1$.

代入定理 3.3.3 可见分次 $\Bbbk$-代数 $A := \Bbbk[X_1,\ldots,X_e]/(t_1,\ldots,t_{e-1},t)$ 是 Artin 环; 记 $\mathfrak{m}$ 为 $(X_1,\ldots,X_e)$ 的像, 则 $\mathfrak{m} = \mathrm{rad}(A)$ 而定理 3.3.1 导致 $k \gg 0 \implies \mathfrak{m}^k = 0$. 特别地, $k \gg 0 \implies A_k = 0$, 故 A 是有限维 $\Bbbk$-向量空间.

考虑多项式代数 $S' := \Bbbk[Y_1,\ldots,Y_e]$, 赋予分次结构使得 $Y_i \mapsto t_i$ (当 $i < e$) 和 $Y_e \mapsto t$ 让 $S := \Bbbk[t_1,\ldots,t_{e-1},t]$ 成为其分次商代数, 则 S' 的唯一极大分次理想 $(Y_1,\ldots,Y_e)$ 被映为 $(t_1,\ldots,t_{e-1},t)$. 让 $\Bbbk[X_1,\ldots,X_e]$ 通过 $S' \twoheadrightarrow S$ 成为分次 S'-模, 则有

$$\Bbbk[X_1,\ldots,X_e]/(Y_1,\ldots,Y_e)\Bbbk[X_1,\ldots,X_e] \simeq A.$$

应用分次中山引理 (命题 B.4.5 及其下讨论) 可得 $\Bbbk[X_1,\ldots,X_e]$ 是有限生成 S'-模, 换言之它是有限生成 S-模. 明所欲证. □

定理 B.7.2 在定理 7.7.3 的场景中, 如要求 S 是分次 $\Bbbk$-代数, 由次数非零的齐次元生成, 而且每个 I_j 都是分次理想, 则可取到分次子代数 R 和相应的同构, 使得每个 X_i 的像 x_i 都是齐次元.

证明 在该处的论证中, 第一步仍是化到 $S = \Bbbk[Y_1,\ldots,Y_n]$ 的情形, 带有分次结构使得每个 Y_i 都是次数 > 0 的齐次元. 对于后续步骤, 在 $x_1,\ldots,x_n$ 的构造中以引理 B.7.1 补充引理 7.7.1 即可. □

最后补充一则关于 Noether 分次环的维数性质, 将用于 §B.8.

命题 B.7.3 设 $R = \bigoplus_{k\geq 0} R_k$ 为 Noether $\mathbb{Z}_{\geq 0}$-分次环, 则 $\dim R = \sup_{\mathfrak{m}} \mathrm{ht}(\mathfrak{m})$, 其中 $\mathfrak{m}$ 遍历 R 的分次极大理想 (亦即 $\mathfrak{m}$ 既是 R 的极大理想, 又是 R 的分次理想).

若进一步要求 R_0 是域, R 作为 R_0-代数由 R_1 生成, 则 $\dim R = 1 + \deg H_R$; 此处 H_R 是分次环 R 的 Hilbert–Samuel 多项式 (定义 4.4.10).

证明 目标是对 R 的所有极大理想 $\mathfrak{m}'$ 证存在分次极大理想 $\mathfrak{m}$ 使得 $\mathrm{ht}(\mathfrak{m}) \geq \mathrm{ht}(\mathfrak{m}')$. 命 $\mathfrak{p}'_0 := \mathfrak{m}' \cap R_0$. 对乘性子集 $R_0 \smallsetminus \mathfrak{p}'_0$ 取局部化, 可设 $(R_0, \mathfrak{p}'_0)$ 为局部环. 考虑包含于 $\mathfrak{m}'$ 的极小素理想, 定义–命题 B.4.1 表明它必为分次的, 对之取商便可进一步要求 R 是整环. 以下对 $\dim R_0 < \infty$ 递归地论证.

若 $\dim R_0 = 0$, 则 R_0 是域而 R 是有限生成 R_0-代数, 同时也是整环. 定理 7.7.8 蕴涵 R 的所有极大理想都有相同高度. 特别地, $\mathfrak{m}'$ 和分次极大理想 $\mathfrak{m} := \bigoplus_{k>0} R_k$ 的高度相同.

若 $\dim R_0 > 0$, 则存在 $f \in \mathfrak{p}'_0 \smallsetminus \{0\}$. 分别对 f 在 R_0 和 R 中生成的理想取商, 可将问题化到 $\dim R_0$ 严格较低的情形; 见引理 7.7.2. 第一部分得证.

对于第二部分, 注意到此时 $\mathfrak{m} := \bigoplus_{k>0} R_k$ 是 R 的唯一分次极大理想, $R/\mathfrak{m} \simeq R_0$, 故定理 7.2.8 说明 $\dim R = \dim R_{\mathfrak{m}} = 1 + \deg H_{\mathfrak{m}R_{\mathfrak{m}}, R_{\mathfrak{m}}}$, 其中 $H_{\mathfrak{m}R_{\mathfrak{m}}, R_{\mathfrak{m}}}$ 刻画为

$$p \gg 0 \implies \dim_{R_0}\left(\mathfrak{m}^p R_{\mathfrak{m}} / \mathfrak{m}^{p+1} R_{\mathfrak{m}}\right) = H_{\mathfrak{m}R_{\mathfrak{m}}, R_{\mathfrak{m}}}(p).$$

然而有 R_0-向量空间的同构 $\mathfrak{m}^p R_{\mathfrak{m}} / \mathfrak{m}^{p+1} R_{\mathfrak{m}} \simeq \mathfrak{m}^p / \mathfrak{m}^{p+1}$ (命题 1.7.10); 又因为 R 作为 R_0-代数由 R_1 生成, $\mathfrak{m}^p / \mathfrak{m}^{p+1} \simeq R_p$. 综上, $H_{\mathfrak{m}R_{\mathfrak{m}}, R_{\mathfrak{m}}} = H_R$. □

B.8 分次泛自由和上半连续性质

本节承接 §7.8 和 §7.11. 先来陈述定义 7.8.1 的分次版本.

定义 B.8.1 设 R 为整环. 给定环同态 $R \to S$, 设 S 是 $\mathbb{Z}_{\geq 0}$-分次环, 使得 R 映入 S_0, 而 M 是分次 S-模. 若存在 $f \in R \smallsetminus \{0\}$ 使得每个 $M[f^{-1}]_n$ 都是自由 R-模, 则称**分次泛自由**性质成立.

我们总赋予 R 平凡分次结构 (集中于零次项), 因此 R_0 映入 S 相当于说 $R \to S$ 是分次环同态. 至于 $M[f^{-1}]$ 上的分次结构, 请见定义–命题 B.3.2.

引理 B.8.2 设 R 为任意环, 而分次 R-模 M 带有滤过 $0 = M_0 \subsetneq \cdots \subsetneq M_k = M$ 使得每个 M_i 皆为分次子模, 而且 $(M_i/M_{i-1})_n$ 对所有 i, n 皆为自由 R-模, 则 M_n 对每个 n 皆为自由 R-模.

证明 与非分次版本的引理 7.8.2 无异. □

引理 B.8.3 设 R 是 Noether 整环, S 是 $\mathbb{Z}_{\geq 0}$-分次环. 设环同态 $R \to S_0$ 使 S 成为由有限多个次数非零的齐次元生成之 R-代数. 若 M 是有限生成分次 S-模, 则定义 7.8.1 的分次泛自由性质成立.

证明 沿用引理 7.8.3 的论证及其符号. 在分次情形, 起点仍是 $S \underset{R}{\otimes} K$ 为零环的情形: 此时存在 $f \in R \smallsetminus \{0\}$ 使得 f 零化 1_S, 故 f 也零化 M 而 $M[f^{-1}] = 0$. 此时分次泛自由性质平凡地成立.

下设 $S \underset{R}{\otimes} K$ 非零, 继续沿用非分次情形的论证. 基于分次正规化定理 B.7.2 可见该处的 x_i, y_j, c_j, f_i 皆可取为齐次元, 命题 B.4.4 确保该处的 $M_i^\flat$ 和 $\mathfrak{q}_i$ 皆可取为分次的; 此时 $(S^\flat/\mathfrak{q}_i)[f_i^{-1}]$ 的每个分次部分都是自由 R-模. 代入引理 B.8.2 以完成证明. □

定理 B.8.4 设 R 是整环, 而 S 是 $\mathbb{Z}_{\geq 0}$-分次环. 设环同态 $R \to S_0$ 使 S 成为有限展示 R-代数, 由次数非零的齐次元生成, 而 M 是分次 S-模, 也是有限展示 S-模. 此时定义 B.8.1 的泛自由性质成立.

证明 沿用定理 7.8.4 的证明及其符号. 该处的化约方式也适用于分次情形. 差别在于第一步须取 S 的非零齐次生成元 $x_1, \ldots, x_n$, 其中 $d_i := \deg x_i > 0$, 依此化到

$$S = R[X_1, \ldots, X_n]/(g_1, \ldots, g_m) \quad (\text{作为分次 } R\text{-代数}),$$

其中 $R[X_1, \ldots, X_n]$ 带有以下分次结构: R 为零次, $\deg X_i = d_i$, 而 $g_1, \ldots, g_m$ 皆为齐次元. 取 M 的有限展示时须取齐次生成元, 相应地考虑分次 S-模的正合列

$$\bigoplus_{j=1}^{q} S(n_j) \xrightarrow{\phi} \bigoplus_{i=1}^{p} S(m_i) \to M \to 0,$$

其中 $S(\cdots)$ 代表平移分次结构, 见定义 4.4.2, 而每个 g_{ij} 都应取为齐次的. □

兹提供纤维维数的上半连续性 (定理 7.11.4) 的一则分次版本.

定理 B.8.5 设 $S = \bigoplus_{i \geq 0} S_i$ 为 $\mathbb{Z}_{\geq 0}$-分次环, 作为 S_0-代数由有限多个 1 次齐次元生成, 并且设 $R := S_0$ 为 Noether 环. 对于所有 $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, 集合

$$G_n(S|R) := \left\{ \mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(R) : \dim S \underset{R}{\otimes} \kappa(\mathfrak{p}) \geq n \right\}$$

是 $\operatorname{Spec}(R)$ 的闭子集.

证明 基于问题的拓扑诠释, 不妨设 R 既约. 注意到每个 S_i 都是有限生成 R-模. 设 $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_m$ 为 R 的极小素理想, 以纤维维数解释 $G_n(S|R)$, 立见 $G_n(S|R) = \bigcup_j G_n(S_j|R_j)$, 其中 $R_j = R/\mathfrak{p}_j$ 而 $S_j = S/\mathfrak{p}_j S$, 仍带分次. 因此可进一步设 R 为整环. 记 $K = \operatorname{Frac}(R)$.

应用命题 B.7.3 第二部分于分次 $\kappa(\mathfrak{p})$-代数 $S \underset{R}{\otimes} \kappa(\mathfrak{p})$ 和分次 K-代数 $S \underset{R}{\otimes} K$, 得

$$\dim S \underset{R}{\otimes} \kappa(\mathfrak{p}) = 1 + \deg H_1, \quad \dim S \underset{R}{\otimes} K = 1 + \deg H_2,$$

其中 $H_1, H_2 \in \mathbb{Q}[X]$ 的刻画是当 $i \gg 0$ 时

$$H_1(i) = \dim_{\kappa(\mathfrak{p})} S_i \underset{R}{\otimes} \kappa(\mathfrak{p}), \quad H_2(i) = \dim_K S_i \underset{R}{\otimes} K.$$

推论 2.3.5 说明 $\dim_{\kappa(\mathfrak{p})} S_i \underset{R}{\otimes} \kappa(\mathfrak{p})$ 是 $R_{\mathfrak{p}}$-模 $(S_i)_{\mathfrak{p}}$ 的最小生成元个数, 故 $\dim_{\kappa(\mathfrak{p})} S_i \underset{R}{\otimes} \kappa(\mathfrak{p}) \geq \dim_K S_i \underset{R}{\otimes} K$. 因此 $\dim S \underset{R}{\otimes} \kappa(\mathfrak{p}) \geq \dim S \underset{R}{\otimes} K =: e$.

于是 $n \leq e \implies G_n(S|R) = \operatorname{Spec}(R)$. 以下可设 $n > e$. 取命题 7.8.4 第二部分的 f. 若 $f \notin \mathfrak{p}$, 则因为 $S_i \underset{R}{\otimes} R[f^{-1}]$ 对所有 i 皆自由, 上一段论证的不等式实为等式, 故 $G_n(S|R) \subset V(f) \subsetneq \operatorname{Spec}(R)$. 后续和定理 7.11.4 证明最后一段类似, 都基于 Noether 递归. □

B.9 分次情形的维数和深度

本节的分次环和分次模均默认为 $\mathbb{Z}$-分次的.

对于分次环 R, 定义–命题 B.4.1 对所有素理想 $\mathfrak{p}$ 定义了分次素理想 $\mathfrak{p}^* \subset \mathfrak{p}$.

引理 B.9.1 对于非零 $\mathbb{Z}$-分次环 R, 以下陈述等价:

(i) R 的非零齐次元均为可逆元;

(ii) R_0 是域, 而且或者 $R = R_0$, 或者 R 同构于以 T 为变元的 Laurent 多项式环 $R_0[T, T^{-1}]$, 要求 T 是其中次数为正的齐次元.

证明 说明 (i) $\implies$ (ii) 即可. 非零环 R_0 的非零元皆可逆, 因此 R_0 是域. 以下不妨设 $R \neq R_0$, 此时存在次数为正的非零齐次元; 取其中次数尽可能小者, 记为 t, 命 $d = \deg(t)$. 相应地有分次 R_0-代数的同态 $\varphi : R_0[T, T^{-1}] \to R$.

首先说明 φ 单. 设 $\varphi(\sum_i a_i T^i) = 0$, 考虑次数知 $a_i t^i = 0$ 对所有 $i \in \mathbb{Z}$ 成立, 因而 t 可逆蕴涵 $a_i = 0$. 至于 φ 的满性, 设 $a \in R_h$. 若 $h = 0$ 则 $a \in \mathrm{im}(\varphi)$. 设 $h \neq 0$, 将其写成 $h = dq + r$, 其中 $0 \leq r < d$, 则 $at^{-q} \in R_r$, 故 t 和 d 的选法蕴涵 $r = 0$. 因此 $a = (at^{-q})t^q \in R_0 t^q \subset \mathrm{im}(\varphi)$. 证毕. □

定理 B.9.2 设 R 为 $\mathbb{Z}_{\geq 0}$-分次 Noether 环, M 是有限生成分次 R-模. 给定 $\mathfrak{p} \in \mathrm{Supp}(M)$, 命 $n = \dim M_{\mathfrak{p}}$.

(i) 若 $\mathfrak{p}$ 是分次素理想, 则存在分次素理想链 $\mathfrak{p}_0 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathfrak{p}_n = \mathfrak{p}$ 使得 $\mathfrak{p}_0 \in \mathrm{Supp}(M)$;

(ii) 若 $\mathfrak{p}$ 非分次素理想, 则 $n = \dim M_{\mathfrak{p}^*} + 1$.

证明 先对 $M = R$ 的特例证明 (ii): 若 R 的素理想 $\mathfrak{p}$ 非分次, 则 $\mathrm{ht}(\mathfrak{p}/\mathfrak{p}^*) = 1$. 为此, 不妨以 $R/\mathfrak{p}^*$ 代 R, 化到 $\mathfrak{p}^* = 0$ 的情形; 此时 R 是整环. 命 U 为所有非零齐次元构成的乘性子集, 则条件 $\mathfrak{p}^* = 0$ 等价于 $U \cap \mathfrak{p} = \varnothing$. 按定义–命题 B.3.2 赋 $R[U^{-1}]$ 以 $\mathbb{Z}$-分次结构, 则 $\mathfrak{p}[U^{-1}]$ 是其非零分次素理想, 引理 B.9.1 遂给出 $R[U^{-1}] \simeq F[T, T^{-1}]$, 其中 F 是域. 综上, $\mathrm{ht}(\mathfrak{p}) = \mathrm{ht}(\mathfrak{p}[U^{-1}]) = 1$.

现在考虑一般情形. 给定 $\mathfrak{p} \in \mathrm{Supp}(M)$. 在 R 中存在满足 $\mathfrak{p}_0 \in \mathrm{Supp}(M)$ 的素理想升链

$$\mathfrak{p}_0 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathfrak{p}_n = \mathfrak{p};$$

如能取到升链使得 $\mathfrak{p}_0, \ldots, \mathfrak{p}_{n-1}$ 皆为分次的, 则当然有 (i), 而且从 $\mathfrak{p}_{n-1} \subset \mathfrak{p}^*$ 也能推得 (ii).

以下对 n 递归地证明. 对于满足 $\mathfrak{p}_0 \in \mathrm{Supp}(M)$ 的素理想升链 $\mathfrak{p}_0 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathfrak{p}_n = \mathfrak{p}$, 由于 $\mathfrak{p}_0$ 必为 $(\mathrm{Supp}(M), \subset)$ 的极小元, 定义–命题 B.4.1 (ii) 确保 $\mathfrak{p}_0$ 为分次的; 这涵盖了 $n \in \{0, 1\}$ 的情形.

对于 $n \geq 2$, 递归条件表明可修改 $\mathfrak{p}_0, \ldots, \mathfrak{p}_{n-2}$ 使之皆为分次的. 若 $\mathfrak{p}$ 非分次, 则可用 $\mathfrak{p}^*$ 代替 $\mathfrak{p}_{n-1}$ 得到所求素理想链, 这是因为 $\mathfrak{p}_{n-2} \subset \mathfrak{p}^* \subsetneq \mathfrak{p}$, 而且第一段证明的 $\mathrm{ht}(\mathfrak{p}/\mathfrak{p}^*) = 1$ 蕴涵 $\mathfrak{p}_{n-2} \neq \mathfrak{p}^*$.

若 $\mathfrak{p}$ 为分次的, 则可取齐次元 $a \in \mathfrak{p} \smallsetminus \mathfrak{p}_{n-2}$, 然后取 $\mathfrak{p}'_{n-1}$ 为包含 $\mathfrak{p}_{n-2} + (a)$ 且包含于 $\mathfrak{p}$ 的极小素理想, $\mathfrak{p}_{n-2} \subsetneq \mathfrak{p}'_{n-1}$. 定义–命题 B.4.1 (ii) 确保 $\mathfrak{p}'_{n-1}$ 为分次的; 此外, $\mathrm{ht}(\mathfrak{p}/\mathfrak{p}_{n-2}) = 2$ 以及 Krull 主理想定理 7.3.1 蕴涵 $\mathfrak{p}'_{n-1} \subsetneq \mathfrak{p}$. 综上, 以 $\mathfrak{p}'_{n-1}$ 代 $\mathfrak{p}_{n-1}$ 给出所求的素理想链. □

定义 B.9.3 设 R 为 Noether 局部环, 记其剩余类域为 κ. 设 M 为有限生成非零 R-模, $d := \mathrm{depth}_{\mathfrak{m}} M \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, 定义

$$r(M) = \dim_\kappa \mathrm{Ext}^d_R(\kappa, M).$$

以上应与定义 9.7.1 和命题 10.4.2 对勘.

引理 B.9.4 设 R_0 为域, 考虑 Laurent 多项式 R_0-代数 $R = R_0[T, T^{-1}]$, 赋 R 以分次结构使得 R_0 为零次部分而 $\deg T \neq 0$, 则分次 R-模皆为自由 R-模.

证明 不妨设 $n := \deg T > 0$. 命 $M_{[h]} = \bigoplus_{k \equiv h \bmod n} M_k$, 则 $M_{[h]}$ 是分次子模而 $M = \bigoplus_{0 \leq h < n} M_{[h]}$. 注意到 R 是 $n\mathbb{Z}$-分次环, $M_{[h]}(-h)$ 是 $n\mathbb{Z}$-分次 R-模而 $n\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}$, 问题遂简化到 $n = 1$ 的情形.

选定 M_0 作为 R_0-向量空间的一组基 $\{x_i\}_{i \in I}$, 则考量次数易见它给出 M 作为 R-模的基, 因此 M 是自由 R-模. □

定理 B.9.5 设 R 为 $\mathbb{Z}_{\geq 0}$-分次 Noether 环, M 是有限生成分次 R-模. 若 $\mathfrak{p} \in \mathrm{Supp}(M)$ 非分次素理想, 则

$$\mathrm{depth}_{\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}} M_{\mathfrak{p}} = \mathrm{depth}_{\mathfrak{p}^* R_{\mathfrak{p}^*}} M_{\mathfrak{p}^*} + 1, \quad r(M_{\mathfrak{p}}) = r(M_{\mathfrak{p}^*}).$$

证明 不妨将 R 和 M 对 $R \smallsetminus \mathfrak{p}$ 中的所有齐次元作局部化, 从而可要求 $R/\mathfrak{p}^*$ 的非零齐次元皆可逆. 这蕴涵 $R/\mathfrak{p}^*$ 或者是域, 或者同构于 $F[T, T^{\pm}]$, 其中 F 是域; 前者与 $\mathfrak{p} \supsetneq \mathfrak{p}^*$ 矛盾, 故后者必成立. 因此存在 $a \in R \smallsetminus \mathfrak{p}^*$ 使得

$$\mathfrak{p} = (a) + \mathfrak{p}^*.$$

采用定义 B.5.6 的符号, 短正合列 $0 \to R/\mathfrak{p}^* \xrightarrow{a} R/\mathfrak{p}^* \to R/\mathfrak{p} \to 0$ 给出 $\mathrm{Ext}^\bullet_R(\cdot, M)$ 的长正合列. 引理 B.9.4 蕴涵分次 $R/\mathfrak{p}^*$-模必自由, 故 a 非 ${}^*\mathrm{Ext}^\bullet_R(R/\mathfrak{p}^*, M) \simeq \mathrm{Ext}^\bullet_R(R/\mathfrak{p}^*, M)$ 的零因子, 由此知

$$\mathrm{Ext}^{i+1}_R(R/\mathfrak{p}, M) \simeq {}^*\mathrm{Ext}^i_R(R/\mathfrak{p}^*, M)/a \cdot {}^*\mathrm{Ext}^i_R(R/\mathfrak{p}^*, M), \quad i \in \mathbb{Z}.$$

上式蕴涵 $\mathrm{Ext}^{i+1}_R(R/\mathfrak{p}, M)$ 是自由 $R/\mathfrak{p}$-模, 与 ${}^*\mathrm{Ext}^i_R(R/\mathfrak{p}^*, M)$ 同秩. 综上,

$$\begin{aligned}\dim_{\kappa(\mathfrak{p})} \mathrm{Ext}^{i+1}_R(\kappa(\mathfrak{p}), M) &= \mathrm{rk}_{R/\mathfrak{p}} \mathrm{Ext}^{i+1}_R(R/\mathfrak{p}, M) \\ &= \mathrm{rk}_{R/\mathfrak{p}^*} {}^*\mathrm{Ext}^i_R(R/\mathfrak{p}^*, M) = \dim_{\kappa(\mathfrak{p}^*)} \mathrm{Ext}^i_R(\kappa(\mathfrak{p}^*), M)\end{aligned}$$

对所有 i 成立. 这足以推得断言. $\square$

B.10 分次 Cohen–Macaulay 模

附录 C Zariski 主定理

参考文献

[1] Arnaud Beauville, Yves Laszlo. “Un lemme de descente”. 刊于: *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* 320.3 (1995), pp. 335–340. ISSN: 0764-4442 (引用于 pp. 205, 212).

[2] N. Bourbaki. *Éléments de mathématique. Algèbre commutative. Chapitres 8 et 9.* Reprint of the 1983 original. Springer, Berlin, 2006, pp. ii+200. ISBN: 978-3-540-33942-7; 3-540-33942-6 (引用于 p. 161).

[3] A. Grothendieck. “Éléments de géométrie algébrique. IV. Étude locale des schémas et des morphismes de schémas. III”. 刊于: *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* 28 (1966), p. 255. ISSN: 0073-8301,1618-1913. URL: http://www.numdam.org/item?id=PMIHES_1966__28__255_0 (引用于 pp. 182, 187).

[4] M. Hochster. “Prime ideal structure in commutative rings”. 刊于: *Trans. Amer. Math. Soc.* 142 (1969), pp. 43–60. ISSN: 0002-9947,1088-6850. DOI: 10.2307/1995344 (引用于 pp. 293, 294).

[5] The Stacks Project Authors. *Stacks Project*. https://stacks.math.columbia.edu. 2020 (引用于 pp. 181, 182, 184, 187, 205, 294).

[6] 姚宁远. 初等模型论. 逻辑与形而上学教科书系. 上海: 复旦大学出版社, 2018. ISBN: 978-7-309-14019-4 (引用于 p. 86).

[7] 李文威. 代数学方法（第一卷）. Vol. 67.1. 现代数学基础丛书. 北京: 高等教育出版社, 2019. ISBN: 978-7-04-050725-6 (引用于 pp. 1–13, 15, 16, 18, 22, 23, 25, 27, 29, 34, 35, 38, 41, 58, 62, 65, 66, 68, 78, 87, 88, 90, 111–115, 120, 127, 133, 138, 141, 144, 147–149, 151, 152, 156, 157, 167, 172, 175, 178, 189–191, 204, 207, 211, 218, 220, 222, 231, 266, 273, 275, 285, 302).

[8] 李文威. 代数学方法（第二卷）. Vol. 67.2. 现代数学基础丛书. 北京: 高等教育出版社, 2024. ISBN: 978-7-04-062754-1 (引用于 pp. 3, 8–13, 16, 17, 28, 65, 66, 78, 87, 89, 94, 112, 115, 117–119, 124–126, 139, 191, 194, 211, 215–218, 222, 225, 226, 232–234, 242, 266, 310).

[9] 李文威. 代数学讲义. 2024. URL: https://www.wwli.asia/downloads/books/EAlg-Notes.pdf (引用于 pp. 3, 167, 224, 252, 301, 303, 304, 309).

符号索引

名词索引暨英译

中文术语按汉语拼音排序.