Corrections pour la section 4 de *La formule des traces pour les revêtement de groupes réductifs connexes. II. Analyse harmonique locale*

Wen-Wei Li

8 novembre 2024

Dans le début de §4.1 (dans «Un fait important à se rappeler...»), je prétend que tout caractère continu $G_{\mathrm{SC}}(F) \to \mathbb{C}^\times$ est trivial, mais ceci n'est pas vrai. En décomposant G_{SC} en des facteurs F-simples, des contre-exemples paraissent exactement en les facteurs de la forme $\mathrm{S}D^\times$ où D est une E-algèbre à division centrale, le corps E étant une extension finie séparable de F (on omet la restriction de scalaires par $E|F$). On renvoie à l'Appendice A par J.-P. Labesse de E. Lapid et Z. Mao, *A conjecture on Whittaker–Fourier coefficients of cusp forms*, Journal of Number Theory, Vol. 146 (2015), pp.448-505 pour les détails.

Le même problème paraît aussi dans l'article *La formule des traces pour les revêtements de groupes réductifs connexes. I. Le développement géométrique fin.* Or dans *loc. cit.*, le caractère est soit un caractère automorphe de $G_{\mathrm{SC}}(\mathbb{A}_F)$ pour un corps de nombres F, soit un produit de composantes locales d'un tel caractère ; de tels caractères sont triviaux d'après J.-L. Waldspurger, *Caractères automorphes d'un groupe réductif* (arXiv:1608.07150).

Ces problèmes ne se posent pas si l'on se limite aux revêtements de $\mathrm{GL}(n, F)$, les groupes classiques ou les groupes de similitudes.

Revenons au cadre local non-archimédien de §4.1. L'hypothèse fausse ci-dessus sert à trivialiser le caractère $\boldsymbol{\omega}' := \boldsymbol{\omega} \circ (\pi, \iota)$ de $G'(F) = G_{\mathrm{SC}}(F) \times Z^\circ_{G^\circ}(F)$, afin de ramener les $\boldsymbol{\omega}$-intégrales orbitales sur $\mathfrak{g}$ aux intégrales orbitales usuelles sur $\mathfrak{g}' = \mathfrak{g}$. Ce qu'on obtient maintenant sont les $\boldsymbol{\omega}'$-intégrales orbitales sur $\mathfrak{g}'$. Observons que $\boldsymbol{\omega}'$ est d'ordre fini, et trivial sur $Z^\circ_{G^\circ}(F)$; l'action adjointe de $G(F)$ sur $G'(F)$ est bien définie, laissant $\boldsymbol{\omega}'$ invariante car $\boldsymbol{\omega}'$ provient de $\boldsymbol{\omega} : G(F) \to \mathbb{C}^\times$.

Par conséquent, l'espace $\mathcal{I}(\mathfrak{g}'(F))$ doit être remplacé par $\mathcal{I}(\mathfrak{g}'(F))_{\boldsymbol{\omega}'}$. On peut définir le groupe fini

$$\Xi := G(F)/\mathrm{Im}\left[(\pi, \iota) : \mathrm{Ker}(\boldsymbol{\omega}') \to G(F)\right],$$

et noter $\Pi(\Xi)$ l'ensemble de classes d'isomorphismes de représentations irréductibles de Ξ. Posons

$$\Pi_{\omega'}(\Xi) = \{\xi \in \Pi(\Xi) : \xi|_{G_{\mathrm{SC}}(F)} = \boldsymbol{\omega}' \cdot \mathrm{id}\}$$

et observons que $\boldsymbol{\omega} \in \Pi_{\omega'}(\Xi)$. L'action de Ξ sur $\mathcal{I}(\mathfrak{g}'(F))_{\omega'}$ est toujours induite par $f \mapsto f^{y^{-1}}$ où $y \in G(F)$. Idem pour $\mathcal{J}(\mathfrak{g}'(F))$. Dans les décompositions Ξ-isotypiques de $\mathcal{I}(\mathfrak{g}'(F))_{\omega'}$ et $\mathcal{J}(\mathfrak{g}'(F))^{\omega'}$, seulement les $\xi \in \Pi_{\omega'}(\Xi)$ interviennent.

Avec ces modifications, les lemmes 4.1.1 et 4.1.2 restent valides. L'égalité dans la Remarque 4.1.3 doit être remplacée par

$$J_G^{\boldsymbol{\omega}}(\dot{X}, f) = J_{G'}^{\boldsymbol{\omega}'}(\dot{X}, \mathrm{pr}_{\boldsymbol{\omega}} f), \quad f \in \mathcal{I}(\mathfrak{g}(F))_{\boldsymbol{\omega}}.$$

Les démonstrations du Théorème 4.1.4 ($\boldsymbol{\omega}$-germes de Shalika) et de la Proposition 4.1.5 (densité de $\boldsymbol{\omega}$-intégrales orbitales régulières) marchent comme suit. On se ramène aux variantes pour $\mathcal{I}(\mathfrak{g}'(F))_{\omega'}$ et $\mathcal{J}(\mathfrak{g}'(F))^{\omega'}$; ensuite, on se ramène aux facteurs F-simples de G_{SC} comme la théorie sur $Z_{G^\circ}^\circ$ est triviale. Or $\boldsymbol{\omega}'$ est non-trivial seulement sur facteurs de la forme $\mathrm{S}D^\times$, qui sont F-anisotropes, donc les assertions sont triviales sur ces facteurs. Pour les autres facteurs, les caractères sont triviaux et le résultat est connu.

Pour prouver la Proposition 4.1.7, la clef est toujours sa variante pour $\mathfrak{g}'$ avec un caractère $\boldsymbol{\omega}'$, et on se ramène toujours au cas de $\mathrm{S}D^\times$ avec un caractère, noté $\boldsymbol{\omega}_D$. Fixons $\mathrm{S}D^\times$ et un réseau convenable L_D dans son algèbre de Lie. Le voisinage V_D dans $\mathcal{J}(V_D, \infty, L_D)^{\boldsymbol{\omega}_D}$ est vide, ce qui entraîne que $\mathcal{J}(V_D, \infty, L_D)^{\boldsymbol{\omega}_D}$ est l'espace des θ qui sont à support compact quand restreintes aux fonctions L_D-invariantes. C'est exactement ce qu'on veut pour justifier la preuve.

Les Théorèmes 4.1.8–4.1.10 s'en découlent.

Il y d'autres erreurs mineurs à corriger, comme ci-dessous.

— Avant le Lemme 4.1.2, la définition $D^G(X) = \det(\mathrm{ad}(X)|\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_X)$ convient seulement pour X semi-simple. Il faut remplacer le $|D^G(X)|^{\frac{1}{2}}$ dans la définition de $J_G^{\boldsymbol{\omega}}(\dot{X}, f)$ plus haut par $|D^G(X_{\mathrm{ss}})|^{\frac{1}{2}}$, où X_{ss} désigne la partie semi-simple dans la décomposition de Jordan de X.

— Dans le point 4 du Théorème 4.1.4, il faut remplacer l'exposant $-\dim G/G_u$ de $|t|$ par $\dim \mathfrak{g}_{\mathrm{nil}} - \dim G/G_u$.