Errata for published works

Wen-Wei Li

September 9, 2025

Below is a list of errata for my works, except those books in Chinese. I apologize for all these mistakes.

1 For the paper *Transfert d'intégrales orbitales pour le groupe métaplectique*, Compositio Mathematica 147 (2011)

1.1 The factor $\Delta_0(\delta', \delta'')$

There is an obvious mistake in the third formula in Définition 5.9, pointed out to me by Caihua Luo: the a'' there should be the parameter for δ'', not for γ''. This correction has been mentioned in a short joint paper by W. T. Gan and myself, *The Shimura–Waldspurger correspondence for* $\mathrm{Mp}(2n)$ in Geometric Aspects of the Trace Formula, Müller, Shin, Templier (Eds.). Simons Symposia. (2018),

1.2 Correspondence of semisimple classes

The correspondence between singular semisimple classes is not so correctly explained in §5.1 and §7.2. By example, one cannot suppose $K = K' \times K''$ in general!

This is corrected in Remarque 2.3.1 of my article *La formule des traces stable pour le groupe métaplectique: les termes elliptiques*. Below is an excerpt (in French).

> Regardons la partie unitaire. On peut toujours décomposer $(K, K^\sharp)$ en un produit des paires $(L, L^\sharp)$ telles que $L^\sharp$ est un corps. Pour L fixé, on pose $u := a|_L$ et on a $L = F[u]$. En indexant les termes par les classes d'isomorphisme des telles paires (L, u), on écrit la partie unitaire du paramètre de δ comme
>
> $$\prod_{L,u} (L/L^\sharp, u, (W_u, h_u))$$
>
> avec W_u non nuls. Les parties unitaires des paramètres de γ', γ'' se décomposent en conséquence
>
> $$\prod_{L,u} (L/L^\sharp, u, (V'_u, h'_u)), \quad \prod_{L,u} (L/L^\sharp, -u, (V''_u, h''_u)),$$
>
> où (L, u) parcourt le même ensemble d'indices, mais on permet que pour tout (L, u), au plus l'un de V'_u et V''_u est nul. En effet, cela est clair d'après le raccordement des valeurs propres. Pour la même raison, on doit exiger que
>
> $$W_u \simeq V'_u \oplus V''_u \quad \text{en tant que des } L\text{-modules}$$
>
> pour tout (L, u). C'est compatible avec la description précédente.
>
> Tel est le point de départ de §7, donc tous les arguments de ceux-ci demeurent valables.

2 For the paper *Le lemme fondamental pondéré pour le groupe métaplectique*, Canadian Journal of Mathematics, Vol 64 (3), 2012

Same issue about the correspondence between singular semisimple classes in §6 of this paper. Corrected in the same way as in Section 1.2.

3 For the paper *La formule des traces pour les revêtements de groupes réductifs connexes. I. Le développement géométrique fin*, Journal für die reine und angewandte Mathematik. Issue 686 (2014)

In §5 of this paper, eg. in Proposition 5.2.1, I tried to trivialize automorphic characters or their local components on simply connected covers of connected reductive groups. This requires justification: see Section 4 for details.

4 For the paper *La formule des traces pour les revêtements de groupes réductifs connexes. II. Analyse harmonique locale*, Annales scientifiques de l'ENS 45, fascicule 5 (2012)

There are some relatively minor and fixable mistakes in §3.2, I think (to be confirmed). Anyway, the formulas used in subsequent papers are correct.

The latest arXiv version contains an errata in French, reproduced below.

> Dans le début de §4.1 (dans «Un fait important à se rappeler...»), je prétend que tout caractère continu $G_{\mathrm{SC}}(F) \to \mathbb{C}^{\times}$ est trivial, mais ceci n'est pas vrai. En décomposant G_{SC} en des facteurs F-simples, des contre-exemples paraissent exactement en les facteurs de la forme $\mathrm{S}D^{\times}$ où D est une E-algèbre à division centrale, le corps E étant une extension finie séparable de F (on omet la restriction de scalaires par $E|F$). On renvoie à l'Appendice A par J.-P. Labesse de E. Lapid et Z. Mao, *A conjecture on Whittaker–Fourier coefficients of cusp forms*, Journal of Number Theory, Vol. 146 (2015), pp.448-505 pour les détails.
>
> Le même problème paraît aussi dans l'article *La formule des traces pour les revêtements de groupes réductifs connexes. I. Le développement géométrique fin*. Or dans *loc. cit.*, le caractère est soit un caractère automorphe de $G_{\mathrm{SC}}(\mathbb{A}_F)$ pour un corps de nombres F, soit un produit de composantes locales d'un tel caractère; de tels caractères sont triviaux d'après J.-L. Waldspurger, *Caractères automorphes d'un groupe réductif* (arXiv:1608.07150).
>
> Ces problèmes ne se posent pas si l'on se limite aux revêtements de $\mathrm{GL}(n, F)$, les groupes classiques ou les groupes de similitudes.
>
> Revenons au cadre local non-archimédien de §4.1. L'hypothèse fausse ci-dessus sert à trivialiser le caractère $\boldsymbol{\omega}' := \boldsymbol{\omega} \circ (\pi, \iota)$ de $G'(F) = G_{\mathrm{SC}}(F) \times Z^{\circ}_{G^{\circ}}(F)$, afin de ramener les $\boldsymbol{\omega}$-intégrales orbitales sur $\mathfrak{g}$ aux intégrales orbitales usuelles sur $\mathfrak{g}' = \mathfrak{g}$. Ce qu'on obtient maintenant sont les $\boldsymbol{\omega}'$-intégrales orbitales sur $\mathfrak{g}'$. Observons que $\boldsymbol{\omega}'$ est d'ordre fini, et trivial sur $Z^{\circ}_{G^{\circ}}(F)$; l'action adjointe de $G(F)$ sur $G'(F)$ est bien définie, laissant $\boldsymbol{\omega}'$ invariante car $\boldsymbol{\omega}'$ provient de $\boldsymbol{\omega} : G(F) \to \mathbb{C}^{\times}$.
>
> Par conséquent, l'espace $\mathcal{I}(\mathfrak{g}'(F))$ doit être remplacé par $\mathcal{I}(\mathfrak{g}'(F))_{\boldsymbol{\omega}'}$. On peut définir le groupe fini
> $$\Xi := G(F)/\mathrm{Im}\left[(\pi, \iota) : \mathrm{Ker}(\boldsymbol{\omega}') \to G(F)\right],$$

et noter $\Pi(\Xi)$ l'ensemble de classes d'isomorphismes de représentations irréductibles de Ξ. Posons
$$\Pi_{\boldsymbol{\omega}'}(\Xi) = \{\xi \in \Pi(\Xi) : \xi|_{G_{\mathrm{SC}}(F)} = \boldsymbol{\omega}' \cdot \mathrm{id}\}$$
et observons que $\boldsymbol{\omega} \in \Pi_{\boldsymbol{\omega}'}(\Xi)$. L'action de Ξ sur $\mathcal{I}(\mathfrak{g}'(F))_{\boldsymbol{\omega}'}$ est toujours induite par $f \mapsto f^{y^{-1}}$ où $y \in G(F)$. Idem pour $\mathcal{J}(\mathfrak{g}'(F))$. Dans les décompositions Ξ-isotypiques de $\mathcal{I}(\mathfrak{g}'(F))_{\boldsymbol{\omega}'}$ et $\mathcal{J}(\mathfrak{g}'(F))^{\boldsymbol{\omega}'}$, seulement les $\xi \in \Pi_{\boldsymbol{\omega}'}(\Xi)$ interviennent.

Avec ces modifications, les lemmes 4.1.1 et 4.1.2 restent valides. L'égalité dans la Remarque 4.1.3 doit être remplacée par

$$J_G^{\boldsymbol{\omega}}(\dot{X}, f) = J_{G'}^{\boldsymbol{\omega}'}(\dot{X}, \mathrm{pr}_{\boldsymbol{\omega}} f), \quad f \in \mathcal{I}(\mathfrak{g}(F))_{\boldsymbol{\omega}}.$$

Les démonstrations du Théorème 4.1.4 ($\boldsymbol{\omega}$-germes de Shalika) et de la Proposition 4.1.5 (densité de $\boldsymbol{\omega}$-intégrales orbitales régulières) marchent comme suit. On se ramène aux variantes pour $\mathcal{I}(\mathfrak{g}'(F))_{\boldsymbol{\omega}'}$ et $\mathcal{J}(\mathfrak{g}'(F))^{\boldsymbol{\omega}'}$; ensuite, on se ramène aux facteurs F-simples de G_{SC} comme la théorie sur $Z_{G^\circ}^\circ$ est triviale. Or $\boldsymbol{\omega}'$ est non-trivial seulement sur facteurs de la forme $\mathrm{S}D^\times$, qui sont F-anisotropes, donc les assertions sont triviales sur ces facteurs. Pour les autres facteurs, les caractères sont triviaux et le résultat est connu.

Pour prouver la Proposition 4.1.7, la clef est toujours sa variante pour $\mathfrak{g}'$ avec un caractère $\boldsymbol{\omega}'$, et on se ramène toujours au cas de $\mathrm{S}D^\times$ avec un caractère, noté $\boldsymbol{\omega}_D$. Fixons $\mathrm{S}D^\times$ et un réseau convenable L_D dans son algèbre de Lie. Le voisinage V_D dans $\mathcal{J}(V_D, \infty, L_D)^{\boldsymbol{\omega}_D}$ est vide, ce qui entraîne que $\mathcal{J}(V_D, \infty, L_D)^{\boldsymbol{\omega}_D}$ est l'espace des θ qui sont à support compact quand restreintes aux fonctions L_D-invariantes. C'est exactement ce qu'on veut pour justifier la preuve.

Les Théorèmes 4.1.8–4.1.10 s'en découlent.

Il y d'autres erreurs mineurs à corriger, comme ci-dessous.

- Avant le Lemme 4.1.2, la définition $D^G(X) = \det\left(\mathrm{ad}(X)|\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_X\right)$ convient seulement pour X semi-simple. Il faut remplacer le $|D^G(X)|^{\frac{1}{2}}$ dans la définition de $J_G^{\boldsymbol{\omega}}(\dot{X}, f)$ plus haut par $|D^G(X_{\mathrm{ss}})|^{\frac{1}{2}}$, où X_{ss} désigne la partie semi-simple dans la décomposition de Jordan de X.
- Dans le point 4 du Théorème 4.1.4, il faut remplacer l'exposant $-\dim G/G_u$ de $|t|$ par $\dim \mathfrak{g}_{\mathrm{nil}} - \dim G/G_u$.

5 For the book *Zeta integrals, Schwartz spaces and local functional equations*, Springer Lecture Notes in Mathematics. Volume 2228 (2018)

An errata is available on my website, reproduced below.

The numbering below follows the published version in the Lecture Notes in Mathematics, No. 2228 published in 2018 by Springer (ISBN: 978-3-030-01287-8). These corrections are incorporated into the arXiv version ≥ 5 (arXiv:1508.05594).

Page 47, line -8 In the description of the topology on $C_\Omega(X^+)$ appeared an undefined norm $\|\cdot\|$ on the fibers of $\mathcal{E}$ over Ω. It suffices to take any continuous family over Ω of such norms, and the choice is irrelevant for the topology, as Ω is compact.

Page 99, (7.4) $G \hookrightarrow X_P^\flat$.

Page 108, Lemma 7.4.5 The proof of the first assertion is incorrect, and the second assertion is unnecessary. This Lemma is only used in the proof of Theorem 7.4.7 (page 111). Specifically, I used it to argue that for any fundamental weight ϖ of G with respect to a Borel pair (B, T), the defining equation $f_\varpi \in F[X^+]$ of the color D_ϖ in X^+ satisfies

$$v_{\partial X}(tf_\varpi) = 0,$$

so that $tf_\varpi \in F[X]$ (recall that X is normal and ∂X is a prime divisor) and it cuts out $\overline{D_\varpi} \subset X$. Below is a corrected argument for it.

Since $t \in F[X^+] \subset F(X)$ is a uniformizer for ∂X (Lemma 7.2.5, 7.2.6), our goal is to prove $v_{\partial X}(f_\varpi) = -1$ for each fundamental weight ϖ.

Write $\mathbb{G}_m = \operatorname{Spec} F[s, s^{-1}]$. By the proof of Lemma 7.2.6, for $g \in M_{\mathrm{ab}} \times G \times G$ in general position we have

$$\begin{aligned} v_{\partial X}(f_\varpi) &= \operatorname{ord}_{s=0} \left(f_\varpi(c(s)g) \right) \cdot i(c(0), \partial X \cdot c; X) \\ &= \operatorname{ord}_{s=0} \left(f_\varpi(x_0(1, \mu(s))g) \right) \cdot i(c(0), \partial X \cdot c; X), \end{aligned}$$

where the base point $x_0 \in X^+(F)$, the morphism $c : \mathbb{G}_m \to X^+$ and $\mu : \mathbb{G}_m \to G$ are defined in the cited proof, namely $c(s) = sx_0(1, \mu(s))$. Here we used the fact that f_ϖ is invariant under M_{ab}-action. For the same reason, it suffices to take $g = (1, g_1, g_2)$ with generic $g_1, g_2 \in G$.

In the proof of Lemma 7.2.6, the local intersection number $i(c(0), \partial X \cdot c; X)$ has been shown to be 1.

By Lemma 7.2.3, we identify X^+ with $\mathbb{G}_m \times G$ so that $x_0 = (1, 1)$; the $\mathbb{G}_m \times G \times G$-action is also specified there. Let ρ be the (right) G-representation of highest weight ϖ; take vectors v_ϖ and $\check{v}_{-\varpi}$ in ρ and $\check{\rho}$, with weights ϖ and $-\varpi$ respectively such that $\langle \check{v}_{-\varpi}, v_\varpi \rangle = 1$. Then

$$f_\varpi(g) = \langle \check{v}_{-\varpi}, \rho(g) v_\varpi \rangle, \quad g \in G.$$

Thus we have to calculate, for generic $g_1, g_2 \in G$:

$$\operatorname{ord}_{s=0} \left\langle \check{\rho}(g_2) \check{v}_{-\varpi}, \rho(\mu(s)^{-1}) \rho(g_1) v_\varpi \right\rangle.$$

Consider the standard representation of G on $V = \bigoplus_{i=1}^n (Fe_k \oplus Fe_{-k})$. Recall that [1] the fundamental weights of G are $\varpi_k = \epsilon_1^* + \cdots + \epsilon_k^*$ with $k = 1, \ldots, n$; the corresponding highest weight representations ρ_k are realized on

$$\begin{aligned} E_k &:= \langle e_{a_1} \wedge \cdots e_{a_l} \wedge e_{-b_1} \wedge \cdots \wedge e_{-b_m} : 1 \le a_1 < \cdots < b_m \le n, \ l + m = k \rangle \\ &\subset \wedge^k V, \quad k = 1, \ldots, n. \end{aligned}$$

We then take

$$v_{\varpi_k} = e_1 \wedge \cdots \wedge e_k, \quad \check{v}_{-\varpi_k} = e_1^* \wedge \cdots \wedge e_k^* \mod E_k^\perp.$$

In the proof of Lemma 7.2.6 we took

$$\mu(s) : e_{\pm i} \mapsto \begin{cases} s^{\pm 1} e_{\pm i}, & i = 1, \\ e_{\pm i}, & i > 1. \end{cases} \quad (1 \le i \le n)$$

[1] See N. Bourbaki, *Lie groups and Lie algebras, Chapters 7—9*, pp.206–207.

Using this realization, it is clear that

$$\delta(s, g_1, g_2) := \left\langle \check{\rho}_k(g_2)\check{v}_{-\varpi_k}, \rho_k(\mu(s)^{-1})\rho_k(g_1)v_{\varpi_k} \right\rangle \in s^{-1}F[s],$$

and $\mathrm{ord}_{s=0}(\delta(s, g_1, g_2))$ for generic (g_1, g_2) equals actually

$$\inf_{(g_1,g_2)\in G^2} \mathrm{ord}_{s=0}(\delta(s, g_1, g_2)), \quad \text{which is} \geq -1.$$

Taking $g_1 = 1 = g_2$, the right hand side does attain -1. This completes the proof of $v_{\partial X}(f_\varpi) = -1$.

Alternatively, if the right hand side is ≥ 0 then $f_\varpi \in F[X]$ and is invariant under the $\mathbb{G}_m$-dilation on X. This would imply the constancy of f_ϖ by Lemma 7.4.5. Contradiction.

6 For the paper *Stable conjugacy and epipelagic L-packets for Brylinski-Deligne covers of* $\mathrm{Sp}(2n)$, Selecta Mathematica (New Series), Vol. 26, (2020)

There is a published errata on `https://doi.org/10.1007/s00029-020-0537-0`, which becomes the §10 of the updated arXiv version. The opening paragraph of that errata is reproduced below.

> The computations of the toral invariants $f_{(G,S)}(\alpha)$ in Sect. 7.2 of the paper *Stable conjugacy and epipelagic L-packets for Brylinski-Deligne covers of* $\mathrm{Sp}(2n)$ in Selecta Mathematica (N.S.), Vol. 26, (2020), no. 1 (ditto for the arXiv version) are flawed when the root α takes the form $\alpha = \epsilon_i \pm \epsilon_j$, in both the symplectic and the odd orthogonal case. The resulting $f_{(G,S)}(\alpha)$ can vary within a stable conjugacy class $\mathcal{E}$ of embeddings $j : S \hookrightarrow G$ of maximal tori. The main impacts of this mistake are listed below.
>
> - The proof of Lemma 7.2.2 no longer works for general tori S. This lemma is used to prove the key Theorem 7.6.3 on the stability of epipelagic L-packets.
> - Theorem 8.3.1 is directly built upon Sect. 7.2. Its aim is interpret the *stable system* (a notion of obstruction to stability, see Definition 7.3.3) constructed in Sect. 8.2 for $m \equiv 2 \pmod 4$, as a ratio $\epsilon_j(\gamma)/\epsilon_k(\gamma)$. This is used in Sect. 9.3 to show the compatibility with Θ-lifting when $m = 2$.
>
> The goal here is to show that
>
> - Lemma 7.2.2 still holds for a restricted class of maximal tori, which suffices for our purposes;
> - Theorem 8.3.1 can be turned into a definition for the stable system when $m \equiv 2 \pmod 4$, in order to force the results in Sect. 9.3 to be true. The new definition is more transparent.
>
> The impacted results can thus be restored with reasonable modifications. Remarkably, this is a reversion to the strategy in an early draft of this work.