# 源于青年之梦的若干当代问题

Robert P. Langlands

译者: 李文威 (中国科学院数学与系统科学研究院)

**原 文:** R. P. Langlands, **Some contemporary problems with origins in the Jugendtraum**. *Mathematical developments arising from Hilbert problems (Proc. Sympos. Pure Math., Vol. XXVIII, Northern Illinois Univ., De Kalb, Ill., 1974)*, pp. 401–418. *Amer. Math. Soc., Providence, R. I.*, 1976. MR0437500 (55 #10426). http://publications.ias.edu/sites/default/files/jugend-ps.pdf.

Hilbert 第 12 问题提醒我们以下三个主题之间的血缘关系, 尽管这个提醒应该是多余的. 一是类域论或者数域的 Abel 扩张理论, 这在本世纪初便达到了近乎完成的形式. 二是椭圆曲线或者更广泛的 Abel 簇的代数理论, 五十年来一直是一个恢宏茁壮的研究方向. 第三则是自守函数理论, 它成熟较慢, 而且仍紧密交缠于 Abel 簇的研究, 特别是其模空间的研究. 三者后来经历的发展经常是分离的.

当然, 这些主题在 Hilbert 的时代才刚从数学全景中分化为个别的理论, 而在 Kronecker 的时代, 它们仅仅是椭圆模函数与分圆域理论的附庸. 青年之梦 (*Jugendtraum*) 一词见于 Kronecker 在 1880 年写给 Dedekind 的一封信[1], 其中阐述了他联系虚二次域的 Abel 扩张和带复乘椭圆曲线的工作. 由于这些主题交织得如此紧密, 在当时要区隔青年之梦涉及的种种数学几无可能, 尤其是要区隔其中的代数面向和分析或数论面向. 或因如此, Hilbert 才会将历史进程中的一个偶然, 兴许也是个必然, 误作是 “最紧密的交互联系” (*innigste gegenseitige Berührung*). 倘若我们试着采取一位老于世故的当代数学家的视角, 来观照青年之梦的数学内容, 对此或能有更允当的判断.

域 $k$ 上的椭圆曲线是某个射影空间 $\mathbf{P}^n$ 中由方程

$$g_i(x_0, \ldots, x_n) = 0$$

定义的一条曲线 $A$, 连同一个从 $A \times A$ 到 $A$ 的有理映射

$$z_j = f_j(x_0, \ldots, x_n; y_0, \ldots, y_n)$$

[1] Gesammelte Werke, Bd V.

使得 $A$ 的点集成为群. 粗略地说—必须正视这个副词—任意交换环 $R$ 上的椭圆曲线的定义相同, 但 $f_i$ 和 $g_j$ 的系数须取自 $R$, 这里皆假设 $R$ 是 Noether 环. 如果有一条 $B_1$ 上的椭圆曲线及同态 $\varphi : B_1 \to B_2$, 那么将 $f_i$ 和 $g_j$ 的系数用它们在 $\varphi$ 下的像取代, 便得到 $B_2$ 上的椭圆曲线. 借此, 交换 Noether 环 $B$ 上的椭圆曲线的同构类集 $\mathscr{A}(B)$ 给出这些环所成范畴上的共变函子.

在复乘理论里我们引入一个子函子. 取 $E$ 为虚二次域并令 $O$ 为 $E$ 中的整数环. 现在我们仅感兴趣于环 $B$ 配上同态 $\psi : O \to B$ 以及使得图表

$$\begin{tikzcd} & O \arrow[dl, "\psi_1"'] \arrow[dr, "\psi_2"] & \\ B_1 \arrow[rr] & & B_2 \end{tikzcd}$$

交换的映射 $B_1 \to B_2$. 在 $B$ 上的椭圆曲线在零点的切空间 $T(A)$ 是 $B$-模. 我们感兴趣的是 $B$ 上的 Abel 簇 $A$, 连同 $O$ 的元素在 $A$ 上通过自同态的作用, 使得 $x \in O$ 在 $T(A)$ 上的作用正是乘以 $\psi(x)$. 这给出了新的函子 $B \to \mathscr{A}^O(B)$. 若 $n$ 为正整数而且仅考虑使 $n$ 在其中可逆的环 $B$, 则可以进一步细化. 可令 $A_n(B)$ 为 $A$ 中系数在 $B$ 而且阶整除 $n$ 的点, 并作为额外资料引入一个 $O$-模的同构

$$\lambda : O/nO \to A_n(B)$$

这就定义了一个新函子 $B \to \mathscr{A}_n^O(B)$.

利用当代代数几何的方法 (笔者所知尚浅) 可以证明对此函子存在一个泛对象. 这是一个环 $B_n$, 同态 $O \to B_n$, 环 $B_n$ 上的 Abel 簇 $A'$, 一个 $O$ 在 $A'$ 上的作用及一同构

$$\lambda' : O/nO \to A'_n(B_n)$$

使之满足前述各条件, 并使得对任意 $B$, 任一 $\mathscr{A}_n^O(B)$ 中元素都可透过函子性由 $A'$, $\lambda'$ 和一个唯一确定的同态 $B_n \to B$ 得到. 这对于小的 $n$ 不尽正确, 然而通过一些技术考量即可处理, 不在话下.

这些办法不但建立了 $B_n$ 的存在性, 还能从函子 $\mathscr{A}_n^O$, 亦即环上的椭圆曲线的性质读出环 $B_n$ 的性质. 例如光滑性的概念, 或者用数论语言说是无分歧性, 便能翻译为可形变性的概念. 人们对椭圆曲线和 Abel 簇的形变理论已经有充分理解, 而且可以证明 $F_n = B_n \otimes_O E$ 是有限直和 $\bigoplus E_i$, 其中 $E_i$ 是 $E$ 的有限代数扩张, 在整除 $n$ 的素数之外非分歧, 而且若以 $O_i$ 表 $E_i$ 的整数环, 那么 $B_n$ 作为 $F_n$ 的子环等于

$$\bigoplus O_i\left[\frac{1}{n}\right]$$

在此 $O_i[\frac{1}{n}]$ 是 $E$ 中由 $O_i$ 和 $\frac{1}{n}$ 生成的子环.

若我们将 $E$ 嵌入 $\overline{\mathbf{Q}} \subset \mathbf{C}$, 则代数 $F_n$ 被 $\mathfrak{G}(\overline{\mathbf{Q}}/E)$ 在从它到 $\mathbf{C}$ 的 $E$-同态集上的作用所确定, 后者即 $\mathscr{A}_n^O(\overline{\mathbf{Q}}) = \mathscr{A}_n^O(\mathbf{C})$. 若作用可迁则此代数为域. 在研究 $F_n$ 之前我们先引入一些它的自同构. 这些是由将这个函子暂时限制到使每个正整数都可逆的环上, 再取自同构所定义的. 这意谓以 $F_n$ 代替 $B_n$.

令 $I_f$ 为无穷位的分量为 1 的 $E$ 的全体 idèle. 我们可将 $E^\times$ 嵌入 $I_f$. 下面要定义 $I_f$ 在函子 $\mathscr{A}_n^O$ 上的作用. 令 $O_f$ 为处处整并且无穷位分量为 1 的 adèle 环. 先假设 $g \in I_f \cap O_f$. 存在正整数 $m$ 和 $h \in I_f \cap O_f$ 使得 $gh = m$. 假设 $\{A, \lambda\} \in \mathscr{A}_n^O(B)$ 给定. 存在 $B$ 的扩张 $B'$ 以及 (层的!) 同构

$$\lambda' : O/n'O \to A_{n'}(B)$$

使得

$$m\lambda'(x) = \lambda(x).$$

$g$ 作用于 $O/n'O$, 而且我们借由除以

$$\{\lambda'(gx) \mid x \in nO\}$$

定义一条新的椭圆曲线 $A_1$. 存在同源 $\psi : A \to A_1$ 以上式为核, 我们定义 $\lambda_1$ 为

$$\lambda_1(x) = \psi(\lambda'(gx)).$$

事实上, $\{A_1, \lambda_1\}$ 定义了 $\mathscr{A}_n^O(B)$ 的一个元素. $g$ 的作用将 $A, \lambda$ 映至 $A_1, \lambda_1$. 由于 $O$ 中元素的作用易见是平凡的, 我们可以将此作用延拓到 $I_f$, 办法是让 $\ell g$ 的作用等于 $g$ 的作用, 其中 $\ell$ 是正整数.

容易用显式写出在 $\mathscr{A}_n^O(\mathbf{C})$ 上的作用. 若 $g \in I_f$, 令 $gO$ 为理想 $gO_f \cap E$. 我们业已将 $E$ 嵌入 $\mathbf{C}$, 而 $\mathbf{C}$ 对 $gO$ 的商是一条带 $O$ 作用的椭圆曲线 $A^g$. 进一步,

$$A_n^g(\mathbf{C}) = \frac{gO}{n} \Big/ gO.$$

若将 $O/nO$ 视为 $O_f/nO_f$, 可以定义 $\lambda^g$ 为

$$x \to \frac{gx}{n}.$$

置

$$K^n = \left\{k \in I_f \mid k \equiv k^{-1} \equiv 1 \pmod{n}\right\}$$

则 $A^g, \lambda^g$ 同构于 $A^h, \lambda^h$ 当且仅当

$$h \in E^\times g K^n$$

于是 $\mathscr{A}_n^O(\mathbf{C})$ 作为集合正是商空间 $E^\times \backslash I_f / K^n$, 而 $I_f$ 在商空间上的作用是显然的.

根据函子性, $\mathfrak{G}(\overline{\mathbf{Q}}/E)$ 和 $I_f$ 在 $\mathscr{A}_n^O(\overline{\mathbf{Q}}) = \mathscr{A}_n^O(\mathbf{C})$ 上的作用相交换, 因此存在唯一的从 $\mathfrak{G}(\overline{\mathbf{Q}}/E)$ 到 $E^\times \backslash I_f / K^n$ 的同态 $\sigma \to \varphi(\sigma)$, 使得 $\sigma$ 和 $\varphi(\sigma)$ 的作用相同. 特别地, 由此可知 $\mathfrak{G}(\overline{\mathbf{Q}}/E)$ 透过一个 Abel 商而作用. 要了解同态 $\sigma \to \varphi(\sigma)$, 仅须在当 $\sigma$ 是 $E$ 中素理想 $\mathfrak{p}$ 处的 Frobenius , 而且 $\mathfrak{p}$ 不整除 $n$ 时辨识 $\varphi(\sigma)$.

令 $E_\mathfrak{p}$ 为 $E$ 对 $\mathfrak{p}$ 的完备化, $\overline{E}_\mathfrak{p}$ 为 $E_\mathfrak{p}$ 的一个代数闭包, 而 $\overline{O}_\mathfrak{p}$ 为 $\overline{E}_\mathfrak{p}$ 中的整数环. 固定一个嵌入 $\overline{\mathbf{Q}} \hookrightarrow \overline{E}_\mathfrak{p}$.

$$\mathscr{A}_n^O(\overline{\mathbf{Q}}) \xrightarrow{\sim} \mathscr{A}_n^O(\overline{E}_\mathfrak{p}) = \mathrm{Hom}_O(B_n, \overline{E}_\mathfrak{p}) = \mathrm{Hom}_O(B_n, \overline{O}_\mathfrak{p}).$$

由于 $B_n$ 在 $\mathfrak{p}$ 非分岐, 记 $O$ 在 $\mathfrak{p}$ 处的剩余域 $\kappa_\mathfrak{p}$ 的代数闭包为 $\overline{\kappa}_\mathfrak{p}$, 我们可利用映射 $\overline{O}_\mathfrak{p} \to \overline{\kappa}_\mathfrak{p}$ 得到

$$\mathrm{Hom}_O(B_n, \overline{O}_\mathfrak{p}) \simeq \mathrm{Hom}_O(B_n, \overline{\kappa}_\mathfrak{p}) = \mathscr{A}_n^O(\overline{\kappa}_\mathfrak{p}).$$

这些同构都不影响 Frobenius 的作用. 因为 $p$ 在 $\overline{\kappa}_\mathfrak{p}$ 中不可逆, 群 $I_f$ 不再作用, 至少方式不同以往. 然而由在无穷位和 $p$ 处等于 1 的 idèle 构成的群 $I_f^p$ 仍有作用, 因为对这些 idèle, 辅助整数 $m$ 可取成与 $p$ 互素, 特征 $p$ 时 $p$-可除点的反常行为带来的困难于焉消失. 其实基于眼下的简单情况, 不难为 $I_f$ 的遗漏部分 $I_p$, 亦即 $O \otimes \mathbf{Q}_p$ 的乘法群定义一个作用. 然而我们想避免一切特设的技巧. 这里需要的是对于特征 $p$ 的域上的椭圆曲线, 在概型论意义下了解由其 $p$-幂阶点构成的有限子群. 一般的方法是 Dieudonné 模的理论. 我这里不给出其定义. 它是一个函子地系于 $A$ 的模 $D(A)$, 此时 $I_p$ 的作用被 $D(A) \otimes \mathbf{Q}$ 的 $O$-自同构群的作用取代. 在我们处理的特殊情形下, 这个群被证明是 $I_p$, 于是 $I_f$ 依然作用. 进一步, $E^\times$ 和 $K^n$ 的作用仍是平凡的. 由于 $I_f$ 由 $E^\times, I_f^p$ 和 $K^n$ 所生成, 其作用与上面引入的集合间同构相匹配.

若 $\varpi$ 是 $O_\mathfrak{p}$ 的极大理想的生成元, 则 $\varpi \in E_\mathfrak{p}^\times \subset I_p$. Dieudonné 模的理论在手, 立见 $\varpi$ 在 $\mathscr{A}_n^O(\overline{\kappa}_\mathfrak{p})$ 上的作用等于 Frobenius 作用. 因此 $F_n$ 为域, 而且它作为 $E$ 的 Abel 扩张, 在类域论下对应到 $E^\times I_\infty K^n \subset I$. 此外, 类域论给出的同态

$$\mathfrak{G}(\overline{\mathbf{Q}}/E) \to \mathfrak{G}(F_n/E) \simeq I/E^\times I_\infty K^n \simeq I_f/E^\times K^n$$

正是 $\sigma \to \varphi(\sigma)$. 至此我们没用上任何实算术, 出场的仅是有限域的算术. 然而青年之梦的要点之一在于 $E$ 的所有 Abel 扩张皆包含于某个 $F_n$. 为此我们诉诸类域论.

但是椭圆模函数还未现身. 令 $V(\mathbf{Z})$ 为 $\mathbf{Z}$ 上长度为 2 的列向量构成的模. 可考虑将

$B$ 映到全体同构

$$\lambda : V(\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}) \to A_n(B)$$

集的函子. 此函子也由一个环 $J_n$ 上的泛对象表示. 固定一个同构

$$O \simeq V(\mathbf{Z})$$

并遗忘 $O$ 作用便得到态射 $\mathcal{A}_n^O \to \mathcal{A}_n$, 这给出同态 $\eta : J_n \to B$. 若在 $E$ 上作嵌入 $B_n \to \mathbf{C}$, 那么其像当然如上述般生成一个类域. 合成此嵌入与 $\eta$ 遂给出从 $J_n$ 或 $J_n \otimes \mathbf{C}$ 到 $\mathbf{C}$ 的一个同态.

$J_n \otimes \mathbf{C}$ 是一个 $\mathbf{C}$ 上代数簇 $S_n$ 的有理函数环, $S_n$ 的点给出从 $J_n$ 到 $\mathbf{C}$ 的同态, 亦即 $\mathcal{A}_n(\mathbf{C})$ 的元素. 特别地, 为得到 $\psi$ 我们必须对 $J_n$ 的元素在 $S_n(\mathbf{C})$ 的某点求值. 至少就解析观点, 有一套更具体的方式来看待 $S_n(\mathbf{C})$, 因而亦可用于 $J_n \otimes \mathbf{C}$. 令 $G$ 为群 $\mathrm{GL}(2)$. 令 $J_0$ 为矩阵

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

若 $g = (g_\infty, g_f)$ 属于 $G(\mathbf{A})$, 其中 $g_\infty \in G(\mathbf{R})$ 而 $g_f \in G(\mathbf{A}_f)$, 我们置

$$g_f V(\mathbf{Z}) = g_f V(\mathbf{Z}_f) \cap V(\mathbf{Q}).$$

这里 $\mathbf{Z}_f$ 是 $\mathbf{Z}$ 在 $\mathbf{A}_f$ 中的闭包, 而 $V(\mathbf{Z}_f) = V(\mathbf{Z}) \otimes \mathbf{Z}_f$. 因此 $g_f V(\mathbf{Z})$ 是 $V(\mathbf{R})$ 中的格. 令 $J = g_\infty J_0 g_\infty^{-1}$. 我们用 $J$ 定义乘以 $\sqrt{-1}$, 从而将 $V(\mathbf{R})$ 变为 $\mathbf{C}$ 上的一维空间. 那么

$$V(\mathbf{R})/g_f V(\mathbf{Z})$$

是 $\mathbf{C}$ 上的椭圆曲线 $A^g$. 此外

$$A_n^g(\mathbf{C}) = \frac{g_f V(\mathbf{Z})}{n} \Big/ g_f V(\mathbf{Z})$$

故可取 $\lambda^g$ 为

$$x \to \frac{g_f x}{n}.$$

$\{A^g, \lambda^g\}$ 的同构类完全由 $g$ 在双陪集空间

$$G(\mathbf{Q}) \backslash G(\mathbf{A}) / K_\infty K^n$$

中的像确定, 其中 $K_\infty$ 是 $J_0$ 在 $G(\mathbf{R})$ 里的中心化子, 而 $K^n$ 是

$$\{k \in G(\mathbf{Z}_f) \mid k \equiv 1 \pmod{n}\}.$$

此双陪集空间具有自然的复结构, 以下可视同 $S_n(\mathbf{C}) = \mathscr{A}_n(\mathbf{C})$.

仔细分析这些双陪集, 可见 $S_n(\mathbf{C})$ 由有限多个连通分支组成, 每一片都是 Poincaré 半平面对某个同余子群的商. 而 $J_n \otimes \mathbf{C}$, 包括 $J_n$ 里的元素则是这些连通分支上的函数, 它们实则正是水平为 $n$ 的椭圆模函数. 易用显式找出 $S_n(\mathbf{C})$ 中对应到上述同态 $\psi$ 的点. 综上, 我们推得 $J_n$ 里的椭圆模函数在

$$G(\mathbf{Q})\backslash G(\mathbf{A})/K_\infty K^n$$

上某些容易求得的点上取值能够生成类域 $F_n$. 如前所述, 此空间的每个连通分支都是 Poincaré 半平面对同余子群的商. 将 $J_n$ 里的函数拉回半平面就得到超越函数.

Hilbert 在第 12 问题中强调了以超越函数的值生成类域的这一面向, 他也建议对任意数域寻找具备类似性质的超越函数. 无论公平与否, 第 12 问题迄今仍颇受冷落. 所有相关进展都源于针对另一目的之无心插柳, 尽管后者也可以溯源到青年之梦. 这些主要是志村五郎的研究.

二十世纪数论的一个特征是 $\zeta$-函数与 $L$-函数的统治地位, 在猜想层面上尤然. 对于和数域上的代数簇相系的 $L$-函数, 其解析性质的确定格外困难, 甚至往往是不可能的. 然而志村五郎业已对某些簇进行了极深入的研究, 一如由椭圆模函数定义的簇, 这些簇与代数群密切相关. 基于种种原因, 我们期望这些志村簇的 $L$-函数可以由定义该簇的群或者其它相关群上自守形式的 $L$-函数表达. 这本身固不足以建立所求的解析性质, 却是第一步. 受 Eichler 早先的工作启发, 志村五郎得以对一些志村簇验证这个期望, 处理的基本是曲线情形.

然而还遗留着许多问题. 我想在本讲剩下的部分随意谈谈其中之一. 关于互反律有种种概念, 全都隐含于类域论. 举例明之, 一个定理若断言由 Diophantus 资料, 亦即数域上代数簇所定义的一个 $L$-函数等于一个由解析资料, 亦即自守形式所定义的 $L$-函数, 则可视为一种互反律. 这观点有其道理, 因为 Artin 互反律即是这种断言. Eichler 和志村五郎的结果也具有这般形式. 不过还有一个更具体的概念可资运用.

假设有个定义在数域 $E$ 上的代数簇 $S$. 假定其方程组的系数取定, 使之在某个有限素数集 $Q$ 外皆为整. 若 $\mathfrak{p} \notin Q$ 而 $\kappa_\mathfrak{p}$ 表 $E$ 在 $\mathfrak{p}$ 的剩余域, 则我们可对方程组作模 $\mathfrak{p}$ 约化, 继而谈论 $S$ 中系数属于 $\overline{\kappa}_\mathfrak{p}$ 的点集 $S(\overline{\kappa}_\mathfrak{p})$, 它带有 Frobenius $\Phi_\mathfrak{p}$ 的作用. 对集合 $S(\overline{\kappa}_\mathfrak{p})$ 连同 $\mathfrak{p} \notin Q$ 时所有 $\Phi_\mathfrak{p}$ 作用的显式描述亦可视作一种互反律. 例如在 $E = \mathbf{Q}$ 而 $S$ 由方程

$$x^2 + 1 = 0$$

定义的情形, 当 $p \neq 2$ 时集合 $S(\overline{\kappa}_p)$ 有两个元素, $\Phi_p$ 作用平凡与否取决于 $p \equiv 1$ 或 $p \equiv 3 \pmod 4$. 这是二次互反律的第一个补充.

志村簇很可能也有这般意义下的互反律. 我想明确描述互反律最可能采取的形式. 这

描述诚然只是猜测，但是在我所掌握的技巧限度内，我业已验证了当志村簇来自 Abel 簇模问题的解时的情形.

为了了解一个簇的 $\zeta$-函数，至少在了解其 Euler 积对几乎所有 $\mathfrak{p}$ 的因子的意义下，我们仅须对每个正 $n$ 了解 $S(\kappa_{\mathfrak{p}}^{n})$ 的基数，这里 $\kappa_{\mathfrak{p}}^{n}$ 是 $\kappa_{\mathfrak{p}}$ 的 $n$ 次扩张. 这无非是 $\Phi_{\mathfrak{p}}^{n}$ 在 $S(\overline{\kappa}_{\mathfrak{p}})$ 中的不动点数目. 或许能期望这能由 $S(\overline{\kappa}_{\mathfrak{p}})$ 和 $\Phi_{\mathfrak{p}}$ 作用的显式描述来确定；是故由志村簇在第二种意义下的互反律出发，至少就其 $\zeta$-函数而论，我们能得到第一种意义下的互反律. 然而这会涉及一些组合学难题，迄今仍无严肃的探究. 但我在若干情形下已能跨越这道门坎，包括任意高维数的情形.

Deligne[2] 对志村五郎工作的阐述格外透彻，兼有他自己的改进. 从一个 $\mathbf{Q}$ 上的约化代数群 $G$ 和一个定义在 $\mathbf{C}$ 上的同态 $h_0 : \mathrm{GL}(1) \to G$ 出发. 资料 $(G, h_0)$ 须满足一些简单的形式条件. 若令 $R$ 表示从 $\mathbf{C}$ 上的 $\mathrm{GL}(1)$ 作纯量限制所得到的 $\mathbf{R}$ 上环面，使得在 $\mathbf{C}$ 上有

$$R \simeq \mathrm{GL}(1) \times \mathrm{GL}(1)$$

则合成

$$h : R \xrightarrow{\sim} \mathrm{GL}(1) \times \mathrm{GL}(1) \to G$$

是定义在 $\mathbf{R}$ 上的同态，此处第二个映射是 $(x, y) \to h_0(x)^{\rho} h_0(y)$，其中 $\rho$ 表复共轭. 我们要求 $h(\mathbf{R})$ 在 $G_{\mathrm{der}}(\mathbf{R})$ 里的中心化子是 $G_{\mathrm{der}}(\mathbf{R})$ 的极大紧子群，而且若以 $K_\infty$ 代表 $h(\mathbf{R})$ 在 $G_{\mathrm{der}}(\mathbf{R})$ 里的中心化子，则商 $G_{\mathrm{der}}(\mathbf{R})/K_\infty$ 还必须带有一个 $h_0$ 给出的不变复结构.

事实上要紧的不是 $h_0$ 而是全体 $\mathrm{ad}(g) \circ h_0$，其中 $g \in G(\mathbf{R})$. 若 $T$ 是 $G$ 中定义在 $\mathbf{Q}$ 上并使得 $T(\mathbf{R}) \cap G_{\mathrm{der}}(\mathbf{R})$ 为紧的 Cartan 子群，则可选取 $h_0' = \mathrm{ad}(g) \circ h_0$ 使之通过 $T$ 分解. 然后用 $\hat{\mu}$ 表示 $h_0' : \mathrm{GL}(1) \to G$，这是 $T$ 的一个余权. 全体满足 $\sigma\hat{\mu} = \omega\hat{\mu}$ 的 $\sigma \in \mathfrak{G}(\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q})$ 的固定域记为 $E$，其中 $\omega$ 取遍 $T$ 的 Weyl 群. 域 $E$ 是 $\mathbf{Q}$ 在 $\mathbf{C}$ 中的有限扩张，它在志村簇的研究中扮演要角.

若 $K$ 是 $G(\mathbf{A}_f)$ 的紧开子群，则复流形

$$S_K(\mathbf{C}) = G(\mathbf{Q}) \backslash G(\mathbf{A}) / K_\infty K$$

是一个 $\mathbf{C}$ 上代数簇的复点集. 志村五郎曾经犹疑地猜测过，而 Deligne 则是公开地猜想这族代数簇应当有 $E$ 上的模型. 精确的猜想还要求 $S_K$ 的某些进一步性质以刻画唯一性. 这些性质以青春之梦为蓝本；是故任何关于这些典范模型 $S_K$ 的存在性之证明都隐含了第 12 问题的部分解答. 此猜想俗称志村猜想，对许多群已经解决，但离一般情形还差得远. 我的建议将只对满足志村猜想的群才有意义.

[2]Séminaire Bourbaki, 1970/71

群 $G(\mathbf{A}_f)$ 作用于

$$\varprojlim_K S_K(\mathbf{C}).$$

它应当反映于 $G(\mathbf{A}_f)$ 在定义于 $E$ 上的

$$\varprojlim_K S_K$$

的一个作用.

取定 $E$ 的素数 $\mathfrak{p}$ 并设 $p$ 为 $\mathbf{Q}$ 中被它整除的素数. 我当假设群 $G$ 在 $\mathbf{Q}_p$ 上拟分裂而在一个非分歧扩张上分裂. 回忆到 $G_{\mathrm{sc}}$ 代表导出群 $G_{\mathrm{der}}$ 的单连通形式, Bruhat 与 Tits 给出了与 $G_{\mathrm{sc}}(\mathbf{Q}_p)$ 相应的厦, $G(\mathbf{Q}_p)$ 作用其上. 一个 $G(\mathbf{Q}_p)$ 的特殊紧子群是 Bruhat–Tits 厦的一个特殊顶点对 $G(\mathbf{Q}_p)$ 的稳定化子与

$$\{g \in G(\mathbf{Q}_p) \mid \text{对所有定义于 } \mathbf{Q}_p \text{ 上的 } G \text{ 的有理特征标 } \chi,\ |\chi(g)| = 1\}$$

之交. 我们只关心如下形式的 $K$

$$K = K^p K_p$$

其中 $K^p \subset G(\mathbf{A}_f^p)$ 而 $K_p$ 是 $G(\mathbf{Q}_p)$ 的特殊极大紧子群.

簇 $S_K$ 既然定义在 $E$ 上, 便也定义在 $E_\mathfrak{p}$ 上. 设 $O_\mathfrak{p}$ 为 $E_\mathfrak{p}$ 的整数环. 要谈论 $S_K(\bar{\kappa}_\mathfrak{p})$ 必得有 $O_\mathfrak{p}$ 上的模型. 目前我还不知该如何刻画. 当 $S_K/E$ 固有且光滑时, 大概 $S_K/O_\mathfrak{p}$ 亦然. 但是当 $S_K/E$ 非固有时, 对无穷远处的性状必须多费心思. 现在我且无视这个困难, 径直描述期望中 $S_K(\bar{\kappa}_\mathfrak{p})$ 的结构. 仅须考虑

$$\varprojlim_{K^p} S_K(\bar{\kappa}_\mathfrak{p}) = S_{K_p}(\bar{\kappa}_\mathfrak{p})$$

的结构, 前提是我们知道 $G(\mathbf{A}_f^p)$ 如何作用于右项, 这是由于

$$S_K(\bar{\kappa}_\mathfrak{p}) = S_{K_p}(\bar{\kappa}_\mathfrak{p})/K^p.$$

集合 $S_{K_p}(\bar{\kappa}_\mathfrak{p})$ 应该是某些对 $G(\mathbf{A}_f^p)$ 和 $\Phi = \Phi_\mathfrak{p}$ 不变的子集之并. 每个子集都从下列资料构造:

(i) 一个 $\mathbf{Q}$ 上的群 $H$ 及嵌入 $H(\mathbf{A}_f^p) \hookrightarrow G(\mathbf{A}_f^p)$;

(ii) 一个 $\mathbf{Q}_p$ 上的群 $\overline{G}$ 及嵌入 $H(\mathbf{Q}_p) \hookrightarrow \overline{G}(\mathbf{Q}_p)$;

(iii) 具有 $\overline{G}(\mathbf{Q}_p)$ 和 $\Phi$ 作用的空间 $X$, 两作用彼此交换.

嵌入 $H(\mathbf{A}_f^p) \hookrightarrow G(\mathbf{A}_f^p)$ 和 $H(\mathbf{Q}_p) \hookrightarrow \overline{G}(\mathbf{Q}_p)$ 一旦同对角嵌入 $H(\mathbf{Q}) \hookrightarrow H(\mathbf{A}_f)$ 合

成, 就给出 $H(\mathbf{Q})$ 在 $G(\mathbf{A}_f^p)\times X$ 上的作用. 我提过的子集具如下形式

$$Y = H(\mathbf{Q})\backslash G(\mathbf{A}_f^p)\times X.$$

$G(\mathbf{A}_f^p)$ 以显然方式作用于右侧, 而 $\Phi$ 通过它在 $X$ 上的作用而作用.

在大胆规定 $H, G$ 和 $X$ 的一般选取之前, 为熟悉状况计, 我们应当先速览 $G = \mathrm{GL}(2)$, $h$ 为

$$(a+ib, a-ib) \to \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}, \quad a, b \in \mathbf{C},\ a^2+b^2 \neq 0$$

的情形. 便于记忆起见, 我采用的符号与 Deligne 稍异, 我的 $h$ 是他的逆. 对于这对 $G, H$, 对每个 $\mathbf{Q}$ 的虚二次扩张 $F$ 都存在一个子集, $H$ 是从 $F$ 以通常方式构作的 $\mathbf{Q}$ 上的群 $E^*$, 使得 $H(\mathbf{Q}) = F^\times$, 群 $\overline{G}$ 也是 $H$, 而 $X$ 是 $H(\mathbf{Q}_\mathfrak{p}) = (E\otimes\mathbf{Q}_p)^\times = \mathbf{Q}_p^\times\times\mathbf{Q}_p^\times$ 对单位子群 $H(\mathbf{Z}_p) = \mathbf{Z}_p^\times\times\mathbf{Z}_p^\times$ 之商. 若 $\mathfrak{p}$ 是 $p$ 在 $E$ 中的素因子之一, 而 $\varpi$ 是相应的一致化参数, 则 $\Phi$ 是 $\varpi \in (E\otimes\mathbf{Q}_p)^\times$ 的乘法作用. 还有一个额外的子集. 对此, 取 $H$ 为 $\mathbf{Q}$ 上除在无穷位和 $p$ 之外到处分裂的四元数代数的乘法群, 取 $\overline{G}$ 为 $H$. 取 $X$ 为商 $\overline{G}(\mathbf{Q}_p)/\overline{G}(\mathbf{Z}_p)$, 这里 $\overline{G}(\mathbf{Z}_p)$ 是该代数对 $p$ 作完备化再取极大序所得到的乘法群. 在此序中任取生成极大理想的 $\varpi$, 则 $\Phi$ 就是乘以 $\varpi$.

对于最后一个子集中的 $X$ 还有另一套描述, 有助于进一步洞察一般的情形. 令 $\mathfrak{k}$ 为 $\mathbf{Q}_p$ 的极大非分岐扩张的完备化, 而 $\mathfrak{o}$ 表其整数环. 记 Frobenius 作用为 $a \to {}^\sigma a$. 令 $\mathscr{H}$ 为 $\mathfrak{k}$ 上长度 2 的列向量空间里的 $\mathfrak{o}$-格集. $\mathscr{H}$ 是 $G(\mathfrak{k})$ 的 Bruhat–Tits 厦的顶点集. 置

$$b = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ p & 0 \end{pmatrix}.$$

定义 $\Phi$ 在 $\mathscr{H}$ 上的作用为

$$\Phi\mathfrak{x} = b^\sigma\mathfrak{x}.$$

则

$$\overline{G}(\mathbf{Q}_p) = \{g \in G(\mathfrak{k}) \mid b^\sigma g b^{-1} = g\}$$

而 $X$ 是 $\mathscr{H}$ 中全体满足下式的 $\mathfrak{x}$ 所成集合

$$p\mathfrak{x} \subsetneq \Phi\mathfrak{x} \subsetneq \mathfrak{x}.$$

几何上, 这意谓 $\mathfrak{x}$ 和 $\Phi\mathfrak{x}$ 在 $G_{\mathrm{sc}}(\mathfrak{k}) = \mathrm{SL}(2,\mathfrak{k})$ 的 Bruhat–Tits 厦里的像由一条边相连. 为了验证 $X$ 的两套描述本质无异, 我们利用 Bruhat–Tits 厦是树的这一性质. 这是个有趣的练习.

为了定义一般情形的 $H, \overline{G}$ 和 $X$, 我们固定 $\overline{\mathbf{Q}} \hookrightarrow \mathbf{C}$, 并在今后取定一个嵌入 $\overline{\mathbf{Q}} \hookrightarrow \overline{\mathbf{Q}}_p$

使其在 $E$ 中定义的素理想为 $\mathfrak{p}$. 假设 $\gamma \in G(\mathbf{Q})$ 并且是半单的. 进一步假设 $\gamma$ 的特征值在无穷位和 $p$ 之外的绝对值皆为 1. 令

$$H^\circ = \{g \in G \mid \text{对某个 } \mathbf{Z} \text{ 中 } m \neq 0 \text{ 有 } g\gamma^m = \gamma^m g\}.$$

群 $H^\circ$ 连通, 而且它当然是定义在 $\mathbf{Q}$ 上的. 假设 $h^\circ : R \to H^\circ$ 并且合成

$$R \xrightarrow{h^\circ} H^\circ \hookrightarrow G$$

在 $G(\mathbf{R})$ 下共轭于 $h$. 如果 $T$ 是 $H^\circ$ 中定义在 $\mathbf{Q}$ 上并使得 $T(\mathbf{R}) \cap G_{\mathrm{der}}(\mathbf{R})$ 为紧的 Cartan 子群, 那么和先前一样, 必要时以 $\mathrm{ad}(g) \circ h^\circ$ 代 $h^\circ, g \in H^\circ(\mathbf{R})$, 可以假设 $h^\circ$ 通过 $T$ 分解. 相应的

$$h_0^\circ : \mathrm{GL}(1) \to T$$

是 $T$ 的余权 $\hat{\mu}$. 虽然 $\hat{\mu}$ 不由 $h^\circ$ 唯一确定, 但它在 $T$ 对 $H^\circ$ 的 Weyl 群作用下的轨道则是; 这对于下面的讨论已经足够.

若 $L(T)$ 是 $\mathbf{Z}$-模

$$\mathrm{Hom}(T, \mathrm{GL}(1))$$

而且

$$\hat{L}(T) = \mathrm{Hom}(\mathrm{GL}(1), T)$$

则 $\hat{L}(T)$ 也是

$$\mathrm{Hom}(L(T), \mathbf{Z}).$$

借下式定义 $\hat{\lambda}(\gamma) \in \hat{L}(T) \otimes \mathbf{R}$

$$|\lambda(\gamma)|_p = p^{-\langle \lambda, \hat{\lambda}(\gamma) \rangle}, \quad \lambda \in L(T).$$

令 $M$ 为 $H^\circ$ 全体定义于 $\mathbf{Q}_p$ 上的有理特征标构成的格. 若在 $\mathbf{Q}$ 中存在 $r > 0$ 使得 $\hat{\lambda}(\gamma) - r\hat{\mu}$ 与 $M$ 正交, 则称 $(\gamma, h^\circ)$ 是 Frobenius 型的.

稍后将为 Frobenius 型偶引入一个等价关系. 对每个等价类都将有相应的 $H, \overline{G}$ 和 $X$, 以及

$$Y = H(\mathbf{Q}) \backslash G(\mathbf{A}_f^p) \times X$$

我们也将为每个等价类定义一个重数 $d$. 若以 $dY$ 代表 $d$ 份 $Y$ 的无交并, 当 $(\gamma, h^\circ)$ 取遍 Frobeinus 型偶的等价类时, 诸 $dY$ 的无交并作为带 $\Phi$ 和 $G(\mathbf{A}_f^p)$ 作用的集合应该同构于 $S_{K_p}(\overline{\kappa}_{\mathfrak{p}})$.

眼下先固定 $\gamma$ 和 $h^\circ$. 群 $H$ 将来自 $H^\circ$ 的内扭. 由于 Hasse 原理对伴随群 $H_{\mathrm{ad}}^\circ$ 成立, 仅须局部地确定扭转即可! 当然也要验证带有给定局部性状的整体扭转存在; 但这可由

标准技巧处理. 此扭转在无穷位和 $p$ 之外平凡. 在无穷位其选取使 $H_{\mathrm{der}}(\mathbf{R})$ 为紧. 在描述 $p$ 处的扭转之前, 我们引入定义在 $\mathbf{Q}_p$ 上的 $G$ 的子群 $\overline{G}^{\circ}$. 它是个连通子群, 其 Lie 代数由 $G$ 的 Lie 代数里满足

$$\mathrm{Ad}(\gamma)(V) = \epsilon V$$

的元素 $V$ 张成, 其中 $\epsilon \in \overline{\mathbf{Q}}_p$ 而 $|\epsilon|_p = 1$. $\overline{G}$ 将是 $\overline{G}^{\circ}$ 的一个扭形.

实际上我们将同时扭转 $\overline{G}^{\circ}$ 和 $H^{\circ}$. 若 $T$ 如上, 令 $T_{\mathrm{ad}}$ 为它在 $H^{\circ}_{\mathrm{ad}}$ 里的像, 而 $\overline{T}_{\mathrm{ad}}$ 为它在 $\overline{G}^{\circ}_{\mathrm{ad}}$ 里的像. 我们取 $T$ 使得 $T_{\mathrm{ad}}$ 在 $\mathbf{Q}_p$ 上非迷向. 取 $\mathbf{Q}$ 在 $\overline{\mathbf{Q}}$ 中的 Galois 扩张 $k$ 使 $T$ 分裂. 假设 $a_{\sigma,\tau}$ 是 $k_p/\mathbf{Q}_p$ 的基本 2-上闭链. 由于

$$T(k_p) = \hat{L}(T) \otimes k_p^{\times}$$

我们可引入 1-上链

$$\sigma \to a_{\sigma} = \sum_{\tau \in \mathfrak{G}(k_p/\mathbf{Q}_p)} \sigma\tau\hat{\mu} \otimes a_{\sigma,\tau}.$$

它取值在 $T(k_p)$ 然非 1-上闭链, 不过它在 $T_{\mathrm{ad}}(k_p)$ 或 $\overline{T}_{\mathrm{ad}}(k_p)$ 中的像则是. 与下述映射合成

$$H^1(\mathfrak{G}(k_p/\mathbf{Q}_p), T_{\mathrm{ad}}(k_p)) \to H^1(\overline{\mathbf{Q}}_p, H^{\circ})$$
$$H^1(\mathfrak{G}(k_p/\mathbf{Q}_p), \overline{T}_{\mathrm{ad}}(k_p)) \to H^1(\overline{\mathbf{Q}}_p, \overline{G}^{\circ})$$

遂得到用以在 $p$ 处扭转 $H^{\circ}$ 和 $\overline{G}^{\circ}$ 的上闭链. 当然必须验证这些扭转与一切辅助资料的选取无关.

同态 $H^{\circ} \to G_{\mathrm{der}}\backslash G$ 给出 $H \to G_{\mathrm{der}}\backslash G$. 重数 $d$ 是 $H^1(\overline{\mathbf{Q}}, H)$ 里除 $p$ 之外 (包括无穷位) 处处平凡, 并落在

$$H^1(\overline{\mathbf{Q}}, H) \to H^1(\overline{\mathbf{Q}}, G_{\mathrm{der}}\backslash G)$$

的核里的元素个数. 由于上述诸例牵涉的群具有特殊的上同调性质, 由之推测 $d$ 的一般值恐怕失之鲁莽.

定义最复杂的对象是集合 $X$. 置

$$\hat{\nu} = \sum_{\tau \in \mathfrak{G}(k_p/\mathbf{Q}_p)} \tau\hat{\mu}$$

并记

$$\hat{\nu} \otimes x \in \hat{L}(T) \otimes k_p^{\times} = T(k_p)$$

为 $x^{\hat{\nu}}$. 以上闭链 $a_{\sigma,\tau}$ 定义 Weil 群 $W_{k_p/\mathbf{Q}_p}$. 若 $w = (x, \sigma) \in W_{k_p/\mathbf{Q}_p}$, 其中 $x \in k_p^{\times}$,

$\sigma \in \mathfrak{G}(k_p/\mathbf{Q}_p)$, 置

$$b_w = x^{\hat{\nu}} a_\sigma.$$

则 $w \to b_w$ 是 1-上闭链. 令 $D$ 为 $H^\circ$ 在 $\mathbf{Q}_p$ 上的极大分裂中心子环面. 令 $\mathfrak{k}$ 为 $\mathbf{Q}_p$ 的极大非分歧扩张. 可以证明若我们将 $k_p$ 扩张到某个 $k_p'$ 并将 $b_w$ 提升到 $W_{k_p'/\mathbf{Q}_p}$, 则它的类可由一个如下形式的上闭链 $\{\overline{b}_w\}$ 代表

$$\overline{b}_w = \overline{b}_w' \overline{b}_w''$$

其中 $\overline{b}_w' \in T(\mathfrak{k})$, $\overline{b}_w'' \in D(\overline{\mathbf{Q}}_p)$ 而且

$$\left|\lambda(\overline{b}_w'')\right|_p = 1$$

对 $D$ 的所有有理特征标皆成立. 此外, 若以 $W^\circ$ 表 $W_{k_p/\mathbf{Q}_p} \to \mathfrak{G}(\overline{\mathbf{F}}_p/\mathbf{F}_p)$ 的核, 那么可选取 $\overline{b}_w'$ 使得对所有 $w \in W^\circ$ 皆有 $\overline{b}_w' = 1$. 若 $w$ 是 $W_{k_p/\mathbf{Q}_p}$ 中任一个映到 $\mathfrak{G}(\overline{\mathbf{F}}_p/\mathbf{F}_p)$ 里的 Frobenius 自同构的元素, 置

$$b = \overline{b}_w'.$$

视 $b$ 为 $G(\mathfrak{k})$ 的元素. 变动辅助资料的效果是以 $cb^\sigma c^{-1}$ 代 $b$, 这里 $\sigma$ 是 $\mathfrak{k}$ 上的 Frobenius. 这种变动并不碍事. 观察到我们可以将 $\overline{G}(\mathbf{Q}_p)$ 实现为

$$\left\{g \in G(\mathfrak{k}) \mid b^\sigma g b^{-1} = g\right\}.$$

群 $K_p$ 决定了 $G_{\mathrm{sc}}(\mathbf{Q}_p)$ 的 Bruhat–Tits 厦的一个特殊顶点, 这也是 $G_{\mathrm{sc}}(\mathfrak{k})$ 的厦的特殊顶点, 因而它决定了 $G(\mathfrak{k})$ 的一个抛物岩堀子群 $K_p(\mathfrak{k})$. 置

$$\mathscr{H} = G(\mathfrak{k})/K_p(\mathfrak{k}).$$

命 $F$ 为映射 $\mathscr{H} \to \mathscr{H}$, 它将 $g$ 代表的元素映到 $b^\sigma g$ 代表的元素.

在 $G$ 的抛物子群共轭类以及具有 $K_p(\mathfrak{k})$ 中代表元的抛物岩堀子群共轭类之间有个双射. 由 $T$ 和所有满足 $\langle \alpha, \hat{\mu} \rangle \le 0$ 的根 $\alpha$ 对应的单参数子群生成一个抛物子群, 所确定的共轭类记为 $\mathfrak{J}$. 对 $\mathscr{H}$ 中任意的点 $\mathfrak{x}$, 它在 $G_{\mathrm{sc}}(\mathfrak{k})$ 的每个单因子 $G_i(\mathfrak{k})$ 的 Bruhat–Tits 厦里都确定了一个特殊顶点 $\mathfrak{x}_i$. 我们仅考虑如下的 $\mathfrak{x}$: 若 $\mathfrak{y} = F\mathfrak{x}$, 则对每个 $i$, 或者 $\mathfrak{x}_i$ 和 $\mathfrak{y}_i$ 相同, 或者由一条边相连. 于是 $\mathfrak{x}_i$ 和 $\mathfrak{y}_i$ 决定了 $G_i(\mathfrak{k})$ 的一个抛物岩堀子群, 从而 $\mathfrak{x}$ 和 $\mathfrak{y}$ 也决定了 $G(\mathfrak{k})$ 的一个抛物岩堀子群. 使得此子群属于 $\mathfrak{J}$ 的点 $\mathfrak{x}$ 构成了 $X$. 群 $G(\mathbf{Q}_p)$ 作用于 $X$. 若 $r = [E_\mathfrak{p} : \mathbf{Q}_p]$, 定义 $\Phi_\mathfrak{p}$ 之作用为 $F^r$.

定义 $(\gamma_1, h_1^\circ)$, $(\gamma_2, h_2^\circ)$ 之间等价性的正确条件看来是局部的, 对每个有限位都有一

个条件, 对无穷位则无. 应该存在正整数 $m,n$ 和 $G(\mathbf{Q})$ 的中心里每个特征值都是单位的元素 $\delta$, 使得首先对每个 $\ell\neq p$, $\gamma_1^m$ 和 $\delta\gamma_2^n$ 在 $G(\mathbf{Q}_\ell)$ 中共轭. 它们应该也在 $G(\mathfrak{k})$ 中共轭. 令

$$\delta\gamma_2^n=g\gamma_1^m g^{-1},\quad g\in G(\mathfrak{k}).$$

假设 $b_1$ 和 $b_2$ 分别在 $H_1^\circ(\mathfrak{k})$ 和 $H_2^\circ(\mathfrak{k})$ 中以上述方式对应到 $(\gamma_1,h_1^\circ)$ 和 $(\gamma_2,h_2^\circ)$. 则有 $gb_1{}^\sigma g^{-1}\in H_2^\circ(\mathfrak{k})$. 等价性的最后一个条件是 $H_2^\circ(\mathfrak{k})$ 中存在 $c$ 使得

$$cgb_1{}^\sigma g^{-1\sigma}c^{-1}=b_2.$$

为了替志村簇的 $\zeta$-函数定义函数方程里的 $\Gamma$-因子, 必须先对它们在 $E$ 的无穷位的性状有所了解. 这就产生了两个问题. 若 $\tau$ 是 $\overline{\mathbf{Q}}$ 在 $\mathbf{Q}$ 上的自同构, 我们可以对 $E$ 上的族 $S_K$ 运用 $\tau$ 以得到 ${}^\tau E$ 上的簇族 ${}^\tau S_K$. 此新族应当是由某个新的 $({}^\tau G,{}^\tau h_0)$ 所定义的志村簇的典范模型. 一个明显的猜测如下. ${}^\tau G$ 应当是 $G$ 的一个内扭, 它在每个有限位皆平凡. 记复共轭为 $\rho$ 而 $T$ 的选取如上, 则在无穷位用以扭转的上闭链应当是 $\rho\to t_\rho$, 其中

$$\lambda(t_\rho)=(-1)^{\langle\lambda,\tau\hat{\mu}-\hat{\mu}\rangle},\quad \lambda\in L(T).$$

于是 $T$ 也可以视作 ${}^\tau G$ 在 $\mathbf{R}$ 上的 Cartan 子群. 同态 ${}^\tau h_0$ 应当正是合成

$$\mathrm{GL}(1)\xrightarrow{\tau\hat{\mu}}T\hookrightarrow{}^\tau G.$$

若域 $E$ 为实, 则复对合作用于 $S_K(\mathbf{C})$, 后者作为复流形同构于

$$G(\mathbf{Q})\backslash G(\mathbf{A})/K_\infty K.$$

应该有可能在此双陪集空间上以显式定义相应的对合. 仅当 $\rho\hat{\mu}=\omega\hat{\mu}$ 时 $E$ 方能为实, 其中 $\omega$ 属于 $T$ 对 $G$ 的 Weyl 群. 若然, $\omega$ 可以用 $T$ 在 $G(\mathbf{R})$ 里的正规化子的一个元素 $w$ 实现. 元素 $w$ 将正规化 $K_\infty$, 因此映射 $g\to gw$ 可以降到商空间. 这应该给出所求的对合.

志村五郎和施光彦正在做这两个问题, 它们比初看上去的要深.