Langlands 纲领的近期进展

李文威

编译日期: 2021-03-15
本文将收录于《数学所讲座 2017》, 由科学出版社出版.

目录

1 前言

本文基于作者 2017 年 9 月 6 日在中国科学院数学与系统科学研究院数学所讲座上所做的同名报告. 同年 11 月 24 日也在哈尔滨工业大学做过相同的报告. 少部分内容和参考文献经过增补.

文章的目的是尽量扼要地介绍 Langlands 纲领的源头, 基本思路和若干新方向. 选取的材料难免偏颇, 视角难免陈旧, 内容即便在报告当时也算不上前沿. 敬请读者谅解.

感谢万昕对本文的指正.

2 自守形式

2.1 起源: 上半平面

Langlands 纲领是关于自守形式和自守表示的一系列猜想. 为了阐明何谓自守形式, 有必要从最初也是最简单的例子, 即模形式来入手. 模形式的详细介绍可见 [11].

一切始于 H. Poincaré 的上半平面. 以 $\sqrt{-1}$ 表示虚数单位. 定义

$$\mathcal{H} := \{\tau \in \mathbb{C} : \Im(\tau) > 0\}.$$

矩阵 Lie 群 $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})^+ := \{g \in \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R}) : \det g > 0\}$ 在 $\mathcal{H}$ 上有左作用

$$\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \cdot \tau = \frac{a\tau + b}{c\tau + d}, \quad \tau = x + y\sqrt{-1} \in \mathcal{H}.$$

此作用将 $\mathcal{H}$ 实现为 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ 左作用下的齐性空间, 标准的实现方式为

$$\begin{aligned} \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})/\mathrm{SO}_2(\mathbb{R}) &\xrightarrow{\sim} \mathcal{H} \\ \gamma\mathrm{SO}_2(\mathbb{R}) &\mapsto \gamma\sqrt{-1}. \end{aligned}$$

相对于度量 $\frac{\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2}{y^2}$, 上半平面 $\mathcal{H}$ 具有常曲率 -1; 它是**双曲几何**的模型. 可以证明 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})/\{\pm 1\}$ 等于 $\mathcal{H}$ 的全纯自同构群, 也等于 $\mathcal{H}$ 的保距保向自同构群.

上半平面 $\mathcal{H}$ 既是 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ 的齐性空间, 又带有复结构. 所以在这些初步定义中, 我们已经瞥见群论, 复变函数论和几何学的初次聚首. 不过这些学科在 Langlands 纲领中的交汇发生在更深刻的层次, 诸位看倌且往下看.

Poincaré 考虑 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ 的离散子群 Γ, 和具备对称性

$$f(\gamma\tau) = f(\tau), \quad \tau \in \mathcal{H},\ \gamma \in \Gamma$$

的全纯函数 $f : \mathcal{H} \to \mathbb{C}$. 他称这类 Γ 为 Fuchs 群, f 为 Fuchs 函数, 并且用现称为 Poincaré 级数的方法来构造 f.

更广的概念则是权 $k \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$, 级 Γ 的**模形式**, 相应的对称性是

$$f\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}\right) = (c\tau+d)^k f(\tau), \quad \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \Gamma.$$

并且 f 要求在 Γ 的所有尖点处全纯. 为了说清这一全纯条件, 首先得阐明何谓 Γ 的尖点; 尖点可以设想为商空间 $\Gamma\backslash\mathcal{H}$ 的某些 "无穷远" 方向. 它的一般定义需要一些群论和平面双曲几何的预备工作, 本文仅对若干特例加以阐释.

2.2 复环面的模空间

离散子群的初步例子是 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) := \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \cap \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{Z})$. 简单起见, 以下仅考虑同余子群: 我们称 $\Gamma \subset \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ 是同余子群, 如果存在 $N \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ 使得

$$\Gamma \supset \Gamma(N) := \left\{\gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) : \gamma \equiv \left(\begin{smallmatrix} 1 & \\ & 1 \end{smallmatrix}\right) \pmod N\right\}.$$

越 "可除" 的 N 对应越小的群 $\Gamma_1(N)$, 或者说模形式的级便越深. 让 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ 透过 $\tau \mapsto \frac{a\tau+b}{c\tau+d}$ 的方式作用在射影直线的有理点集

$$\mathbb{P}^1(\mathbb{Q}) \simeq \mathbb{Q} \sqcup \{\infty\}$$

上. 可以设想这是上半平面在某种意义下的边界. 对于同余子群 Γ, 其**尖点**定义为 $\mathbb{P}^1(\mathbb{Q})$ 在 Γ 作用下的轨道, 数量有限.

对于一些特定的同余子群 $\Gamma \subset \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$, 商空间 $\Gamma\backslash\mathcal{H}$ 可视为某类几何对象的**模空间**,

换言之, 它参数化这些几何对象. 作为一则典型例子, 我们来考察

$$\Gamma_1(N) := \left\{ \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \ni \gamma \equiv \left(\begin{smallmatrix} 1 & * \\ & 1 \end{smallmatrix}\right) \pmod N \right\},$$

其中 $N \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$. 这是所谓同余子群之一例; 显然 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) = \Gamma_1(1) = \Gamma(1)$.

所谓的一维复环面, 是形如 $\mathbb{C}/\Lambda$ 的复 Lie 群, 其中 $\Lambda \subset \mathbb{C}$ 是格; 换言之, $\Lambda \subset \mathbb{C}$ 是离散加法子群, 而且 Λ 是秩 2 自由 $\mathbb{Z}$-模. 推而广之, 同构于某个 $\mathbb{C}/\Lambda$ 的复 Lie 群也称为一维复环面; 它们作为拓扑群都同胚于 $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$, 从而得名. 一维复环面中的群运算交换, 今后写作加法. 对于一维复环面中的任意挠元 P, 记其阶数为 $\mathrm{ord}(P)$.

精确到同构, 一维复环面总可以表作

$$\mathcal{E}_\tau := \mathbb{C} \big/ \left(\mathbb{Z}\tau \oplus \mathbb{Z}\right)$$

的形式, 其中 $\tau \in \mathcal{H}$. 进一步,

$$\mathcal{E}_\tau \simeq \mathcal{E}_{\tau'} \iff \tau' \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z}) \cdot \tau.$$

这相当于说 $Y_1(1) := \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \backslash \mathcal{H}$ 是一维复环面的模空间.

推而广之, 对于所有 $N \geq 1$ 皆有

$$\begin{array}{ccc} Y_1(N) := \Gamma_1(N)\backslash\mathcal{H} & \xleftrightarrow{1:1} & \left\{ (\mathcal{E}, P) : \begin{array}{l} \mathcal{E} : \text{一维复环面}, \\ P \in \mathcal{E}, \mathrm{ord}(P) = N \end{array} \right\} \Big/ \simeq \\ \cup & & \cup \\ \tau & \longmapsto & \left(\frac{\mathbb{C}}{\mathbb{Z}\tau \oplus \mathbb{Z}}, \ \frac{a\tau + b}{N} \bmod \mathbb{Z}\tau \oplus \mathbb{Z} \right). \end{array}$$

越深的 $\Gamma_1(N)$ 其群论性质似乎越加复杂, 但相应的 $Y_1(N)$ 却越容易处理. 对于 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ 之类的群, 挠元的存在反而对商空间的构造带来麻烦. 例如 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})\backslash\mathcal{H}$ 赋有典范的复结构, 使得它同构于复仿射直线 $\mathbb{A}^1_{\mathbb{C}}$; 但挠元

$$\gamma = \left(\begin{smallmatrix} & 1 \\ -1 & \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}), \quad \gamma^4 = 1$$

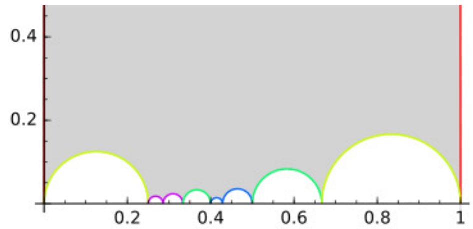
对 $\mathcal{H}$ 的作用 $\tau \mapsto -1/\tau$ 有不动点 $\sqrt{-1}$; 这提示我们 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})\backslash\mathcal{H}$ 应该视为 "叠", 而 $\mathbb{A}^1_{\mathbb{C}}$ 仅是它的粗模空间. 取 $N \geq 4$ 足以确保 $\Gamma_1(N)$ 无挠.

最后, 向 $X_1(N) := Y_1(N) \sqcup \{\text{尖点}\}$ 具有自然的连通紧 Riemann 曲面结构, 这对一般的同余子群也同样成立. 紧 Riemann 曲面的几何当然比非紧情形有更多的工具和视角, 比如说, $X_1(N)$ 可以实现为复代数曲线.

2.3 一般理论

模形式的一般理论始于 E. Hecke 的工作. 以下仅考虑 $\Gamma = \Gamma_1(N)$ 情形.

1. 在 $\Gamma_1(N)$ 作用下, $\mathcal{H}$ 可由一个基本区域铺砌; 添入尖点将 $Y_1(N)$ 紧化为 $X_1(N)$. 级 $\Gamma_1(N)$ 的模形式和紧 Riemann 曲面 $X_1(N)$ 的几何密切相关. 下图: $\Gamma_1(7)$ 有 6 个尖点, 由 $0, \frac{1}{4}, \frac{2}{7}, \frac{2}{5}, \frac{3}{7}$ 和虚轴方向的 $+\infty$ 代表, $X_1(7)$ 的亏格为 0.



2. 模形式的一般定义里要求 f 在每个尖点处全纯; 在尖点附近趋近 0 者称为**尖点形式**. 具有代表性的特例是 $\infty \in \mathbb{P}^1(\mathbb{Q})$ 确定的尖点, 因为其它尖点总能用 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ 作用搬运过来: 在 ∞ 处的全纯条件相当于说 f 有 Fourier 展开

$$f(\tau) = \sum_{n \geq 0} a_n(f) q^n, \quad q = e^{2\pi i \tau}, \ \tau \in \mathcal{H}.$$

   系数 $a_n(f)$ 常蕴藏微妙的算术信息. 例如 Ramanujan 的 $\tau(n)$ 便是模判别式 Δ 的系数.

定义 $M_k(\Gamma)$ 为权 k, 级 Γ 的模形式构成的 $\mathbb{C}$-向量空间, $S_k(\Gamma)$ 为尖点形式构成的子空间. 对于源于算术的 Γ, 这些空间具有一族称为 **Hecke 算子**的自同态.

另一方面, 对应于模形式 f 的 L-函数定义为

$$L(s, f) = \sum_{n \geq 0} a_n(f) n^{-s}, \quad \Re(s) \gg_f 0.$$

Hecke 证明了在适当条件下, $L(s, f)$ 有**亚纯延拓**和相对于 $s \leftrightarrow k - s$ 的**函数方程**.

回忆到 $Y_1(N)$ 是带有 $\Gamma_1(N)$-级结构的一维复环面的模空间. 根据代数几何的视角, 一维复环面总可以嵌入为仿射部分由形如

$$Y^2 = X^3 + aX + b$$

的方程定义的平面射影代数曲线, 复环面的加法零元对应到此曲线的 “无穷远点” $(0 : 0 : 1)$, 而复环面的加法则可以代数地刻画. 代数几何的长处在于它不仅能在复系数上操作, 还可以施于任何的域, 甚至是交换环. 由此可以说明模空间 $Y_1(N)$ 实际是定义在 $\mathbb{Z}$ 上的代数–几何对象, 其紧化 $X_1(N)$ 则是适当地添入广义椭圆曲线及其级结构得到的模空间. 这是 $M_k(\Gamma_1(N))$ 和 $S_k(\Gamma_1(N))$ 的许多算术性质的源头.

例 2.1 取 $\Gamma = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$. 相应的模形式是熟知的经典对象.

- Eisenstein 级数

$$G_{2k}(\tau) = \sum_{(a,b)\in\mathbb{Z}^2\smallsetminus\{\vec{0}\}} (a\tau+b)^{-2k} \ \in M_{2k}(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})),$$

  其中 $k \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$;

- 模判别式函数

$$\Delta(\tau) = q\prod_{n\geq 1}(1-q^n)^{24} \ \in S_{12}(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})).$$

以上讨论的模形式也称为整权椭圆模形式. 除此之外, 模形式理论还能进一步纳入半整权 $k \in \frac{1}{2}+\mathbb{Z}$ 的情形, Hilbert 和 Siegel 模形式 (具有多个复变元), 或非全纯的 f 等等.

3 表示理论的观点

3.1 过渡

以上采取的视角仍然基于复变函数论. 现在逐步引入群论的表述. 仍然设 $\Gamma = \Gamma_1(N)$. 对于 $\gamma = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})^+$, 定义

$$\left(f \,\big|_k\, \gamma\right)(\tau) = (\det\gamma)^{\frac{k}{2}}(c\tau+d)^{-k}f(\gamma\tau).$$

可以验证

$$\begin{aligned} M_k(\Gamma) &\longhookrightarrow C^\infty\left(\Gamma\backslash\mathrm{SL}_2(\mathbb{R}), \mathbb{C}\right) \\ f &\longmapsto \left[\Phi : \gamma \mapsto (f\,\big|_k\,\gamma)(\sqrt{-1})\right]. \end{aligned}$$

此嵌入的像有完整的刻画, 此处且略去.

这启发我们研究 $\Gamma\backslash\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ 上的某些光滑函数 — **自守函数**, 作为模形式的延伸.

群 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ 透过 $g\Phi(x) = \Phi(xg)$ 左作用于 $\Gamma\backslash\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ 上的函数空间 (譬如 L^2). 由此就引向半单 Lie 群 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ 的**表示理论**. 这一方向的研究是许多数学家的合力; 其中特别突出的贡献者有

- H. Weyl: 建立紧 Lie 群的表示理论.
- Gelfand/苏联学派, 和 Godement 等人: 用 Lie 群的表示理论来诠释特殊函数.
- Harish-Chandra: 从 1950 年代起深入地研究了半单 Lie 群的无穷维表示.

Harish-Chandra (1923—1983)
来源: The Digital Mathematics Archive

Roger Godement (1921—2016)
来源: Oberwolfach Photo Collection

3.2 谱分解

一般情形下, 我们研究 $G(\mathbb{R})$ 在 $L^2(\Gamma\backslash G(\mathbb{R}))$ 上的平移表示, 及其不可约分解 (所谓 "谱分解"), 其中

- $G(\mathbb{R})$ 由定义在 $\mathbb{Q}$ 上的**半单线性群** G 的 $\mathbb{R}$-点构成, 带 Haar 测度;
- $\Gamma \subset G(\mathbb{R})$ 是**算术子群**, 亦即基本上来自 G 的 $\mathbb{Z}$-结构的离散子群, 例如 $\Gamma_1(N) \subset \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$.

且来考虑加法群 $\mathbb{R}$ 及其离散子群 $\mathbb{Z}$; 这相当于在上述框架中取 G 为加法群 $\mathbb{G}_a$; 它是幂幺线性群, 并非半单, 但不失为一个有益的类比. 这时紧环面 $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ 上的 Fourier 分析给出 Hilbert 空间的离散分解

$$L^2(\mathbb{R}/\mathbb{Z}) = \widehat{\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}}} \mathbb{C}\xi_n, \quad \xi_n(x) := e^{2\pi i n x},$$

此处的 $\widehat{\bigoplus}$ 代表对 Hilbert 空间取直和, 再取完备化.

回到一般的 G. 当 $\Gamma\backslash G(\mathbb{R})$ 非紧时, 连续谱将造成很大的困难. 酉表示的抽象理论给出

$$L^2(\Gamma\backslash G(\mathbb{R})) = \int^{\oplus}_{\pi:\text{不可约酉表示}} \pi^{\oplus m(\pi,\Gamma)}\, \mathrm{d}\mu(\pi) = L^2_{\text{disc}} \oplus L^2_{\text{cont}}.$$

这只是抽象的分解, 它对连续谱 L^2_{cont}, 重数 $m(\pi,\Gamma)$ 和测度 $\mathrm{d}\mu(\pi)$ 所言甚少. 但实践表明即便是为了描述离散谱 L^2_{disc}, 也必须对连续谱 L^2_{cont} 有精密的了解. 为了描述此一分解. Selberg 和 Langlands 为此引进了 Eisenstein 级数的一般理论.

迄今, 一切看似是群论和泛函分析的舞台. 如何勾连模形式的经典理论? 一则事实是: 权 $k \geq 2$, 级 Γ 的尖点模形式无非是 $L^2_{\text{disc}}(\Gamma\backslash\mathrm{SL}_2(\mathbb{R}))$ 的不可约子表示 (所谓**离散系**表示) 里的光滑 $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$-最高权向量, 此权对应到 k.

从表示论的观点, 初步目标因而是对 $G(\mathbb{R})$ 的任何不可约酉表示 π 研究它在 $L^2_{\text{disc}}(\Gamma\backslash G(\mathbb{R}))$ 中的重数 $m(\pi,\Gamma) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, 并进一步探究其算术或几何的内涵. 先贤们

为此建立了大量的工具, 例如迹公式等等.

3.3 间奏: 赋值和 adèle 环

数论上感兴趣的是**整体域**, 分成两类:

- 数域, 亦即 $\mathbb{Q}$ 的有限扩张域;
- (正特征) 函数域, 亦即 $\mathbb{F}_q(t)$ 的有限扩张, 其中 q 是某素数 p 的幂.

整体域带有一系列的 "绝对值". 在 $\mathbb{Q}$ 的情形, 我们有数学分析中熟知标准绝对值, 对相应的度量作完备化, 得到实数域 $\mathbb{R}$. 此外对每个素数 p 还有 p-进绝对值 $|\cdot|_p$, 定义为

$$|x|_p = p^{-v_p(x)}, \quad v_p\left(\frac{p^a u}{v}\right) = a, \quad u, v \in \mathbb{Z},\ v \neq 0,\ p \nmid u, v.$$

按惯例, $v_p(0) := +\infty$. 相应的完备化是所谓的 p-进数域 $\mathbb{Q}_p$.

至于 $\mathbb{F}_q(t)$, 可将其设想为 $\mathbb{F}_q$ 上的射影直线 $\mathbb{P}^1_{\mathbb{F}_q}$ 上的有理函数构成的域; 对 $\mathbb{P}^1_{\mathbb{F}_q}$ 的每个点 p, 可以探讨有理函数 f 在 p 处的消没次数 $v_p(f) \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \sqcup \{+\infty\}$; 由此定义相应的绝对值

$$|f|_p = q^{-v_p(f)}.$$

这是 $\mathbb{Q}$ 上的 p-进绝对值的自然类比. 若 p 对应到 $t = 0$, 对 $|\cdot|_p$ 作完备化给出域 $\mathbb{F}_q(\!(t)\!)$.

推而广之, 对整体域 F 的每个 "绝对值" v 都可以作完备化, 得到**局部域** F_v, 它们是局部紧拓扑域. 形象地勾勒为

$$\begin{tikzcd}
 & F_v = \mathbb{R} \\
F = \mathbb{Q} \arrow[ur, bend left, "v\text{: 标准绝对值}"] \arrow[dr, bend right, "v\text{: } p\text{-进绝对值}"'] & \\
 & F_v = \mathbb{Q}_p = \mathbb{Z}_p\left[\frac{1}{p}\right] = \left(\varprojlim_r \mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z}\right)\left[\frac{1}{p}\right]
\end{tikzcd}$$

$$F = \mathbb{F}_q(t) \xrightarrow{v \leftrightarrow (t=0)} F_v = \mathbb{F}_q(\!(t)\!) = \mathbb{F}_q[\![t]\!]\left[\frac{1}{t}\right].$$

一般而言, 局部域 (记为 E) 分成 Archimedes (仅有 $\mathbb{R}, \mathbb{C}$) 和非 Archimedes 两类 (如 $\mathbb{Q}_p, \mathbb{F}_q(\!(t)\!)$ 及其有限扩张). 非 Archimedes 局部域 E 有紧开子环 $\mathfrak{o}_E$, 称为赋值环; 例如上图的 $\mathbb{Z}_p$ 和 $\mathbb{F}_q[\![t]\!]$ 便是赋值环.

对于整体域 F, 定义其 **adèle 环**为限制直积

$$\begin{aligned}\mathbb{A} = \mathbb{A}_F &:= \prod_{v:\text{绝对值}}{}^{'} F_v \\ &= \left\{ (x_v)_v \in \prod_{v:\text{绝对值}} F_v : \text{对几乎所有 } v \text{ 都有 } x_v \in \mathfrak{o}_{F_v} \right\},\end{aligned}$$

此处 "几乎所有" v 意谓剔除有限多个 v, 特别地要剔除所有 Archimedes 的 v, 这是限制直积的具体意涵.

按构造, adèle 环 $\mathbb{A}$ 总是局部紧环, 对角嵌入 $F \hookrightarrow \mathbb{A}$ 给出其离散子环. 这一构造是 C. Chevalley 的创发.

3.4 回到谱分解

现在容许 G 为数域或更一般的整体域 F 上的**约化群**, 如 GL_n, SL_n, Sp_{2n}, E_8 等等; 记其中心子群为 Z_G. 和先前类似地构造限制直积

$$G(\mathbb{A}) = \prod_v{}' G(F_v),$$

这里对 $g = (g_v)_v \in G(\mathbb{A})$ 的要求是对几乎所有的 v, 对应的 g_v 属于 G 的 $\mathfrak{o}_{F_v}$-值点. 譬如 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Q}_p)$ 的 $\mathbb{Z}_p$-值点无非是 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}_p) = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Q}_p) \cap \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{Z}_p)$ 的元素. 在一般情形下, 想说清这点就需要一些代数几何的语言.

无论如何, $G(\mathbb{A})$ 是局部紧群, 可赋予 Haar 测度, 而 $G(F)$ 对角嵌入为离散子群.

此外, 存在无挠闭子群 $\Xi \subset Z_G(F)\backslash Z_G(\mathbb{A})$ 使得 $\mathrm{vol}(G(F)\backslash G(\mathbb{A})/\Xi) < +\infty$; 在数域情形 Ξ 有标准的选法, 这是经典文献中所谓的**化约理论**.

借由 adèle 环的语言, 我们的任务化为研究

$$\boxed{L^2(G(F)\backslash G(\mathbb{A})/\Xi) \text{ 在 } G(\mathbb{A}) \text{ 作用 } g\Phi(x) = \Phi(xg) \text{ 下的谱分解.}}$$

在经典框架下 (取 $F = \mathbb{Q}$), 使用 $\mathbb{A}$ 相当于同时考虑 $G(\mathbb{R})$ 的所有的算术子群 Γ. 而所谓的 Hecke 算子反映为 $G(F_\infty) := \prod_{v\nmid\infty} G(F_v)$ 的作用; 这里 $v \mid \infty$ 意谓 F_v 是 Archimedes 域, 否则写作 $v \nmid \infty$. Adèle 环的优点之一在于 $G(\mathbb{R})$ 的表示理论和 $G(F_v)$ (其中 $v \nmid \infty$) 的表示理论可以等量齐观. 因此, 我们转向形如 $G(E)$ 的局部紧群的表示理论, 其中 E 是局部域.

定义 3.1 所谓 L^2-自守形式, 是指光滑函数 $f : G(F)\backslash G(\mathbb{A})/\Xi \to \mathbb{C}$, 要求它平方可积, 并且满足于

- 在 $G(\mathbb{A}) = \prod_v' G(F_v)$ 作用下光滑,

- 在包络代数的中心 $\mathcal{Z}(U(\mathfrak{g}_\infty))$ 作用下张成有限维空间, $\mathfrak{g}_\infty = \prod_{v|\infty} \mathfrak{g} \otimes_F F_v$.

- 某种意义下"缓增".

何谓光滑? 对于 Lie 群作用下的情形, 定义多少是直观的, 它指的是群在空间上的作用无穷可微. 对于非 Archimedes 局部域上的群或它们的限制直积, 光滑意谓函数或向量在某个紧开子群作用下不变 — 请注意: 非 Archimedes 局部域上的群有充分多的紧开子群.

留意到:

- 函数域的情形不再有 Archimedes 赋值 ∞, 而且 Ξ 的选取不唯一;

- 数域情形常要求 f 在 $G(F_\infty)$ 的一个极大紧子群 K_∞ 作用下有限.

3.5 光滑表示

谱分解原是关于酉表示的问题. 对于定义在局部域 E 上的约化群 G, 实用中经常以 $G(E)$ 的**光滑表示**取代酉表示. 当 $E = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ 时涉及一些技术性细节: 一般考虑 Harish-Chandra 模或 Casselman–Wallach 表示.

整体情形同样可探讨 $G(\mathbb{A})$ 的不可约光滑表示 π, 它们有唯一分解 $\pi = \bigotimes'_v \pi_v$.

定义 3.2 如果 π 出现在 $L^2(G(F)\backslash G(\mathbb{A})/\Xi)$ 中, 则称 π 是 L^2-自守表示. 自守形式落在其中.

尽管上述定义涉及拓扑和测度, 非 Archimedes 局部域上的光滑表示论本质上是代数的. 函数域上的自守形式理论亦然.

自守表示的研究化为:

1. 分类局部域上约化群的不可约光滑表示, 这可以归为调和分析的一支;

2. 对于 $G(\mathbb{A})$ 的表示 $\pi = \bigotimes'_v \pi_v$, 研究它在 $L^2_{\text{disc}}(G(F)\backslash G(\mathbb{A})/\Xi)$ 中的重数 — 这里涉入了算术.

4 Langlands 纲领

4.1 Langlands 对偶群

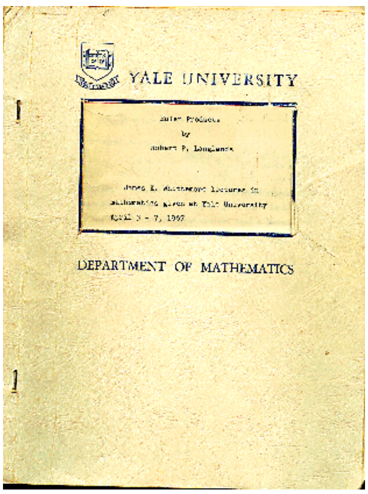
设 G 是局部或整体域 F 上的约化群. 记 F 的可分闭包为 F^{sep}, 其绝对 Galois 群为 $\text{Gal}_F := \text{Gal}(F^{\text{sep}}|F)$, 带有 Krull 拓扑, 因而 Gal_F 成为紧 Hausdorff 群; 记 F 的 Weil 群为 $W_F \to \text{Gal}_F$. 所谓 **Langlands 对偶群** $\check{G}$ 是一个拟分裂 $\mathbb{C}$-约化群 (事实上能定义在 $\mathbb{Z}$ 上), 按以下步骤定义.

1. 第一, F 上的约化群的结构定理对 G 给出根资料 $(X^*, \Delta, X_*, \check{\Delta})$, 其中
    - $X^* = X^*(T)$ 是对选定之极大子环面 $T \subset G$ 定义的权格, 所谓的权是指同态 $T \to \mathbb{G}_m$, 它们构成加法群;
    - $\Delta \subset X^*$ 是对于选定的 Borel 子群 $B \supset T$ 定义的单根集;
    - $X_* = \mathrm{Hom}(X^*, \mathbb{Z})$, 而 $\check{\Delta} \subset X_*$ 由单余根构成;
    - 上述之 T, B, 权, 根等等都是定义在 F^{sep} 上的, Gal_F 典范地作用在这些资料上.
2. 约化群的根资料由一些组合–代数条件刻画, 不涉及域 F. 上述资料的对偶 $(X_*, \check{\Delta}, X^*, \Delta)$ 仍是根资料. 对此应用 $\mathbb{C}$ 上的约化群结构定理, 给出 $\mathbb{C}$ 上的约化群 $\check{G}$: 它带有 Borel 子群 $\check{B}$ 和极大子环面 $\check{T}$, 使得其根资料为 $(X_*, \check{\Delta}, X^*, \Delta)$. 进一步, Gal_F 作用于对偶根资料, 从而在 $\check{G}$ 上通过约化群的自同构来作用, 保持给定的 $\check{B}$ 和 $\check{T}$ 不变.

事实上, 只要取充分大的有限 Galois 扩张 $K|F$ 使得 G 在 K 上分裂, 则 Gal_F 在 $\check{G}$ 上的作用透过有限商群 $\mathrm{Gal}_{K|F}$ 分解.

定义 L-群的 Weil 形式为 ${}^L G := \check{G} \rtimes W_F$; 其 Galois 形式定义为 $\check{G} \rtimes \mathrm{Gal}_F$; 对于 Galois 形式, 我们也不妨取 $\check{G} \rtimes \mathrm{Gal}_{K|F}$. 最近的研究表明, 某种称为 C-群的典范群扩张 $1 \to {}^L G \to {}^C G \to \mathbb{G}_m \to 1$ 可能是更自然的对象, 详见 [3], 恕不细说.

另外, $\check{G}$ 也可以看作 $\mathrm{Spec}(F)_{\text{ét}}$ 上取值在约化群的局部常值层.



R. P. Langlands, *Euler Products* (1967).

R. P. Langlands 在计算 Eisenstein 级数的常数项时体认到 ${}^L G$ 的角色. 同年一月, 他在一封给 A. Weil 的信中提出了所谓的 Langlands 纲领.

4.2 非分歧表示

设 E 是非 Archimedes 局部域, 设群 G 有 “好” 的 $\mathfrak{o}_E$-模型, $K := G(\mathfrak{o}_E)$. 这时 G 在 E 的某个非分歧扩张上分裂. 以 Fr 记 Frobenius 自同构在 Gal_E 中的某个提升.

定义 4.1 若 $G(E)$ 的不可约光滑表示 π 满足 $\pi^K \neq \{0\}$, 则 π 称为**非分歧**表示.

让 $\check{G}$ 透过共轭作用在代数簇 $\check{G} \rtimes \mathrm{Fr} \subset {}^L G$ 上作用. 相应的几何商 (或称为范畴商) 有意义, 记为 $(\check{G} \rtimes \mathrm{Fr}) /\!\!/ \check{G}$, 这是 $\mathbb{C}$ 上的代数簇.

定理 4.2 (佐武一郎对应) 精确到同构, 非分歧表示一一对应于 $(\check{G} \rtimes \mathrm{Fr}) /\!\!/ \check{G}$ 的点, 记为 $\pi \leftrightarrow c_\pi$.

注记 4.3 设 G 是整体域 F 上的约化群, $\pi = \bigotimes'_v \pi_v$ 是 $G(\mathbb{A})$ 的自守表示, 则对几乎所有的 v, 分解中的 π_v 都是非分歧的. 所以分类非分歧表示是理解自守表示的第一步.

继续考虑整体域 F 上的情形. 取充分大的有限集 $S \supset \{v : v \mid \infty\}$, 使得 $v \notin S$ 时 π 在 F_v 上非分歧, 相应的 Frobenius 自同构的提升记为 Fr_v; 此时我们称 π 在 S 外非分歧. 定义

$$\mathcal{C}^S(G) = \prod_{v \notin S} \left((\check{G} \rtimes \mathrm{Fr}_v \right) /\!\!/ \check{G}).$$

与 π 对应之 $(c_{\pi,v})_v \in \mathcal{C}^S(G)$ 称为 π 的**佐武参数**, 这是自守表示的重要不变量; 有限集 S 的选取依赖于 π, 但可以任意扩大, 故佐武参数的自然归宿是

$$\mathcal{C}(G) := \varinjlim_S \mathcal{C}^S(G).$$

4.3 L-函数

承上, 当 F_v 是非 Archimedes 局部域时, 以 q_v 记 F_v 的剩余类域的基数. 取充分大的有限集 S 如上.

定义 4.4 (部分 L-函数) 设 $\pi = \bigotimes'_v \pi_v$ 是 $G(\mathbb{A})$ 的酉表示, 且当 $v \notin S$ 时 π_v 非分歧. 设 $\rho : {}^L G \to \mathrm{GL}_N(\mathbb{C})$ 为线性表示, 对满足 $\Re(s) \gg_\pi 0$ 的复数 s 定义

$$L^S(s, \pi, \rho) := \prod_{v \notin S} L(s, \pi_v, \rho),$$
$$L(s, \pi_v, \rho) := \det \left(1 - \rho(c_{\pi,v}) q_v^{-s} \right)^{-1}.$$

这是 π 的解析不变量, 由表示的佐武参数确定; 无穷乘积分解

$$L^S(s, \pi, \rho) = \prod_{v \notin S} L(s, \pi_{,v}, \rho)$$

称为 L-函数的 Euler **乘积**. 借助对酉表示的一些初等估计, 可证明 $L^S(s,\pi,\rho)$ 在 $\Re(s) \gg 0$ 时收敛且对 s 全纯.

如果假设 π 是自守表示, 则我们预期 π 的 L-函数将有特殊的解析性质, 进一步, 我们还有理由预期它蕴藏重要的算术信息.

猜想 4.5 (R. P. Langlands) 函数 $L^S(s,\pi,\rho)$ 具有到整个复平面的亚纯延拓, 和相对于 $s \leftrightarrow 1-s$ 的函数方程.

例 4.6 取 $G = \mathrm{GL}_n$, 则 $\check{G} = \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, 带平凡的 Gal_F 作用. 取 ρ 为 GL_n 的标准 n 维表示. 此时 $L^S(s,\pi,\rho)$ 无非是 π 的 Godement–Jacquet 标准 L-函数的 S-部分.

4.4 Langlands 函子性

仍然选定整体域 F 上的约化群 G, 取 S 充分大以确保 G 在 S 之外有好的模型, 具如上述. 若 $G(\mathbb{A})$ 的自守表示 π 在 S 外非分歧, 则其佐武参数记为 $c_\pi^S \in \mathcal{C}^S(G)$; 它在 $\mathcal{C}(G)$ 中的像记为 c_π. 表示的自守性质对可能的佐武参数施加了严格的限制. 定义

$$\begin{aligned}
\mathcal{C}^S_{\mathrm{aut}}(G) &:= \left\{ c_\pi^S \in \mathcal{C}^S(G) : \pi \text{ 是 } G(\mathbb{A}) \text{ 的自守表示, 在 } S \text{ 外非分歧} \right\}, \\
\mathcal{C}_{\mathrm{aut}}(G) &:= \left\{ c_\pi \in \mathcal{C}^S(G) : \pi \text{ 是 } G(\mathbb{A}) \text{ 的自守表示} \right\}.
\end{aligned}$$

Langlands 洞察到随着 G 变化, 这些佐武参数构成的空间具有紧凑的结构, 线索来自 L-群.

首先需要一些定义. 设 H, G 为 F 上的约化群, 而同态 $f : {}^L H \to {}^L G$ 与向 W_F 的投影交换. 按照佐武参数的定义, 它诱导 $f_* : \mathcal{C}^S(H) \to \mathcal{C}^S(G)$. 以下不妨假设 G 拟分裂, 换言之, 它有定义在 F 上的 Borel 子群.

猜想 4.7 (Langlands 函子性) 上述之 f_* 诱导 $\mathcal{C}^S_{\mathrm{aut}}(H) \to \mathcal{C}^S_{\mathrm{aut}}(G)$.

- 如果 $\rho : {}^L G \to \mathrm{GL}_N(\mathbb{C})$, 而 $H(\mathbb{A})$ 和 $G(\mathbb{A})$ 的自守表示 σ, π 如此联系, 按定义立见

$$L^S(s,\sigma,\rho\circ f) = L^S(s,\pi,\rho).$$

- 进一步猜想: 应当可以将 H 的自守表示通过 f **提升**到 G 的自守表示, 或更精确地说, 提升为自守表示的 “包”.

Langlands 演示了如何从 f 为对称幂 $\mathrm{Sym}^k : \mathrm{GL}_n \to \mathrm{GL}_{\binom{n+k-1}{k}}$ 时的函子性推导 Ramanujan **猜想**.

4.5 Langlands 对应

对局部域 E, 定义 Weil–Deligne 群为

$$\mathrm{WD}_E := \begin{cases} W_E, & E = \mathbb{R}, \mathbb{C} \\ W_E \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}), & \text{其它情形.} \end{cases}.$$

在局部域 E 上, 定义

$$\Pi(G) := \{G(E) \text{ 的不可约光滑表示}\} \big/ \simeq .$$

定义 L-**参数**集为

$$\Phi(G) := \left\{ \begin{tikzcd} \mathrm{WD}_E \arrow[rr, "\phi"] \arrow[dr] & & {}^L G \arrow[dl] \\ & W_E & \end{tikzcd} + \text{连续等条件} \right\} \Big/ \check{G}\text{-共轭}.$$

猜想 4.8 (局部 Langlands 对应) *存在满足种种相容性的满射 $\Pi(G) \twoheadrightarrow \Phi(G)$, 其纤维 Π_ϕ 称为 L-**包**; 这些有限集的结构猜想可由 $\mathrm{Cent}_{\check{G}}(\mathrm{im}(\phi))$ 来描述.*

对于 G 和 π 非分歧的情形, 这一对于应当回归佐武一郎对应.

猜想 4.9 (整体 Langlands 对应的初步版本) *在整体域 F 上, 自守表示同样用 $\phi : L_F \to {}^L G$ 的共轭类来描述, 此处涉及的 Langlands 群 L_F 理当是 W_F 的某个扩张.*

在数域情形, L_F 的存在性或是 Langlands 纲领最深的内容之一.

- Arthur (1989, 1990) 对局部–整体的关系和自守表示的重数有更精细的猜想, 他还提出了 Arthur **包**的概念.
- 如果只考虑 $G = \mathrm{GL}_1 = \mathbb{G}_m$, 一切归结为局部和整体**类域论**. 这时 L_F 的角色可用 W_F 代替.
- 对于一般的 GL_n, Langlands 对应可以视作一种**非交换互反律**. 这将是初等数论中的二次互反律的深远推广.

4.6 几何, 算术与分析

设 ℓ 为素数. 取定 $\mathbb{Q}_\ell$ 的代数闭包 $\overline{\mathbb{Q}_\ell}$ 和 $\iota : \overline{\mathbb{Q}_\ell} \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}$. 极其粗略地说

$$\begin{tikzcd}
& \text{几何对象 (“原相”)}_{/F} \arrow[dl, shift left, "\text{平展上同调}"] \arrow[dr, "\text{模性}"] & \\
\text{Galois 表示} \arrow[ur, shift left, "\text{Fontaine–Mazur 猜想}"] \arrow[rr, shift left, "\text{自守提升}"] & & \text{自守表示} \arrow[ll, shift left, "L\text{-参数}"]
\end{tikzcd}$$

几何对象和 Galois 表示这两部分涉及系数在 $\overline{\mathbb{Q}_\ell}$ (而非 $\mathbb{C}$) 中的构造. 这些箭头应当和三边的各种结构相容; 最低限度, 至少要使各种 L-函数相对应:

- 原相[1]的 L-函数, 这是 Hasse–Weil ζ-函数的推广;
- Galois 表示的 Artin L-函数;
- 自守表示的种种 L-函数.

往细处说, 这里还涉及对应的 ℓ-无关性, p-进 Langlands 纲领, 局部–整体兼容性等等面向, 可谓千头万绪.

以下举一个特定的几何对象为例, 说明三者如何互动. 设 $\mathcal{E}$ 为 $\mathbb{Q}$ 上椭圆曲线, 其 “原相” 分解为 $\mathcal{E} = h^0 \oplus h^1 \oplus h^2$. 对应 h^1 的 ℓ-进 Galois 表示来自 Tate 模 $T_\ell(\mathcal{E}) = \varprojlim_r \mathcal{E}[\ell^r]$. 适当地选取 $\mathcal{E}$ 的方程, 可确保方程是整系数的, 并且满足某种极小性质. 如果此方程 mod 素数 p 之后仍然定义 $\mathbb{F}_p$ 上的椭圆曲线, 记为 $\overline{E}_{\mathbb{F}_p}$, 则称 $\mathcal{E}$ 在 p 处有好约化.

由此定义 $\mathcal{E}$ 的 Hasse–Weil ζ-函数为

$$\zeta(\mathcal{E}, s) := \prod_{p:\text{有好约化}} Z\left(\mathcal{E}_{\mathbb{F}_p}, p^{-s}\right) \cdot (\text{其它有限多项}), \quad \Re(s) \gg 0,$$

$$\log Z(\mathcal{E}_{\mathbb{F}_p}, t) = \sum_{r \geq 1} |\mathcal{E}(\mathbb{F}_{p^r})| \cdot \frac{t^r}{r};$$

$$\zeta(\mathcal{E}, s) = \underbrace{\zeta(s)}_{h^0} \underbrace{L(\mathcal{E}, s)}_{h^1}{}^{-1} \underbrace{\zeta(s-1)}_{h^2}.$$

好约化之外的项其定义稍微棘手, 按下不表.

今考虑带复乘的椭圆曲线 $\mathcal{E}_{/\mathbb{Q}} : Y^2 = X^3 - X$, 则 $L(\mathcal{E}, s) = \sum_{n \geq 1} a_n n^{-s}$ 等于下述模

[1]此处采取黎景辉老师建议的译名.

形式的 L-函数

$$\begin{aligned}\sum_{n\geq 1} a_n q^n &= q\prod_{n\geq 1}(1-q^{4n})^2(1-q^{8n})^2 \\ &= \left(\eta(4\tau)\eta(8\tau)\right)^2 \ \in S_2(\Gamma_0(32)),\end{aligned}$$

其中 $q = e^{2\pi i\tau}$, $\tau \in \mathcal{H}$,

$$\Gamma_0(N) := \left\{\gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) : \gamma \equiv \left(\begin{smallmatrix} * & * \\ & * \end{smallmatrix}\right) \pmod N\right\},$$

而 $\eta(\tau)$ 是 Dedekind η-函数

$$\eta(\tau) = e^{2\pi i\tau/24}\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n).$$

注意到 $\eta^{24} = \Delta \in S_{12}(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}))$, 即模判别式函数.

Langlands 函子性猜想提出已有半个世纪, 相关的技巧和思想屡有突破. 尽管如此, 离猜想的完整形式即便对 $G = \mathrm{GL}_n$ 也还有一大段距离. 在近来涌现的许多新成果中, 我们且举出一则与几何, 表示和数论都直接相关的例子 (2017).

- 作者群: Allen, Calegari, Caraiani, Gee, Helm, Le Hung, Newton, Scholze, Taylor, Throne.
- 成果: 复乘域 $F \supset \mathbb{Q}$ 上满足若干条件的 n 维 Galois 表示的模性 (涵摄来自椭圆曲线 $\mathcal{E}_{/F}$ 的 Galois 表示), **不需要表示的自对偶条件**.
- 若干应用
  - 非复乘椭圆曲线 $\mathcal{E}_{/F}$ 的佐藤–Tate 猜想;
  - $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_F)$ 的上同调 (平凡系数) 尖点自守表示的 Ramanujan 猜想, 其手法是证明 Galois 表示的对称幂具有 “潜在自守性”.

5 函数域情形: Weil 的见解

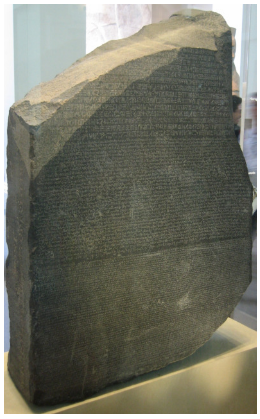
5.1 Dedekind–Kronecker–Weil 的洞见

以下所谓的 “曲线” 默认为几何连通的光滑射影代数曲线.

从 19 世纪以来, Dedekind, Kronecker 等人就已经察觉数域里的代数整数环和曲线的几何有许多性质相通. 然而, 直到 A. Weil 才明确指出有限域 $\mathbb{F}_q$ 上的曲线理论可以充当两者的中介.

A. Weil 以古埃及留下的 Rosetta 石碑来解释数论与几何之间的类比. 一如 Rosetta 石碑铭刻有希腊文, 象形文字, 和埃及草书三种文字, Weil 的类比也包括三种语言:

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & \text{数域} \arrow[dl, dashed, no head] \arrow[dr, dashed, no head] & \\
\text{函数域}_{/\mathbb{F}_q} \arrow[rr, dashed, no head] \arrow[d, leftrightarrow] & & \text{函数域}_{/\mathbb{C}} \arrow[d, leftrightarrow] \\
\text{曲线 } C_{/\mathbb{F}_q} & & \text{曲线 } C_{/\mathbb{C}}
\end{tikzcd}$$



所谓的函数域, 指的是该曲线上的有理函数构成的域. 对于复数域 $\mathbb{C}$, 其上的曲线无非是连通紧 Riemann 曲面, 而函数域无非是亚纯函数域. 曲线 $C_{/\mathbb{F}_q}$ 的函数域是之前介绍的正特征整体域.

另有一种思路是将数域和三维流形的几何作类比, 本文不讨论.

相较于数域情形, 曲线上有更多的几何结构, 譬如正特征函数域上的 Frobenius 自同构, 以及 Riemann 曲面上的微分算子. 举例言之, Riemann 假设在函数域上的类比已经被由几何方法证明了, 这是 A. Weil, P. Deligne 等人的深刻工作.

许多数学家的梦想是发展一套**绝对几何学**, 它涉及所谓 "只有一个元素的域" $\mathbb{F}_1$ 及其上的几何; 人们还期望 $\mathbb{Z}$ 上的算术–几何对象能下降到 $\mathbb{F}_1$ 上, 或者说期望某种自然态射 $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}) \to \mathrm{Spec}(\mathbb{F}_1)$. 这一切猜想的目的在于用类似的几何论证来处理数域上的问题, 例如经典版本的 Riemann 假设. 截至目前, 此套理论尚不能自圆其说.

5.2 挠子的模空间

取定有限域 $\mathbb{F}_q$ 并考虑 $\mathbb{F}_q$ 上的曲线 C 及其函数域 $F := \mathbb{F}_q(C)$. 定义 F 的 adèle 环的紧开子环

$$\mathbb{A}^\circ := \prod_v \mathfrak{o}_{F_v} \subset \mathbb{A} = \mathbb{A}_F.$$

Weil 注意到

$$\mathrm{GL}_n(F)\backslash\mathrm{GL}_n(\mathbb{A})/\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}^\circ) \xleftrightarrow{1:1} \{C \text{ 上的秩 } n \text{ 向量丛}\} / \simeq .$$

- 秩 n 向量丛相当于 GL_n-挠子, 亦即 GL_n-主丛, 此对应由 $V \mapsto \underline{\mathrm{Isom}}(\mathcal{O}_C^{\oplus n}, V)$ 确定.
- 对一般的分裂约化群 G, 曲线 C 上的 G-挠子的模空间 Bun_G 是 $\mathbb{F}_q$ 上的一个光滑**代数叠**. 双射的右式无非 $\mathrm{Bun}_{\mathrm{GL}_n}(\mathbb{F}_q)$, 在此简单地视为由 GL_n-挠子的同构类组成的集合.

- 更进一步, 给定 C 的有限闭子概型 N, 对挠子加入 N 结构, 亦即挠子限制在 N 上的平凡化, 便得到模空间 $\mathrm{Bun}_{G,N}$; 作为特例, $\mathrm{Bun}_{G,\emptyset} = \mathrm{Bun}_G$.

在处理这类和挠子有关问题的当代进路中, 最基本的工具是 Beauville–Laszlo 下降法.

注记 5.1 分裂群的好处在于它自动 "摊开" 为曲线 C 上的群概型, 在每一点都有好约化. 然而数论中涉及许多非分裂约化群, 例如整体域上的酉群, 对于这些 G, 对应的几何构造应取为 C 上的 Bruhat–Tits 群概型.

考虑 Galois 上同调 $\mathrm{H}^1(F, G)$ 及其在每个 F_v 上的局部版本. 对 Shafarevich 群

$$\ker^1(F,G) := \left\{ \alpha \in \mathrm{H}^1(F,G) : \forall v,\ \alpha \text{ 在 } \mathrm{H}^1(F_v, G) \text{ 中的像平凡} \right\}.$$

里的每个 α, 选定代表元 $a \in Z^1(F,G)$ 以构作一个和 G 在许多方面都非常相似的约化群 G_α, 称为 α 给出的纯内形式; 再对每个 v 取

$$b \in G\left(F_v^{\mathrm{sep}}\right), \quad \text{使得 } \forall \sigma \in \mathrm{Gal}_{F_v},\ a_\sigma = b^{-1}\sigma(b).$$

由此可以推得同构 $G_\alpha(\mathbb{A}) \simeq G(\mathbb{A})$, 尽管 G 和 G_α 在 F 上未必同构.

定理 5.2 *令 $K_N \subset G(\mathbb{A}^\circ)$ 为 $N \subset C$ 对应的同余子群, 则*

$$\underbrace{\mathrm{Bun}_{G,N}(\mathbb{F}_q)}_{\text{只看同构类, 或取 } \pi_0} \xleftrightarrow{1:1} \bigsqcup_{\alpha \in \ker^1(F,G)} G_\alpha(F) \backslash G_\alpha(\mathbb{A}) / K_N.$$

对应到平凡 α 的恰好是 Zariski 局部平凡的 G-挠子. 若 G 分裂或 G 的导出子群单连通, 则 $\ker^1(F,G)$ 平凡. 双射对 Ξ 的自然作用等变.

关于 Ξ, 请回顾定义 3.1 及其上的论述.

当 N 扩大时 K_N 收缩至 $\{1\}$, 这说明在函数域上, 自守形式所居的 $G(F)\backslash G(\mathbb{A})/\Xi$ 是几何对象 (模空间) 的某种影子. 注意到纯内形式 G_α 在经典框架下同样出现, 这是 R. P. Langlands 和 D. Vogan 等人早有的观察.

5.3 数域上的一种类比

以下类比是 U. Stuhler 提出的. 定义

$$\mathrm{Vect}_n := \left\{ \mathcal{V} = (L, b) \,\middle|\, \begin{array}{l} L:\ \text{秩 } n \text{ 自由 } \mathbb{Z}\text{-模}, \\ b:\ L \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R} \text{ 上的内积} \end{array} \right\} + \text{自明的同构概念}.$$

取 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A})$ 的极大紧子群 $K = \mathrm{O}_n(\mathbb{R}) \times \prod_p \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}_p)$, 则

$$\begin{aligned} \mathrm{GL}_n(\mathbb{Q})\backslash \mathrm{GL}_n(\mathbb{A})/K &\simeq \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})\backslash \left(\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})/\mathrm{O}_n(\mathbb{R})\right) \\ &\simeq \mathsf{Vect}_n/\simeq . \end{aligned}$$

在此语境下, 如约定 $\mathcal{V}$ 的 “子丛” 为配备诱导内积的无挠 $\mathbb{Z}$-子模, 并且命

$$\deg(\mathcal{V}) := -\log\ \mathrm{vol}\left(L \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}/L\right), \quad \mu(\mathcal{V}) := \frac{\deg \mathcal{V}}{\mathrm{rk}(L)}$$

则在 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q})\backslash \mathrm{GL}_n(\mathbb{A})/K$ 上可以开展类似于 Harder–Narasimhan 滤过的理论.

5.4 函数域上实现整体 Langlands 对应的思路

以下选定函数域 $F \supset \mathbb{F}_q$, 其中 q 是某素数的幂.

1. 函数域上的表示理论和 Langlands 对应本质上是代数的: 它们可以适当地表述, 使得一切只依赖表示的系数域 (先前取为 $\mathbb{C}$) 的**代数结构**, 而不涉及其拓扑. 为了引入几何工具, 我们另取素数 $\ell \nmid q$. 以 $\mathbb{Q}_\ell$ 表示 ℓ-进数域; 选定代数闭包 $\overline{\mathbb{Q}_\ell}$. 代数中的一则事实是存在域的同构 $\overline{\mathbb{Q}_\ell} \simeq \mathbb{C}$. 因此我们可以考虑系数域为 $\overline{\mathbb{Q}_\ell}$ 的表示或自守形式.

2. 取定系数域 $\overline{\mathbb{Q}_\ell}$ 如上. 来自函数域 (或其完备化) 上的自守形式理论 (或群表示论) 的另一则事实是: 所有自守形式 (或不可约表示) 实际上都能够定义在 $\mathbb{Q}_\ell$ 的某个有限扩张上, 而不必用到整个 $\overline{\mathbb{Q}_\ell}$.

3. 综上, 在表示和对偶群 $\check{G}$ 的定义中可用 $\overline{\mathbb{Q}_\ell}$ 或 $\mathbb{Q}_\ell$ 的有限扩张来取代 $\mathbb{C}$.

4. 在 ℓ-进情形, 进一步定义 L-参数为连续同态 $\sigma : W_F \to {}^L G$, 其中 ${}^L G$ 被赋予来自 $\overline{\mathbb{Q}_\ell}$ 的拓扑, 并且要求 σ 透过 ${}^L G(E)$ 分解, 其中 E 是 $\mathbb{Q}_\ell$ 的某个有限扩张.

以 $G = \mathrm{GL}_n$ 为例, $\check{G} = \mathrm{GL}_n(\overline{\mathbb{Q}_\ell})$. 此时 L-参数转译为 n 维的 ℓ-进 **Galois 表示**, 或更确切地说是 Weil 群的表示. 它们对应到曲线 C 的开集上的秩为 n 的 ℓ-进光滑 Weil 层, 相关的理论框架可见 [4, §1.1] 的说明.

注记 5.3 来自几何, 亦即 ℓ-进平展上同调的表示也遵从类似的哲学: 它们取值在 $\mathbb{Q}_\ell$ 或其有限域扩张上.

一个经典想法是寻觅合适的几何对象 $\mathcal{X}$ 使得 $\mathrm{H}^\bullet(\mathcal{X}_{\bar{F}}; \overline{\mathbb{Q}_\ell})$ 带有 $\mathrm{Gal}_F \times G(\mathbb{A})$-作用, 透过作为 $\mathrm{Gal}_F \times G(\mathbb{A})$-表示的不可约分解 (假设存在!)

$$\mathrm{H}^\bullet(\mathcal{X}_{\bar{F}}, \overline{\mathbb{Q}_\ell}) = \bigoplus_{\sigma,\pi} \sigma \boxtimes \pi$$

在 Gal_F 和 $G(\mathbb{A})$ 的表示之间建立某种对应. 在数域情形, 相对照的几何对象是**志村簇**.

运用初等的表示论论证, 可说明对于 $G = \mathrm{GL}_2$ 此路不通, 但可考虑 $\mathrm{Gal}_F \times \mathrm{Gal}_F \times G(\mathbb{A})$ 的作用来实现之. 这是 Drinfeld 的功绩.

定义 5.4 称自守形式 f 是**尖点形式**, 如果对任意抛物子群 $P = MU \subsetneq G$ 和 $x \in G(\mathbb{A})$, 积分 $\displaystyle\int_{U(F)\backslash U(\mathbb{A})} f(xu)\,\mathrm{d}u = 0$. 由尖点形式生成的自守表示称为**尖点表示**.

尖点表示是离散自守谱的基本构件: 我们有 $L^2_{\text{cusp}} \subset L^2_{\text{disc}}$, 而一般的离散谱则由 Levi 子群的尖点表示先作 Eisenstein 级数, 再取留数而得. 对于函数域上的情形, V. Lafforgue 对尖点形式给出了代数的刻画: f 是尖点形式当且仅当它在所有 Hecke 算子作用下张成有限维空间.

迄今为止, 对函数域上的 Langlands 对应的重要突破包括但不限于:

- Drinfeld (1978) 对 GL_2 证明了 Langlands 猜想. 这里起作用的 $\mathcal{X}$ 是所谓两爪 $(r = 2)$ 的 shtuka 的模空间.
- L. Lafforgue (2002) 发展了这一思路, 结合分析学工具证明了 GL_n 的整体 Langlands 对应.
- 阿部知行 [1] 用等晶体 (不妨设想为代数簇的 p-进上同调的系数) 取代 ℓ-进 Galois 表示.
- 对一般 G 的情形, V. Lafforgue [10] 对尖点表示得到了 Langlands 猜想的自守 $\to$ Galois 方向. 他考虑了具有 r 个爪的 shtuka. 此方法也可以给出局部 Langlands 对应在正特征情形的部分结果.

6 Lafforgue 工作的概述

6.1 Hecke 叠和 shtuka

考虑函数域 $F = \mathbb{F}_q(C)$, 其中 C 是 $\mathbb{F}_q$ 上的曲线. 考虑以下资料:

- G: 在 F 上的分裂约化群,
- $I = I_1 \sqcup \cdots \sqcup I_k$: 有限集,
- $N \subset C$: 有限子概型.

定义 Hecke 叠为 ind-代数叠

$$\mathrm{Hecke}_{N,I}^{(I_1,\ldots,I_k)} = \left\{ \begin{array}{l} (x_i)_{i\in I} \in (C \smallsetminus N)^I : \\ ((\mathcal{G}_j, \psi_j) \in \mathrm{Bun}_{G,N})_{j=0}^k \\ \phi_j : \quad \underbrace{\mathcal{G}_{j-1} \longrightarrow \mathcal{G}_j}_{\text{仅定义在 } C\smallsetminus\bigcup_{i\in I_j} x_i \text{ 上}} \end{array} \middle| \; \phi_j \text{ 保级结构 } \psi_{j-1}, \psi_j \right\}.$$

更确切地说, 我们对每个概型 $S_{/\mathbb{F}_q}$, 我们在 $C \times S$ 和 $C \times S \smallsetminus \bigcup_{i\in I_j} \Gamma_{x_i}$ 上指定上述资料, 其中 Γ_{x_j} 是 $x_j : S \to (C \smallsetminus N)$ 的态射图像. 所有这些资料构成一个广群. 当 S 变动, 这赋予 $\mathrm{Hecke}_{N,I}^{(I_1,\ldots,I_k)}$ 叠的结构.

如在 $N = \emptyset$ 情形另加平凡化 $\theta : \mathcal{G}_k \xrightarrow{\sim} G \times C$ 作为资料的一部分, 便得到 ind-概型 $\mathrm{Gr}_I^{(I_1,\ldots,I_k)}$, 称为 **Beilinson–Drinfeld 仿射 Grassmann 空间**.

再用叠的拉回图表定义叠 $\mathrm{Cht}_{N,I}^{(I_1,\ldots,I_k)}$:

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Cht}_{N,I}^{(I_1,\ldots,I_k)} & \longrightarrow & \mathrm{Hecke}_{N,I}^{(I_1,\ldots,I_k)} \\ \big\downarrow & \square & \big\downarrow {\scriptstyle (\mathcal{G}_0,\mathcal{G}_k)} \\ \mathrm{Bun}_{G,N} & \xrightarrow[\text{(id,Fr)}]{} & \mathrm{Bun}_{G,N} \times \mathrm{Bun}_{G,N} \end{array}$$

这就是带 N 级结构的 shtuka 的模空间.

- 施加 $\mathcal{G}_0$ 的稳定性条件 μ (类似 Harder–Narasimhan) 和每个 ϕ_j 的 “相对位置” $\underline{\omega}$, 可以截出子叠 $\mathrm{Cht}_{N,I,\underline{\omega}}^{(I_1,\ldots,I_k),\leq\mu}$ 和 $\mathrm{Gr}_{I,\underline{\omega}}^{(I_1,\ldots,I_k)}$ 等等.
- 自然态射 $\mathrm{Cht}_{N,I}^{(I_1,\ldots,I_k)} \to (C \smallsetminus N)^I$ 给出所谓的 $r := |I|$ 只 “爪”.
- 和经典的化约理论类似, 若 G 非半单群, 在此还应当考虑某些格 $\Xi \subset Z_G(F)\backslash Z_G(\mathbb{A})$ 的作用.

6.2 上同调

V. Lafforgue 在其工作中的观点是改用 $W \in \mathrm{Rep}(\check{G}^I)$ 替代 $\underline{\omega}$ 来作截断. 此处以 $\mathrm{Rep}(\check{G}^I)$ 代表代数群 $\check{G}^I$ 的有限维代数表示构成的范畴.

我们有光滑态射

$$\epsilon : \mathrm{Cht}_{N,I,W}^{(I_1,\ldots)} \longrightarrow \mathrm{Gr}_{I,W}^{(I_1,\ldots)} / G_{\sum_i \infty x_i}.$$

几何佐武一郎对应对 W 给出反常层 $\mathcal{S}_W$, 对 $(C \smallsetminus N)^I$ 适当地归一化后将 $\mathcal{S}_W$ 用 ϵ 拉回 Cht/Ξ, 得到 $\mathcal{F}_W$. 限制到 $\leq \mu$ 部分, 再作 !-推出到 $(C \smallsetminus N)^I$, 得到 $\mathcal{H}_W^{\leq\mu} \in \mathrm{D}_c^{\mathrm{b}}((C \smallsetminus N)^I)$.

另一方面, 我们有对角态射 $\Delta : C \to C^I$. 取 C 的

$$\eta : \text{ 泛点}, \quad \bar{\eta} \mapsto \eta : \text{几何点}$$

以及几何点 $\overline{\eta^I} \mapsto \eta^I$; 注意到 $\Delta(\eta) \in \overline{\{\eta^I\}}$, 选定 "特殊化" $\mathfrak{sp} : \overline{\eta^I} \to \Delta(\bar{\eta})$ (以及相应的严格 Hensel 化之间的态射). 我们遂有

$$H_{I,W} := \left(\varinjlim_{\mu} \mathcal{H}_W^{0,\leq\mu} \Big|_{\Delta(\bar{\eta})} \right)^{\text{Hecke 有限}} \xrightarrow[\sim]{\mathfrak{sp}^*} \left(\varinjlim_{\mu} \mathcal{H}_W^{0,\leq\mu} \Big|_{\overline{\eta^I}} \right)^{\text{Hecke 有限}}.$$

上标 0 代表取相对于寻常 t-结构的上同调 H^0.

以下是 $(I, W) \mapsto H_{I,W}$ 的一些性质.

- $H_{I,W}$ 带有 $\mathrm{Gal}_F^I = \pi_1(\eta, \bar{\eta})^I$ 作用, 它无关 $\mathfrak{sp}^*$, $\overline{\eta^I}$ 的选取.
- 任意映射 $\zeta : I \to J$ 诱导 $\check{G}^J \to \check{G}^I$, 从而有拉回 $W \mapsto W^\zeta \in \mathrm{Rep}(\check{G}^J)$; 存在自然同构 $\chi_\zeta : H_{I,W} \xrightarrow{\sim} H_{J,W^\zeta}$. 这里起实质作用的是 BD-Grassmann 空间理论里的融合积.
- $H_{I,W}$ 对 $W \in \mathrm{Rep}(\check{G}^I)$ 具有函子性.
- 记 $\mathbf{1}$ 为平凡表示, $\zeta : \emptyset \to \{0\}$, 则

$$H_{\emptyset,\mathbf{1}} = C_c^{\text{cusp}}\left(\mathrm{Bun}_{G,N}(\mathbb{F}_q)/\Xi\right) \xrightarrow[\chi_\zeta]{\sim} H_{\{0\},\mathbf{1}}.$$

细节需要较深的知识. 粗略地说, 基本要素包括

1. 用 Drinfeld 引理制造 $\pi_1(\eta, \bar{\eta})^I$-作用;
2. 透过 Varshavsky 的结果将此联系到 $C_c(\mathrm{Bun}_{G,N}(\mathbb{F}_q)/\Xi)$, 从而接上经典理论;
3. 某种 Eichler–志村关系式 (导致有限性), 这是 Lafforgue 的工作中技术性较强的部分.

6.3 巡游算子或 S-算子

设 $W \in \mathrm{Rep}(\check{G}^I)$, $x \in W^{\check{G}-\mathrm{inv}}$, $\xi \in W^*_{\check{G}-\mathrm{coinv}}$, $\vec{\gamma} \in \mathrm{Gal}_F^I$. 上标 inv (或下标 coinv) 代表取相应的不变量 (或余不变量).

引入符号 0 以考虑独点集 $\{0\}$. 记 $\zeta_I : I \to \{0\}$; 相应地 $\check{G} = \check{G}^{\{0\}} \to \check{G}^I$ 是对角嵌入.

定义算子 $S_{I,W,x,\xi,\vec{\gamma}}$ 为合成

$$\begin{tikzcd}
H_{\{0\},\mathbf{1}} \arrow[r, "x"] \arrow[rr, bend left, "张爪"] & H_{\{0\},W^{\zeta_I}} \arrow[r, "\sim", "\chi_{\zeta_I}^{-1}"'] & H_{I,W} \arrow[d, "\vec{\gamma}: 沿爪“巡游”"] \\
H_{\{0\},\mathbf{1}} & H_{\{0\},W^{\zeta_I}} \arrow[l, "\xi"'] & H_{I,W} \arrow[l, "\sim", "\chi_{\zeta_I}"'] \arrow[ll, bend left, "收爪"]
\end{tikzcd}$$

巡游算子也称为 S-算子. 它包含 Hecke 算子作为特例.

例 6.1 取 $I=\{1,2\}$, 不可约表示 $V \in \operatorname{Rep}(\check{G})$, 自明的

$$x:\mathbf{1} \to V \boxtimes V^*, \quad \xi : V \boxtimes V^* \to \mathbf{1},$$

以及 $\vec{\gamma}=(\gamma,1)$, 其中 $\gamma \in \mathrm{Gal}_{F_v}$ 满足 $\deg(\gamma)=1$. 相应的巡游算子即是经典 Hecke 算子 $h_{V,v}$; 这里用经典版本的佐武一郎同构来定义 $V \mapsto h_{V,v}$.

巡游算子可进一步改编成 $S_{I,f,\vec{\gamma}}$, 其中 f 是 $\check{G}^I$ 上的双边 $\check{G}$-不变正则函数.

- 此诸算子构成 $\operatorname{End}\left(C_c^{\text{cusp}}\left(\mathrm{Bun}_{G,N}(\mathbb{F}_q)/\Xi\right)\right)$ 的一个有限维**交换**子代数, 其作用和 $C_c(K_N\backslash G(\mathbb{A})/K_N)$ 的卷积作用交换. 因而

$$C_c^{\text{cusp}}\left(\mathrm{Bun}_{G,N}(\mathbb{F}_q)/\Xi\right) = \bigoplus_{\nu:\mathcal{B}^{\text{red}}\text{ 的特征标}} \left(\mathfrak{H}_\nu : \text{广义特征子空间}\right).$$

- 运用一些几何不变量理论, 主要依赖 Richardson 的结果, V. Lafforgue 证明 ν 对应到 L-参数 $\sigma:\mathrm{Gal}_F \to \check{G}$, 满足种种相容性条件. 从而给出了 Langlands 对应的一个方向.

- 对于 $G=\mathrm{GL}_n$, 巡游算子归结为 Hecke 算子, 而 ν 和 σ 的对应归结为伪特征标理论 (Taylor); 上述结果化为 L. Lafforgue 早先结果的弱版本.

正特征情形下的局部 Langlands 对应能由受限 shtuka 的模空间得到部分的实现, 这是 Genestier–Lafforgue 的工作.

此外, 几何方法也能处理零特征情形的局部 Langlands 对应, 这是 Fargues–Scholze 纲领的内容, 它是局部 Langlands 纲领近年来的热点方向之一. 除了延续 Genestier–Lafforgue 的思想, 此纲领主要基于 p-进 Hodge 理论的技术.

7 几何 Langlands 纲领

7.1 几何化的线索

几何 Langlands 纲领的起源可以上溯至 Deligne, Drinfeld, Laumon 等人在 1970–80 年代的工作. 考虑有限域 $\mathbb{F}_q$ 上的曲线 C (特征 p) 或连通紧 Riemann 曲面 C (特征零). 取 F 为相应的函数域. 设 G 为分裂约化群. 为了简化, 我们仅考察非分歧的情形.

几何化的总体图像如下.

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Bun}_G(\mathbb{F}_q)\text{ 上自守函数} & \mathrm{Bun}_G\text{ 上的“自守 }\ell\text{-进层”(特征 }p) \arrow[l, "\text{层–函数字典}"'] \arrow[d, dashed, no head, "\text{类比}"'] \\
\bigsqcup_\alpha G_\alpha(F)\backslash G_\alpha(\mathbb{A})/G_\alpha(\mathbb{A}^\circ) \xrightarrow{f} \overline{\mathbb{Q}_\ell} & \mathrm{Bun}_G\text{ 上的 }D\text{-模 (特征零)} \arrow[d, leftrightarrow, "\text{对应?}"] \\
\text{非分歧 Galois 表示 + }\check{G}\text{-结构} \arrow[r, leftrightarrow] & \check{G}\text{-局部系统}
\end{tikzcd}$$

欲知详情, 可选的参考材料是 D. Gaitsgory 的 Bourbaki 报告 [7]. 注意到 D-模和层的类比是透过 Riemann–Hilbert 对应来实现的.

7.2 范畴化

以上猜测的还只是一个简单而粗暴的双射. 现代数学的一个重要思想是范畴化, 相当于用范畴, 甚至是高阶范畴之间的等价来替代双射, 意在探明更丰富的结构. 出于技术细节的考虑, 今后仅论特征零的情形.

- C 上的全体 $\check{G}$-局部系统构成一个**导出代数叠** $\mathrm{LocSys}_{\check{G}}$.
- Bun_G 上的全体 D-模给出 DG-范畴 (即: 微分分次范畴) $\mathrm{D}(\mathrm{Bun}_G)$.

现在可以勾勒范畴化的几何 Langlands 对应的大致形式.

猜想 7.1 *存在典范的 DG-范畴等价* $\mathbb{L}_G$

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{IndCoh}_{\mathcal{N}}\left(\mathrm{LocSys}_{\check{G}}\right) \arrow[r, "\mathbb{L}_G"] & \mathrm{D}\left(\mathrm{Bun}_G\right) \\
\mathrm{QCoh}\left(\mathrm{LocSys}_{\check{G}}\right) \arrow[u, "\text{子范畴}"] & \left\{\check{G}-\text{局部系统}\right\} \arrow[l, hook', "\text{作为对象}", "\text{(摩天大厦层)}"']
\end{tikzcd}$$

它必须服从于种种相容性条件. 特别地, $\mathbb{L}_G$ *保持 Hecke 作用.*

Hecke 作用的相容性是通过几何佐武一郎对应来表述的, 后者是 Lusztig–Drinfeld–Ginzburg–Mirković–Vilonen–朱歆文–Richarz 等人的工作. 几何 Langlands 纲领的其它基本陈述莫不如是. 理解几何佐武一郎对应应当是学习几何 Langlands 纲领的第一步.

8 量子 Langlands 纲领概述

一些学者认为, Weil 的 Rosetta 石碑上应当还有第四种语言—**量子场论**. 奠基性质的文献包括:

- Kapustin–Witten [9]: 量子场论中的 S-对偶性可以由几何 Langlands 纲领诠释.
- 较近的工作则有 Aganagic–Frenkel–Okounkov [2].
- 亦可参考 E. Frenkel 关于几何 Langlands 纲领与共形场论的讲义 [5].

以下大致按照 [7], 但只能作极粗略的勾勒. 我们在复数域 $\mathbb{C}$ 上操作. 首先, 记 G 的 Lie 代数为 $\mathfrak{g}$, 取 Cartan 子代数 $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$.

- 量子 Langlands 对应涉及一个形变参数, 这是 $\mathfrak{h}$ 上的非退化 Weyl-不变二次型 κ; 它对应到 $\check{G}$ 上一组类似的资料, 记为 $-\kappa^{-1}$.
- 在量子框架下, G 和 $\check{G}$ 的地位是对等的. 下为 Gaitsgory 在 [6] 提出的 Conjecture 4.2:
$$\mathrm{D}_{\kappa}\left(\mathrm{Bun}_G\right) \overset{?}{\simeq} \mathrm{D}_{-\kappa^{-1}}\left(\mathrm{Bun}_{\check{G}}\right);$$
上式两边都是自守的, 分别由被 κ 和 $-\kappa^{-1}$ 所 "扭曲" 的 D-模组成.
- 当二次型 $\kappa \to 0$ 时, 量子 Langlands 对应退化到范畴化的几何 Langlands 对应.

Gaitsgory 认为这样一族形变解释了 Langlands 对应如何可能, 它应当比 $\mathbb{L}_G$ 更为根本.

量子 Langlands 纲领还可以和约化群 G 的某些**覆叠群**搭上线, 详见 Gaitsgory–Lysenko 最近的工作 [8].

值得指出的是高阶范畴和导出代数几何已经逐渐成为此方向的标准语言. 不熟悉这一思维工具, 对几何 Langlands 纲领便难以入门.

参考文献

[1] Tomoyuki Abe, Langlands correspondence for isocrystals and the existence of crystalline companions for curves. *J. Amer. Math. Soc. 31 (2018), no. 4*, 921-1057.

[2] M. Aganagic, E. Frenkel, A. Okounkov, Quantum q-Langlands correspondence. *Trans. Moscow Math. Soc. 79* (*2018*)

[3] K. Buzzard, T. Gee, The conjectural connections between automorphic representations and Galois representations. *Automorphic forms and Galois representations. Vol. 1, 135–187, London Math. Soc. Lecture Note Ser., 414, Cambridge Univ. Press, Cambridge,* (*2014*)

[4] P. Deligne, La conjecture de Weil. II. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. No. 52* (*1980*), 137–252.

[5] Edward Frenkel, Lectures on the Langlands Program and Conformal Field Theory. arXiv:hep-th/0512172

[6] Dennis Gaitsgory, Quantum Langlands Correspondence. arXiv:1601.05279

[7] Dennis Gaitsgory, Progrès récents dans la théorie de Langlands géométrique. *Séminaire Bourbaki. Vol. 2015/2016. Exposés 1104–1119. Astérisque No. 390* (2017)

[8] D. Gaitsgory, S. Lysenko, Parameters and duality for the metaplectic geometric Langlands theory. *Selecta Math.* (*N.S.*) *24* (*2018*), *no. 1*, 227–301.

[9] Anton Kapustin, Edward Witten, Electric-magnetic duality and the geometric Langlands program. *Commun. Number Theory Phys. 1* (*2007*), *no. 1*, 1–236.

[10] Vincent Lafforgue, Chtoucas pour les groupes réductifs et paramétrisation de Langlands globale. *J. Amer. Math. Soc. 31* (*2018*), *no. 3*, 719-891.

[11] 李文威. 模形式初步. 北京: 科学出版社, 2020 年 6 月. ISBN: 978-7-03-064531-9.